目 录

中文版前言 …… (Ⅰ)

PREFACE TO THE CHINESE EDITION OF "GAME THEORY: ANALYSIS OF CONFLICT" …… (Ⅲ)

前言 …… (Ⅴ)

第一章 决策理论基础 …… (1)

1.1 博弈论、理性和智能性 …… (1)

1.2 决策理论的基本概念 …… (4)

1.3 公理系 …… (7)

1.4 期望效用最大化定理 …… (9)

1.5 等价表示 …… (14)

1.6 贝叶斯条件概率系 …… (16)

1.7 贝叶斯模型的局限性 …… (17)

1.8 占优 …… (20)

1.9 占优定理的证明 …… (24)

习题 …… (26)

第二章 基本模型 …… (29)

2.1 展开型博弈 …… (29)

2.2 策略型和正规表示 …… (35)

2.3 策略型博弈的等价性 …… (40)

2.4 简约的正规表示 …… (42)

2.5 劣策略的剔除 …… (45)

2.6 多代理人表示 …… (48)

2.7 共同知识 …… (50)

2.8 贝叶斯博弈 …… (52)

2.9 不完全信息博弈的建模 …… (58)

习题 …… (65)

第三章 策略型博弈的均衡 …… (69)

VISIT…

3.1 占优和可理性化 …… (69)
3.2 纳什均衡 …… (71)
3.3 计算纳什均衡 …… (77)
3.4 纳什均衡的意义 …… (82)
3.5 焦点效应 …… (84)
3.6 博弈的决策分析法 …… (89)
3.7 演进、抵制和风险占优 …… (91)
3.8 两人零和博弈 …… (95)
3.9 贝叶斯均衡 …… (99)
3.10 均衡中随机策略的纯化 …… (101)
3.11 拍卖 …… (103)
3.12 均衡存在性的证明 …… (107)
3.13 无限策略集 …… (110)
习题 …… (116)

第四章 展开型博弈的序贯均衡 …… (123)

4.1 混合策略与行为策略 …… (123)
4.2 行为策略均衡 …… (128)
4.3 正概率信息状态处的序贯理性 …… (130)
4.4 一致信念和所有信息状态处的序贯理性 …… (134)
4.5 计算序贯均衡 …… (141)
4.6 子博弈完美均衡 …… (145)
4.7 完美信息博弈 …… (147)
4.8 添加小概率机会事件 …… (149)
4.9 前向归纳法 …… (151)
4.10 投票与二元议程 …… (155)
4.11 技术性证明 …… (159)
习题 …… (165)

第五章 策略型均衡的精炼 …… (169)

5.1 引言 …… (169)
5.2 完美均衡 …… (171)
5.3 完美均衡和序贯均衡的存在性 …… (175)
5.4 适度均衡 …… (176)
5.5 持久均衡 …… (182)
5.6 均衡稳定集 …… (184)
5.7 生成性质 …… (188)
5.8 结论 …… (190)

习题 …… (191)
第六章 具有通信的博弈 …… (193)
6.1 合同和相关策略 …… (193)
6.2 相关均衡 …… (197)
6.3 具有通信的贝叶斯博弈 …… (204)
6.4 贝叶斯集体选择问题和贝叶斯讨价还价问题 …… (208)
6.5 具有线性效用的交易问题 …… (215)
6.6 含合同的贝叶斯博弈的一般参与约束 …… (222)
6.7 发送-接收博弈 …… (224)
6.8 可接受的与占优势的相关均衡 …… (228)
6.9 展开型博弈和多阶段博弈中的通信 …… (233)
习题 …… (237)
文献注释 …… (242)
第七章 重复博弈 …… (245)
7.1 重复囚徒困境博弈 …… (245)
7.2 重复博弈的一个一般模型 …… (247)
7.3 具有完全状态信息和贴现的重复博弈之平稳均衡 …… (252)
7.4 具有标准信息的重复博弈：一些例子 …… (258)
7.5 标准重复博弈的一般可行性定理 …… (264)
7.6 有限重复博弈和初始怀疑的作用 …… (269)
7.7 行动的不完全可观测性 …… (272)
7.8 大分散群体的重复博弈 …… (278)
7.9 不完全信息下的重复博弈 …… (280)
7.10 连续时间 …… (287)
7.11 重复博弈的进化模拟 …… (289)
习题 …… (290)
第八章 两人博弈的讨价还价与合作 …… (295)
8.1 合作博弈理论的非合作基础 …… (295)
8.2 两人讨价还价问题和纳什讨价还价解 …… (298)
8.3 个人之间加权效用的比较 …… (303)
8.4 可转让效用 …… (306)
8.5 理性威胁 …… (307)
8.6 其他讨价还价解 …… (310)
8.7 一个轮流报价的讨价还价博弈 …… (313)
8.8 一个具有不完全信息的轮流报价博弈 …… (318)
8.9 一个离散的轮流报价博弈 …… (321)

8.10 再谈判 …… (325)
习题 …… (328)
第九章 合作博弈中的联盟 …… (333)
9.1 联盟分析概述 …… (333)
9.2 可转让效用下的特征函数 …… (337)
9.3 核心 …… (341)
9.4 沙普利值 …… (347)
9.5 合作结构下的值 …… (353)
9.6 其他的解概念 …… (359)
9.7 不可转让效用下的联盟博弈 …… (363)
9.8 不具可转让效用的核心 …… (368)
9.9 不具可转让效用的值 …… (373)
习题 …… (380)
文献注释 …… (383)
第十章 不确定性下的合作 …… (385)
10.1 引言 …… (385)
10.2 有效性的概念 …… (387)
10.3 一个例子 …… (390)
10.4 事后无效性和后续报价 …… (393)
10.5 计算激励有效的机制 …… (396)
10.6 不可思议性和持久性 …… (400)
10.7 知情委托人的机制选择 …… (405)
10.8 中性讨价还价解 …… (410)
10.9 不完全信息动态匹配过程 …… (418)
习题 …… (424)
参考文献 …… (427)
译后记 …… (441)

1

决策理论基础

1.1 博弈论、理性和智能性

博弈论（Game theory）可以被定义为是对智能的理性决策者之间冲突与 1
合作的数学模型的研究。博弈论为分析那些涉及两个或更多个参与者且其决策会影响相互间的福利的局势提供了一般的数学方法。就此而论，博弈论便为社会科学各分支的学者和实际的决策者提供了非常重要的视角。博弈理论家所研究的局势，不仅仅是“游戏（game）”一词所不幸表示的消遣活动，“冲突分析”或“相互影响的决策理论*”或许是描述博弈论更为准确的术语，但“博弈论”这个名称看来已难以更改了。

近代博弈论可以说是始于策墨洛（Zermelo，1913）、波雷尔（Borel，1921）、冯·诺依曼（von Neumann，1928）的工作，以及冯·诺依曼与摩根斯特恩（Morgenstern，1944）合著的伟大的奠基性著作。博弈论方面的许多早期著作都是在第二次世界大战期间在普林斯顿完成的，而在这同一个知识团体中，还有许多著名的理论物理学家在工作（见 Morgenstern，1976）。从更广泛的知识史的角度来看，这种不同学科在地点上的巧合不完全是一种巧合。博弈论在社会科学的数学基础中的地位是其产生并广泛运用的根本原因。本世纪，物理科学中最基础的理论分支所取得的巨大进展引发了威胁我们人类文明存在的核困境。对于如何设计物理系统来利用放射性物质，人们已经懂得很多，但对如何创造社会体制来调节冲突中的人类行为却做得不够。因而，希望社会科 2
学最基础的理论分支的进展所提供的对人类行为的理解，能与物理科学的巨大进展相媲美，也就是自然而然的事了。这种愿望也是过去 50 多年中许多数学家和社会科学家致力于研究博弈论的动力之一。近年来，有效地证明博弈论的威力的是其重要应用的多方面发展，特别是在经济学领域。

博弈理论家力图通过研究定量模型和假设例子来理解冲突与合作。这些例子可能在很多方面都是脱离现实的简化，但与实际生活中大量更为复杂的情况相比，这种简化能使我们更容易看出冲突与合作的一些基本问题。当然，这也

---

* 也可译作“交互决策理论或互动决策理论”——译者注。

是任何一个研究领域都应用的分析方法——把问题放在忽略掉现实中不重要的细枝末节的一个简化模型中加以考虑。因此，即使从未遇到像博弈理论家在研究中明确规定局中人立场的局势，研究过这些假设例子的人们，仍然能够较好地理解实际的竞争局势。

在博弈论的语言中，一个**博弈**（game）指的是涉及到两个或更多个参与人的某个社会局势。博弈所涉及的参与人被称为**局中人**（players）。正如前面博弈论的定义所述，博弈理论家一般要对局中人做两个基本的假设：他们都是理性的和他们都是智能的。这两个形容词在这里都是技术性术语，所以需要对其逐一解释。

如果一个决策者在追逐其目标时能前后一致地做决策，我们就称他是**理性的**（rational）。在基于决策理论的基本结论而建立起来的博弈论中，我们假设每个局中人的目标是追求其个人期望支付值的最大化，支付则是用某个**效用**（utility）尺度来度量的。理性决策者应该按使自己的期望支付最大化的方式去做决策的思想，至少可以追溯到伯努里（Bernoulli，1738），但这个思想在近代被辨明为是正当的，则应归功于冯·诺依曼和摩根斯特恩（1947）。借助关于理性决策者应该如何行动方面所做的一些非常弱的假设，他们证明了，对任一理性的决策者，一定存在某种方式对他所关心的各种可能结果赋予效用数值，
3 使其总是选择最大化自己的期望效用。我们称这一结论为期望效用**最大化定理**（expected-utility maximization theorem）。

这里值得强调的是，证明期望效用最大化定理成立所使用的一些逻辑公理都是弱相容性假设。在这个定理的推导过程中，关键的假设一般来说是**肯定性**（sure-thing）或**替代性**（substitution）公理，它可以被非正式地表述为："如果一个决策者在事件 A 发生的偏好选项 1 胜于选项 2，并且在事件 A 不发生时也偏好选项 1 胜于选项 2，那么就有，他在知道事件 A 无论是发生还是不发生之前都应该偏好选项 1 胜于选项 2。"这样的一个假设，结合几个技术上的正则性条件，就是以保证存在某个效用尺度，使得决策者总是偏好于能给出最高期望效用值的选项。

始终最大化期望效用的行为也能从进化选择模型中导出。在一个无序性渐增成为自然规律的体系中，复杂的有机体（包括人类，更广泛地说包含社会组织）只有依照能增大其生存和自我繁衍的概率的方式行动才能持久地存在。因此，进化－选择论提出个体倾向于最大化某个度量其生存和繁衍的适应性或成功率的变量的期望值（见 Maynard Smith，1982）。

一般来说，最大化期望效用支付与最大化期望货币支付并不必然相同，因为效用值不一定要用货币单位去度量。一个厌恶风险的人在他贫穷时从增加一美元中得到的效用增加，可能比其富有时得到同一美元所带来的效用的增加更高。这一现象表明，对于许多决策者来说，效用可能是货币值的一个非线性函数。例如，一个在决策分析中常用的模型规定，决策者从得到 x 美元中获得

的效用支付是$u(x)=1-e^{-cx}$，其中 c 表示他的**风险厌恶指数**（index of risk aversion，见 Pratt，1964）。更一般地，一个人的效用支付除了与其自己的货币值有关外，可能还依赖于很多变量（甚至包括那些令他感到同情或者反感的人所得到的货币值）。

当存在**不确定性**（uncertainty）时，仅在所有有关的不确定事件都能够被指定概率的条件下，期望效用才可能被定义和计算，这些概率定量地度量了每 4
个不确定事件发生的可能性。拉姆齐（Ramsey，1926）和萨维奇（Savage，1954）证明了，即使某些事件不能被指定客观概率，一个理性的决策者应该能够确定其主观概率值，以应计算这些期望值之需。

然而，在涉及到两个或两个以上决策者的情形时，确定主观概率又出现了一种特殊的困难。例如，假设对某个给定的参与人 1 而言是未知的一个因素，正是另一个参与人 2 所选择的行动。为了确定 2 的每个可能选择行动的概率，1 需要了解 2 的决策行为，因而 1 可以设想自己处于 2 的地位。在这个思维试验中，1 或许意识到 2 正在尽量理性地解决她自己的决策问题，为此，她也必须确定 1 的每个可能选择行动的概率。实际上，1 或许能够意识到 2 可能正设想她自己处于 1 的位置以便掌握 1 将做什么。于是，每个人决策问题的理性解都依赖于其他人决策问题的解。不了解其他人决策问题的解，就没有一个问题可以被解。因此，在理性决策者们相互影响时，他们的决策问题必须放到一起进行分析，像一个方程组一样。这种分析正是博弈论研究的主题。

当我们像博弈论专家或社会科学家那样分析一个博弈时，如果局中人知道我们对此博弈所知道的一切，并能做出我们对此局势所能做出的一切推断，我们就说此博弈的局中人是**智能的**（intelligent）。博弈论一般都假设局中人在上述意义上是智能的。因此，如果我们研究出一个能描述某个博弈中智能局中人行为的理论，并且我们相信这一理论是正确的，那么，我们也必须假定该博弈的每个局中人都了解这一理论及其预测。

对于仅假设理性而不假设智能性的理论，可以考虑经济学中的价格理论一例。在价格理论的一般均衡模型中，假定每个个体都是追求效用最大化的理性决策者，但并不假定他们像价格理论家那样对经济模型的全部结构有所了解。在价格理论模型（price-theoretic models）中，个体只观察某些中间价格信号并且对此做出反应，并且假定每个个体都相信，他可以在这些价格上交易任意数量而不管这个经济系统中是否有人实际上愿意与其做这种交易。

当然，所有个体都具有完美的理性和智能性的假定，在现实生活情形中可 5
能从来都没有被满足过。但另一方面，我们也要对与这个假定不相一致的理论和预测表示怀疑。如果一个理论预测，某些人将经常地被愚弄或做出代价极高的错误行动，那么在这些人对此局势有更好的理解（从个人经验或这个博弈理论本身的印刷文本中学会）之后，这个理论将会渐渐地失去其有效性。博弈论在社会科学中的重要性大多数都是来源于这样一个事实。

1.2 决策理论的基本概念

博弈论的逻辑根源在于贝叶斯决策理论（Bayesian decision theory）。事实上，博弈论可以被看作是决策理论（对两个或两个以上决策者情形）的一种推广，或者作为决策理论在本质上的逻辑完备。因此，要理解博弈论的根本思想，就应该从研究决策理论开始。本章的其余几节专用于对贝叶斯决策理论基本思想的介绍，这里从期望效用最大化定理的一般推导及其相关结论开始。

从某个角度来说，任何一个对数理社会科学感兴趣的人都会问这样一个问题：为什么我可以期望一个简化的定量模型能成为人们行为的合理描述呢？通过证明任何满足一定直觉公理的决策者总是按照在一定的主观概率分布下最大化其某个效用函数的数学期望值的方式去行动，决策理论的基本结论就直接回答了上述问题。也就是说，任何一个理性决策者的行为应该都可以用一个能给出其对结果或彩金偏好的定量刻划的**效用函数**（utility function），和一个能刻划其对所有相关未知因素的**主观概率分布**（subjective probability distribution）来描述。而且，当有一个新的信息可被这样一个决策者利用时，它的主观概率应该根据贝叶斯公式做相应修改。

从拉姆奇（1926）、冯·诺依曼和摩根斯特恩（1947）及萨维奇（1954）开始以来，有关主观概率、期望效用最大化及贝叶斯公式的公理化推导，已有大量的文献。这些结论的其他著名的推导已由赫斯坦和米尔诺（Milnor and Herstein, 1953）、卢斯和雷费（Luce and Raiffa, 1957）、安斯库姆和奥曼（Anscomde and
6 Aumann, 1963），以及普拉特、雷费和施莱弗（Schlaiffer, 1964）等提供；关于这方面的一个一般性综述，可以参见菲什伯恩（Fishburn, 1968）。这里使用的公理主要是从文献中的早期论文里借用来的，而且没有试图让所使用的公理集实现其逻辑上的最少化（实际上，在第1.3节中给出的公理中，有些明显是多余的）。

不确定性下的决策通常是用下述两个模型之一描述的：**概率模型**（probability model）和状态变量模型（state-variable model）。在每一种模型中，我们所说的决策者都是在彩票（lotteries）中进行选择的人，两者的区别仅在于其对彩票的定义不同。在概率模型中，彩票是彩金的概率分布；而在状态变量模型中，彩票是从可能状态集到彩金集的函数。这两个模型各自有其最为合适的应用领域。

概率模型适用于描述彩金依赖于具有明显客观概率的事件这一类的赌博，我们称这样的事件为**客观未知**（objective unknowns）事件。这类赌博有安斯库姆和奥曼（1963）的“轮盘彩票”（roulette lotteries）或奈特（Knight, 1921）的“风险（risks）”等。例如，依赖于掷一枚匀质的硬币、轮盘的自旋，或者从装有同样大小而颜色不同的球的瓮中随机地抽取一个球（各色球的总体已

知）之类的赌博都可以用概率模型充分地描述。这里用到一个重要的假定是，就决策的目的而言，具有相同概率分布的两个客观未知是完全等价的。譬如说，如果用“以各自 1/2 的概率提供 100 美元或 0 美元的彩金”来描述一张彩票，我们假定彩金是由掷一枚匀质的硬币来决定还是由从一个装有 50 个白球和 50 个黑球的瓮中抽取一个球来决定，都是无关紧要的。

另一方面，很多事件不具有明显的概率；一个未来运动赛事的结果或者股票市场未来的行情都是很好的例子。我们称这类事件为**主观未知**（subjective unknowns）事件。安斯库姆和奥曼（1963）的“赛马彩票”（horse lotteries）或奈特（1921）的“不确定性”都相当于是依赖主观未知事件的赌博。这些都更容易用状态变量模型来描述，因为这类模型允许我们描述彩金是如何由不可预见事件决定的，而不必事先对这些事件明确其概率。

概率模型和状态变量模型只是本书所定义彩票的两个特例，即在我们研究的彩票中，其彩金既可依赖于客观未知（它可以直接用概率描述）又可依赖于主观未知（它必须用状态变量描述）。[用菲什伯恩（1970）的术语来说，我们的模型允许存在外来概率（extraneous probabilities）。] 7

现在，让我们给出一些基本的记号。对于任何一个有限集 Z，用 $\Delta(Z)$ 表示集 Z 上的概率分布集，即

$$\Delta(Z) = \left\{ q: Z \to \mathbf{R} \,\middle|\, \sum_{y \in Z} q(y) = 1 \quad \text{且 } q(z) \geqslant 0, \forall z \in \mathbf{Z} \right\} \tag{1.1}$$

（按照常规的集合记号，上述大括号中的“|”表示“使得”）

令 X 表示决策者最终可能获得的**彩金**（prizes）所组成的集；令 Ω 表示可能的**状态**（states）所组成的集，其中之一将是**世界真实状态**（true state of the world）。为了简化数学，我们假定 X 和 Ω 两者都是有限集。我们将彩票定义为某个函数 f，对 X 中的每个彩金 x 和 Ω 中的每个状态 t，f 都给出一个非负实数 $f(x|t)$，使得对 Ω 中的每个 t 都有 $\sum_{x \in X} f(x|t) = 1$。令 L 表示所有这样的彩票所组成的集合，就是

$$L = \{ f: \Omega \to \Delta(X) \}$$

对 Ω 中的任一状态 t 和 L 中的任一彩票 f，$f(\cdot|t)$ 表示在状态 t 下由 f 确定的 X 上的概率分布，即

$$f(\cdot|t) = \{ f(x|t) \}_{x \in X} \in \Delta(X)$$

这里的每个数 $f(x|t)$ 都可以被理解为：若 t 是世界真实状态，则由彩票 f 得到彩金 x 的客观条件概率是 $f(x|t)$（按照常规的概率表示记号，小括号中的“|”表示“给定”）。为使这种解释合乎情理，状态必须被定义得足够地广泛，以致于包括所有可能影响到彩金获得的主观未知事件。从而，一旦确定了状态，余下的只是客观概率，而对于任何一个规范界定的赌博而言，其可能

彩金集上的客观概率分布总是可以被计算出来的。因此，我们对彩票的规范定义，可用于表示任何一个彩金既依赖于客观未知事件又依赖主观未知事件的赌博。

我们所说的**彩金**（prize）可以是任何的商品组合或资源配置。我们假定，定义 X 中的彩金时已经使得这些彩金是互不相同的，且穷尽了决策者各种决策的可能结果。更进一步，我们假定 X 中的一个彩金表示了决策者在由其决策导致的局势中他所关心的各方面的一个完备描述。因而，给定决策者关于世界真实状态的任一信息，他应该能给出其在彩票集上的偏好序。

8

决策者关于世界真实状态可能拥有的信息可以用一个**事件**（event）来描述，每个事件都是 Ω 的一个非空子集。我们用 Ξ 表示所有事件组成的集，则

$$\Xi=\{S\mid S\subseteq\Omega \quad 且 \quad S\neq\varnothing\}$$

对于 L 中的任意两个彩票 f 和 g，以及 Ξ 中的任一事件 S，当且仅当，如果决策者知道了世界真实状态在 S 中，则对他来说，f 至少是和 g 一样的理想选择的时候，我们才写作 $f\gtrsim_S g$。这就是说，当且仅当决策者在只知道事件 S 已经发生而又必须在 f 和 g 之间择其一时，选择了彩票 f，才有 $f\gtrsim_S g$。给定这个关系（$\gtrsim_S$），我们可以定义关系（$>_S$）和（$\sim_S$）为

$$f\sim_S g \quad 当且仅当 \quad f\gtrsim_S g \quad 且 \quad g\gtrsim_S f$$
$$f>_S g \quad 当且仅当 \quad f\gtrsim_S g \quad 且 \quad g\not\sim_S f$$

这就是说，$f\sim_S g$ 意味着，如果决策者在知道 S 后又必须在 f 与 g 之间进行选择时，他将感到二者之间毫无差异；而 $f>_S g$ 则意味着在同样的情况下，他严格地偏好于 f。

我们可以用$\gtrsim$、$>$、$\sim$相应地代替$\gtrsim_\Omega$、$>_\Omega$、$\sim_\Omega$，即 Ω 的某个状态被观察排除之前没有谈到条件事件时，假定彩票集上的偏好是先验偏好。

值得注意的是，这里假定了决策者在 Ξ 中任何可能事件发生的条件下都在彩票集上具有定义完善的偏好。在决策理论的一些论述中，一个决策者的条件偏好是在做任何观察之前由他所确定的先验偏好（用贝叶斯公式）推导而来的，但是，这种推导不能在先验概率为 0 的事件下给出彩票的优劣关系。在博弈论的领域内，这一疏漏并不像看上去那样无关紧要。克雷普斯（Kreps）和威尔逊（Wilson，1982）已经证明，一个理性决策者在观察到零概率事件后的信念和偏好特征对分析一个博弈可能会起到至关重要的作用。

对于满足 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 的任意一个数 α 和 L 中任意两个彩票 f 与 g，$\alpha f+(1-\alpha)g$ 表示了 L 中这样的彩票，使得

9

$$[\alpha f+(1-\alpha)g](x\mid t)=\alpha f(x\mid t)+(1-\alpha)g(x\mid t),\quad \forall x\in X,\forall t\in\Omega$$

为了解释这一定义，考虑从一个瓮中取一个球，瓮中黑球的比例是 α，白球的比例是 $(1-\alpha)$。设想若取出的是黑球，则决策者赌 f；而若取出的是白球，

则这个决策者将赌 g。于是，如果 t 是真实状态，该决策者最终得到彩金 x 的概率是 $\alpha f(x|t)+(1-\alpha)g(x|t)$。因而，$\alpha f+(1-\alpha)g$ 表示这个基于 f 和 g 并按照这个随机的彩票选择过程而生成的复合彩票。

对任一彩金 x，我们令 $[x]$ 表示一个总是肯定给出彩金 x 的彩票。即，对每个状态 t 有

$$[x](y|t)=1 \quad 若 \quad y=x, \quad [x](y|t)=0 \quad 若 \quad y\neq x \tag{1.2}$$

因而，$\alpha[x]+(1-\alpha)[y]$ 表示分别以概率 α 和 $(1-\alpha)$ 给出彩金 x 或彩金 y 的彩票。

1.3　公理系

一个理性决策者的偏好所应满足的一些基本性质可以用一组公理表示。除非另有说明，对于 L 中的彩票 e、f、g 和 h 等全部、Ξ 中的事件 S 和 T 及介于 0 与 1 之间的数 α 和 β，这些公理都是成立的。

公理 1.1A 和 1.1B 断定了偏好在彩票集上构成完备的传递序。

公理 1.1A（完备性）　$f\gtrsim_S g$ 或者 $g\gtrsim_S f$

公理 1.1B（传递性）　如果 $f\gtrsim_S g$ 且 $g\gtrsim_S h$，则 $f\gtrsim_S h$

易于验证，公理 1.1B 还暗含了一些其他的传递序的结论，诸如：若 $f\sim_S g$ 且 $g\sim_S h$，则有 $f\sim_S h$；若 $f>_S g$ 且 $g\gtrsim_S h$，则有 $f>_S h$ 等。

公理 1.2 断言，只有可能状态才是与决策者相关的，因此，给定事件 S，对于只在 S 以外的状态有所不同的两个彩票对决策者而言将是无差异的。

公理 1.2（相关性）　若 $f(\cdot|t)=g(\cdot|t)$ $\forall t\in S$，则 $f\sim_S g$

公理 1.3 肯定地认为，得到一个较好的彩票的概率总是越高越好。

公理1.3（单调性）　若 $f>_S h$ 且 $0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1$，则 $\alpha f+(1-\alpha)h>_S\beta f+(1-\beta)h$

基于公理 1.3，公理 1.4 断言 $\gamma f+(1-\gamma)h$ 总是随着 γ 的增大而连续地变得越来越好，因此，对偏好次序介于 f 和 h 之间的任一彩票，总存在某个由 f 和 h 随机化产生的一个复合彩票与之一样好。

公理1.4（连续性）　若 $f\gtrsim_S g$ 且 $g\gtrsim_S h$，则存在某个数 γ，使得 $0\leqslant\gamma\leqslant 1$ 且 $g\sim_S\gamma f+(1-\gamma)h$

替代性公理（也被称为独立性公理或肯定性公理）在下述意义上或许是公

10

理系中最重要的一个：即使没有其他的公理，替代性公理也能对决策者偏好应具有的性质产生很强的限制。它们也应该是很直观的公理。这些公理表达了这样的思想，即如果决策者必须在两个选择中取其一，又存在两个互斥事件且其中之一必然发生，而他在每个事件下都偏好于第一个选择，那么，在知道哪个事件发生之前，他一定偏好于第一个选择（否则，他将表现出一种偏好，按照这种偏好，必然存在某个事件使得他在知道该事件是真实的之后，他肯定想颠倒偏好顺序而偏好于第二个选择）。在公理 1.5A 和 1.5B 中，事件是用随机的彩票选择过程而客观随机化的，如前一节所讨论的那样；而在公理 1.6A 和 1.6B 中，事件是主观未知事件，即是 Ω 的非空子集。

公理1.5A（客观替代性） 若 $e \gtrsim_S f$，$g \gtrsim_S h$ 且 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，则 $\alpha e + (1-\alpha) g \gtrsim_S \alpha f + (1-\alpha) h$

公理1.5B（严格的客观替代性） 若 $e >_S f$，$g \gtrsim_S h$ 且 $0 < \alpha \leqslant 1$，则 $\alpha e + (1-\alpha) g >_S \alpha f + (1-\alpha) h$

公理1.6A（主观替代性） 若 $f \gtrsim_S g$，$f \gtrsim_T g$ 且 $S \cap T = \varnothing$，则 $f \gtrsim_{S \cup T} g$

公理1.6B（严格的主观替代性） 若 $f >_S g$，$f >_T g$ 且 $S \cap T = \varnothing$，则 $f >_{S \cup T} g$

11 为了充分地了解替代性公理的重要性，考虑一下在决策理论中，当我们试图去掉它们所引起的困难或许是有帮助的。作为一个简单的例子，设想一个人偏好 x 胜于 y，但他又偏好 $.5[y] + .5[z]$ 胜于 $.5[x] + .5[z]$，从而违背了替代性公理。再假设 w 是他认为好于 $.5[x] + .5[z]$ 而又坏于 $.5[y] + .5[z]$ 的某个彩金，即

$$x > y \quad \text{但} \quad .5[y] + .5[z] > [w] > .5[x] + .5[z]$$

现在考虑下述局势：决策者必须首先决定是否接受彩金 w。若他不要彩金 w，那就掷一枚硬币，如果正面朝上他将获得彩金 z，而当反面朝上时他将在彩金 x 与 y 之间选择其一。

这个决策者应该怎样做呢？他有三个可能的决策策略：(1) 接受 w，(2) 拒绝 w，但若硬币反面朝上时选择 x，(3) 拒绝 w，但若硬币反面朝上时选择 y。如果他采用第一个策略，则他获得彩票 w；如果他采用第二个策略，则他获得彩票 $.5[x] + .5[z]$；如果他采用第三个策略则他获得彩票 $.5[y] + .5[z]$。由于他在这三个彩票中最喜欢 $.5[y] + .5[z]$，故第三个策略对他来说是最好的，所以他应该拒绝 w。然而，如果他拒绝了 w，而且硬币出现了反面朝上的情况，则他的偏好规定，他应该选择 x 而不是 y。因此，如果他拒绝 w，实际上，当正面朝上时将以 z 结束，而当反面朝上时以 x 结束，

但这个彩票 $.5\,[x]+.5\,[z]$ 坏于 w，从而他一开始就应该接受 w，这就得出了矛盾。

因此，如果我们在没有替代性公理的情况下谈论“理性的”决策，那我们必须明确理性的决策者能否保证自己采用其随后就想改变的策略（如果能，在本例中“理性的”行为将导致 $.5\,[y]+.5\,[z]$）。如果他们不能做出这样的承诺，那我们也必须明确他们是能预见他们未来行为的不一致（此种情况下，本例的结果应该是 $[w]$）还是不能预见（此种情况下，本例的结果应该是 $.5\,[x]+.5\,[z]$）。如果这些假定看起来没有一个是合情合理的，那么为了避免这种困境，我们必须接受替代性公理作为我们对理性所下定义的一部分。

公理 1.7 要求决策者绝不会对所有的彩金都是无差异的。这个公理只是一个正则性条件以保证在每个状态下都会多少有点利害关系发生。 12

公理1.7（利害性）　对于 Ω 中的每个状态 t，X 中都存在彩金 y 和 z，使得 $[y]\succ_{|t|}[z]$

有没有公理 1.8，我们只是在表述我们的主要结论时在形式上有所不同，并不影响这些主要结论的成立与否，在这种意义上，它对于我们的分析而言是可要可不要的。公理 1.8 断言，决策者在世界所有状态下对客观赌博总是具有相同的偏好序。如果这个公理不成立，那是因为同样的彩金在不同的状态下可以有不同的评价值。

公理1.8（状态中性）　对于 Ω 中的任意两个状态 r 和 t，若 $f(\cdot|r)=f(\cdot|t)$ 且 $g(\cdot|r)=g(\cdot|t)$，又有 $f\succsim_{|r|}g$，则 $f\succsim_{|t|}g$

1.4　期望效用最大化定理

Ω 上的一个**条件概率函数**（conditional-probability function）是任何一个这样的函数 $p:\Xi\to\Delta(\Omega)$，它能对 Ω 中的每个状态 t 和每个事件 S 都具体指定非负的条件概率 $p(t|S)$，且使得

$$p(t\mid S)=0 \quad \text{若} \quad t\notin S, \quad \text{且} \quad \sum_{r\in S}p(r\mid S)=1$$

给定任一这样的条件概率函数，我们可以写

$$p(R\mid S)=\sum_{r\in R}p(r\mid S),\ \forall R\subseteq S,\ \forall S\in\Xi$$

一个**效用函数**（utility function）可以是从 $X\times\Omega$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的任一函数。对于效用函数 $u:X\times\Omega\to\mathbf{R}$，当且仅当它实际上不依赖于状态，于是就存在某个函数 $U:X\to\mathbf{R}$ 使得对所有的 x 和 t 都有 $u(x|t)=U(x)$ 时，u 才被称为是

状态独立（state independent）的。

给定任一这样的条件概率函数 p 和任一效用函数 u，再给定 L 中的任一彩票 f 和 Ξ 中的任一事件 S，令 $E_p(u(f)\mid S)$ 表示当 $p(\cdot\mid S)$ 为世界真实状态的概率分布时，由 f 所决定的彩金的期望效用值，即

$$E_p(u(f)\mid S)=\sum_{t\in S}p(t\mid S)\sum_{x\in X}u(x,t)f(x\mid t)$$

定理1.1　公理 1.1AB、1.2、1.3、1.4、1.5AB、1.6AB 和 1.7 同时满足的充要条件是存在一个效用函数 $u: X\times\Omega\to\mathbf{R}$ 和一个条件概率函数 $p:\Xi\to\Delta(\Omega)$ 使得

13

$$\max_{x\in X}u(x,t)=1 \quad 且 \quad \min_{x\in X}u(x,t)=0, \qquad \forall t\in\Omega \tag{1.3}$$

$$p(R\mid T)=p(R\mid S)p(S\mid T),\ \forall R,\ \forall S\ 和\ \forall T \quad 使得 \tag{1.4}$$

$$R\subseteq S\subseteq T\subseteq\Omega \quad 且 \quad S\neq\varnothing$$

$$f\gtrsim_S g \quad 当且仅当 \quad E_p(u(f)\mid S)\geqslant E_p(u(g)\mid S) \tag{1.5}$$

$$\forall f,\ g\in L,\ \forall S\in\Xi$$

进一步而言，如果除公理 1.1AB～1.7 之外，同时满足公理 1.8 的充分必要条件是：式（1.3）～（1.5）对一个状态独立的效用函数也成立。

在这个定理中，条件（1.3）是一个规范化条件，它断言，在每个状态下可以选用在 0 与 1 之间取值的效用函数（回顾 X 和 Ω 都被假定为有限集）。条件（1.4）是贝叶斯公式的一个变形，它给出了一个事件下所确定的条件概率是如何与另一个事件下所确定的条件概率相联系的。不过，这个定理最重要的部分是条件（1.5），它断言决策者总是偏好于具有较高期望效用的彩票。由条件（1.5），我们一旦确定了 u 和 p，就可以预测决策在决策局势中的最优选择行为。决策者将利用他由 Ω 中已观察到的事件而形成的主观概率，对他来说，在可供选择的彩票中，挑选那个具有最高的期望效用的彩票。注意到，在 X 和 Ω 都是有限集时，只有有限多个效用和概率值需要被确定。因而，决策者在 L 中无限多个彩票上的偏好可以由有限多个数字完全表征。

为了能在实践中应用这个结论，我们需要一个对所有 x、t 和 S 来确定效用 $u(x,t)$ 和概率 $p(t\mid S)$ 的程序。正如雷费（1968）所强调指出的那样，这样的程序确实存在，它们构成了实际决策分析的基础。为了明确表示这样的一个程序并证明定理 1.1，让我们使用决策者的偏好满足公理 1.1AB～1.7 的假定，从定义一些特殊的彩票开始。

让 a_1 表示一个在每个状态下都给决策者最好彩金的彩票；让 a_0 表示一个在每个状态下都给决策者最差彩金的彩票。即对于每一状态 t 和彩金 y 和 z 都有 $a_1(y\mid t)=1=a_0(z\mid t)$，其中 y 和 z 对 X 中每个 x 都满足 $y\gtrsim_{\mid t\mid}x\gtrsim_{\mid t\mid}z$。这样的最好彩金和最差彩金在每个状态下都能找到，因为偏好关系（$\gtrsim_{\mid t\mid}$）在有

14

限集 X 上构成一个完备的传递序。①

对于 Ξ 中的任一事件 S，令 b_S 表示这样的彩票，它使得

$$b_S(\cdot\,|\,t)=a_1(\cdot\,|\,t) \quad 若 \quad t\in S$$
$$b_S(\cdot\,|\,t)=a_0(\cdot\,|\,t) \quad 若 \quad t\notin S$$

即 b_S 是“赌 S”，如果 S 发生则给出可能的彩金中最好的，否则，给出可能彩金中最坏的。

对于任一彩金 x 和任一状态 t，令 $c_{x,t}$ 表示一个彩票，使得

$$c_{x,t}(\cdot\,|\,r)=[x](\cdot\,|\,r) \quad 若 \quad r=t$$
$$c_{x,t}(\cdot\,|\,r)=a_0(\cdot\,|\,r) \quad 若 \quad r\neq t②$$

即 $c_{x,t}$ 除了在状态 t 给出彩金 x 之外，在其余状态下都是给出最差的彩金。

现在，在给定满足公理 1.1AB~1.7 的偏好后，我们可以定义一个确定满足定理的效用和概率的程序了。对每个 x 和 t，首先问决策者：“如果知道 t 是世界真实状态，你认为怎样的一个数 β 让你感到 $[x]$ 与 $\beta a_1+(1-\beta)a_0$ 之间是无差异的?”由连续性公理知，这样的一个数字一定存在。那么，让 $u(x,\ t)$ 等于他所回答的 β，则

$$[x]\sim_{|t|}u(x,\ t)a_1+(1-u(x,\ t))a_0$$

对每个 t 和 S，再问决策者：“如果知道真实状态在 S 中，你认为怎样的一个数 γ 让你觉得 $b_{|t|}$ 与 $\gamma a_1+(1-\gamma)a_0$ 之间是无差异的?”同样由连续性公理知，这样的数 γ 一定存在（主观替代性公理保证了 $a_1\gtrsim_S b_{|t|}\gtrsim_S a_0$）。令 $p(t\,|\,S)$ 等于他所确定的 γ，则

$$b_{|t|}\sim_S p(t\,|\,S)a_1+(1-p(t\,|\,S))a_0$$

在定理 1.1 的证明中，我们将说明用这种方式定义的 u 和 p 确实满足定理的所有条件。因而，有限多个提问就足以确定那些完全刻划了决策者偏好的概率和效用。

定理 1.1 的证明　设 p 和 u 是如上所构造的。首先从公理系推导出条件 (1.5)。相关性公理和 $u(x,\ t)$ 的定义蕴含着，对于每个状态 r，有

$$c_{x,t}\sim_{|r|}u(x,\ t)b_{|t|}+(1-u(x,\ t))a_0 \qquad 15$$

于是主观替代性公理意味着，对每个事件 S，有

$$c_{x,t}\sim_S u(x,\ t)b_{|t|}+(1-u(x,\ t))a_0$$

公理 1.5A 和 1.5B 一起暗示了 $f\gtrsim_S g$ 当且仅当

---

① 原文只有传递序，不足以成立——译者注。

② 原文误为 $r\notin t$——译者注。

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)f+\left(1-\frac{1}{|\Omega|}\right)a_0 \succsim_S \left(\frac{1}{|\Omega|}\right)g+\left(1-\frac{1}{|\Omega|}\right)a_0$$

（这里，$|\Omega|$表示集合 Ω 中的状态个数）注意到

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)f+\left(1-\frac{1}{|\Omega|}\right)a_0=\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X}f(x\mid t)c_{x,t}$$

但是，通过反复应用客观替代性公理，得到

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X}f(x\mid t)c_{x,t}\\
&\sim_S\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X}f(x\mid t)\Big(u(x,t)b_{|t|}+\{1-u(x,t)\}a_0\Big)\\
&\sim_S\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X}f(x\mid t)\Big\{u(x,t)\Big(p(t\mid S)a_1+\\
&\{1-p(t\mid S)\}a_0\Big)+\{1-u(x,t)\}a_0\Big\}\\
&=\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X}f(x\mid t)u(x,t)p(t\mid S)a_1+\\
&\quad\left(1-\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X}f(x\mid t)u(x,t)p(t\mid S)/|\Omega|\right)a_0\\
&=\Big(E_p\{u(f)\mid S\}/|\Omega|\Big)a_1+\left\{1-\Big(E_p\{u(f)\mid S\}/|\Omega|\Big)\right\}a_0
\end{aligned}$$

类似地有：

$$\begin{aligned}
&(1/|\Omega|)g+(1-(1/|\Omega|))a_0\\
&\quad\sim_S\Big(E_p\{u(g)\mid S\}/|\Omega|\Big)a_1+\left\{1-\Big(E_p\{u(g)\mid S\}/|\Omega|\Big)\right\}a_0
\end{aligned}$$

因此，由传递性，$f\succsim_S g$ 当且仅当

16

$$\begin{aligned}
&\Big(E_p\{u(f)\mid S\}/|\Omega|\Big)a_1+\left\{1-\Big(E_p\{u(f)\mid S\}/|\Omega|\Big)\right\}a_0\\
&\quad\succsim_S\Big(E_p\{u(g)\mid S\}/|\Omega|\Big)a_1+\left\{1-\Big(E_p\{u(g)\mid S\}/|\Omega|\Big)\right\}a_0
\end{aligned}$$

但由单调性，这个最终偏好关系成立，当且仅当

$$E_p\{u(f)\mid S\}\geq E_p\{u(g)\mid S\}$$

因为利害性公理和严格的主观替代性公理保证了 $a_1\succ_S a_0$，于是条件（1.5）是可以满足的。

接着，让我们从公理系中推导出条件（1.4）。对任意事件 R 和 S，由客观替代性公理

$$\left(\frac{1}{|R|}\right)b_R+\left(1-\frac{1}{|R|}\right)a_0=\left(\frac{1}{|R|}\right)\sum_{r\in R}b_{|r|}$$

$$\sim_S\left(\frac{1}{|R|}\right)\sum_{r\in R}\Big(p(r\mid S)a_1+\{1-p(r\mid S)\}a_0\Big)$$

$$=\left(\frac{1}{|R|}\right)\Big(p\ (R|S)\ a_1+\ \{1-p\ (R|S)\}\ a_0\Big)+\left(1-\frac{1}{|R|}\right)a_0$$

（$|R|$是集合 R 中的状态数）那么，应用公理 1.5A 和 1.5B，我们得到

$$b_R\sim_S p(R|S)a_1+\{1-p(R|S)\}a_0$$

由相关性公理和 $b_S\sim_S a_1$，且对于不在 S 中的任何 r 有：$b_{|r|}\sim_S a_0$. 因此，上式（应用单调性和利害性公理）蕴含着，若 $r\notin S$，则 $p(r|S)=0$ 和 $p(S|S)=1$。因此，如前面所定义的那样，p 是条件概率函数。

现在假设 $R\subseteq S\subseteq T$，再利用 $b_S\sim_S a_1$，我们得到

$$b_R\sim_S p(R|S)b_S+\{1-p(R|S)\}\ a_0$$

另外，由于 b_R，b_S 和 a_0 在 S 之外都给出相同的最差彩金，所以相关性公理意味着

$$b_R\sim_{T\setminus S}p(R|S)b_S+\{1-p(R|S)\}a_0$$

（这里，$T\setminus S=\{t\mid t\in T$ 但 $t\notin S\}$）于是，由主观替代性公理和客观替代性公理，

$$b_R\sim_T p(R|S)b_S+\{1-p(R|S)\}a_0$$

$$\sim_T p(R|S)\Big(p(S|T)a_1+\{1-p(S|T)\}a_0\Big)+\{1-p\ (R|S)\}a_0$$

$$=p(R|S)p(S|T)a_1+\{1-p(R|S)p(S|T)\}a_0$$

但 $b_R\sim_T p(R|T)a_1+\{1-p(R|T)\}a_0$，又 $a_1>_T a_0$，于是单调性公理蕴含着 17
$p(R\ T)=p(R|S)p(S|T)$。因此，贝叶斯公式（1.4）从公理系推出。

如果在状态 t 下 y 是最好的彩金而 z 是最差的彩金，则 $[y]\sim_{|t|}a_1$ 和 $[z]\sim_{|t|}a_0$，故由单调性公理知 $u(y|t)=1$ 和 $u(z|t)=0$。因而取值条件（1.3）也是被所构造的效用函数所满足。

如果又给定了状态中性公理，则我们在状态 t 确定 $u(x,\ t)$ 时，决策者所给出的答案与我们在任意另一个状态 r 下确定 $u(x,\ r)$ 时所给出的答案将是相同的（因为 $[x]\sim_{|t|}\beta a_1+(1-\beta)a_0$ 蕴含了 $[x]\sim_{|r|}\beta a_1+(1-\beta)a_0$，且单调性公理和利害性公理保证了其答案的唯一性）。于是，公理 1.8 意味着 u 是状态独立的。

为了完成定理的证明，余下要证的是，满足定理中条件（1.3）～（1.5）的函数 u 和 p 的存在性，是足以让所有公理成立（只有对公理 1.8 的证明而用到状态独立性）的充分条件。如果我们使用期望效用公式的基本数学性质，验证这些公理是轻而易举的。作为说明，我们只给出主观替代性这一个公理的证明，而将其余公理的证明留作读者的练习。

设 $f\gtrsim_S g$ 和 $f\gtrsim_T g$ 且 $S\cap T=\varnothing$，则由条件（1.5）得 $E_p\{u\ (f)\ |S\}\geqslant$

$E_p(u(g)\mid S)$ 和 $E_p(u(f)\mid T)\geqslant E_p(u(g)\mid T)$。但贝叶斯公式 (1.4) 给出

$$\begin{aligned}E_p(u(f))\mid S\cup T) &= \sum_{t\in S\cup T}\sum_{x\in X} p(t\mid S\cup T)\, f(x\mid t)\, u(x,t)\\ &= \sum_{t\in S}\sum_{x\in X} p(t\mid S)\, p(S\mid S\cup T)\, f(x\mid t)\, u(x,t)\\ &\quad + \sum_{t\in T}\sum_{x\in X} p(t\mid T)\, p(T\mid S\cup T)\, f(x\mid t)\, u(x,t)\\ &= p(S\mid S\cup T)\, E_p(u(f)\mid S) + p(T\mid S\cup T)E_p(u(f)\mid S)\end{aligned}$$

和

$$E_p(u(g)\mid S\cup T) = p(S\mid S\cup T)E_p(u(g)\mid S) + p(T\mid S\cup T)E_p(u(g)\mid S)$$

因此　$E_p(u(f)\mid S\cup T)\geqslant E_p(u(g)\mid S\cup T)$ 且 $f\gtrsim_{S\cup T} g$ ■

1.5　等价表示

18

当我们去掉取值条件 (1.3) 后，则可能存在不止一对的效用与条件概率函数，它们在条件 (1.5) 的意义上都表示相同的决策者偏好。从决策理论的性质来说，这样的等价表示是完全不可区别的，因此，对于任何一个要求在这样的等价表示之间加以区别的经济行为理论，我们都应该表示怀疑。于是，能否辨认这样的等价表示在理论上或许有其重要性。

给定任一主观事件 S，当我们说一个效用函数 v 与一个条件概率函数 q 一起表示 (represent) 了偏好序 $\gtrsim_S$ 时，我们的意思是说，对每一对彩票 f 和 g，当且仅当 $f\gtrsim_S g$ 时才有 $E_q(v(f)\mid S)\geqslant E_q(v(g)\mid S)$。

定理 1.2　令 Ξ 中的 S 是任一给定的主观事件。假设决策者的偏好满足公理 1.1AB~1.7，并且 u 和 p 是满足定理 1.1 中 (1.3) ~ (1.5) 式的效用函数和条件概率函数，则 v 与 q 一起表示偏好序 $\gtrsim_S$ 的充分必要条件是：存在正数 A 和函数 B：$S\to\mathbf{R}$ 使得

$$q(t\mid S)v(x,t) = Ap(t\mid S)u(x,t) + B(t),\quad \forall t\in S, \forall x\in X$$

证明　首先假设如定理所描述的 A 和 $B(\cdot)$ 存在，那么，由于 $\sum_{x\in X} f(x\mid t) = 1$，故对任一彩票 f 都有

$$\begin{aligned}E_q(v(f)\mid S) &= \sum_{t\in S}\sum_{x\in X} f(x\mid t)q(t\mid S)v(x,t)\\ &= \sum_{t\in S}\sum_{x\in X} f(x\mid t)\{Ap(t\mid S)u(x,t) + B(t)\}\\ &= A\sum_{t\in S}\sum_{x\in X} f(x\mid t)p(t\mid S)u(x,t) + \sum_{t\in S} B(t)\sum_{x\in X} f(x\mid t)\end{aligned}$$

$$= AE_p(u(f) \mid S) + \sum_{t \in S} B(t)$$

所以，关于 q 的 v - 期望效用是关于 p 的 u - 期望效用的线性增函数，因为 $A>0$。于是，$E_q(v(f)|S) \geqslant E_q(v(g)|S)$，当且仅当 $E_p(u(f)|S) \geqslant E_p(u(g)|S)$，故而 v 与 q 一起表示了和 u 与 p 所表示的同一个彩票集上的偏好顺序。

相反，若 v 与 q 一起表示的偏好序和 u 与 p 一起所示的偏好序相同，则任 19
取一个彩金 x 和一个状态 t，令

$$\lambda = \frac{E_q(v(c_{x,t}) \mid S) - E_q(v(a_0) \mid S)}{E_q(v(a_1) \mid S) - E_q(v(a_0) \mid S)}$$

那么，按照期望值算子的线性特征，得到

$$E_q\Big(v(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_0) \mid S\Big) = E_q(v(a_0) \mid S) + \lambda\Big(E_q(v(a_1) \mid S) - E_q(v(a_0) \mid S)\Big)$$
$$= E_q(v(c_{x,t}) \mid S)$$

因此 $c_{x,t} \sim_S \lambda a_1 + (1-\lambda)a_0$。在定理 1.1 的证明中，我们已经构造了 u 和 p 使得

$$c_{x,t} \sim_S u(x,t)b_{(t)} + [1-u(x,t)]a_0$$
$$\sim_S u(x,t)\Big(p(t \mid S)a_1 + [1-p(t \mid S)]a_0\Big) + [1-u(x,t)]a_0$$
$$\sim_S p(t \mid S)u(x,t)a_1 + [1-p(t \mid S)\ u(x,t)]a_0$$

单调性公理保证了 a_1 与 a_0 之间只有一个随机彩票与 $c_{x,t}$ 恰好一样好，因此

$$\lambda = p(t \mid S)\ u(x,t)$$

但 $c_{x,t}$ 与 a_0 只在状态 t 有所不同，在状态 t 时，$c_{x,t}$ 给出彩金 x 而不是 a_0 所给出的最差彩金，于是

$$E_q(v(c_{x,t}) \mid S) - E_q(v(a_0) \mid S) = q(t \mid S)\Big(v(x,t) - \min_{z \in X} v(z,t)\Big)$$

因此，代回到 λ 的定义中，我们得到

$$p(t \mid S)u(x,t) = \frac{q(t \mid S)\ [v(x,t) - \min_{z \in X} v(z,t)]}{E_q(v(a_1) \mid S) - E_q(v(a_0) \mid S)}$$

现在令

$$A = E_q(v(a_1) \mid S) - E_q(v(a_0) \mid S)$$
$$B_{(t)} = q(t \mid S)\ \min_{z \in X} v(z,t)$$

则有　20

$$Ap(t|S)u(x,t)+B(t)=q(t|S)v(x,t)$$

注意，A 是与 x 和 t 无关的函数，而 $B(t)$ 又是与 x 无关的函数，而且由于 $a_1 \succ_S a_0$ 蕴含着 $E_q[v(a_1)|S] > E_q[v(a_0)|S]$，故 $A>0$ ■

从定理 1.2 显而易见，给定某个事件 S，能用来表示决策者信念的概率分布不止一个。事实上，在定理 1.2 的方程式中，只要我们对 v 做与 q 互反的变动，我们就能使概率分布 $q(\cdot|S)$ 几乎为任意的，而保持该方程式的左边不变。消除这种不定性的办法是假定有公理 1.8，并要求效用函数为状态独立。

定理1.3 令 S 为 Ω 中的任一主观事件。假设决策者的偏好满足公理 1.1AB～1.8，且 u 和 p 分别是满足定理 1.1 中条件 (1.3) ～ (1.5) 的状态独立的效用函数和条件概率函数。若 v 是一个状态独立的效用函数，q 是条件概率函数，且 v 与 q 一起表示了偏好序 $\succeq_S$，则

$$q(t|S)=p(t|S),\quad \forall t\in S$$

并且存在数 A 和 C 使得 $A>0$ 且

$$v(x)=Au(x)+C,\quad \forall x\in X$$

(为简洁起见，这里用 $v(x)$ 和 $u(x)$ 分别代替了 $v(x,t)$ 和 $u(x,t)$，因为 $v(x,t)$ 与 $u(x,t)$ 都是状态独立的函数。)

证明 令 $A=E_q[v(a_1)|S]-E_q[v(a_0)|S]$ 和 $C=\min_{x\in X}v(x)$，则由定理 1.2 的证明，

$$Ap(t|S)u(x)+q(t|S)C=q(t|S)v(x),\quad \forall x\in X,\quad \forall t\in S$$

将这个方程式对 S 中所有的 t 求和，我们得到 $Au(x)+C=v(x)$。然后将此式代回上一方程式，并令 x 是最好的彩金而有 $u(x)=1$，则得到

$$Ap(t|S)+q(t|S)C=Aq(t|S)+q(t|S)C$$

由于 $A>0$，所以 $p(t|S)=q(t|S)$ ■

1.6 贝叶斯条件概率系

21 我们定义有限集 Ω 上的一个**贝叶斯条件概率系** (Bayesian conditional-probability system) [或简称为条件概率系 (conditional-probability system)] 为 Ω 上满足条件 (1.4) (贝叶斯公式) 的任何一个条件概率函数 p。也就是说，如果 p 是 Ω 上的一个贝叶斯条件概率系，则对 Ω 的每一个非空子集 S，$p(\cdot|S)$

都是 Ω 上的一个概率分布，使得 $p(S|S)=1$，且

$$p(R|T)=p(R|S)p(S|T), \quad \forall R\subseteq S, \ \forall T\supseteq S$$

我们用 $\Delta^*(\Omega)$ 表示 Ω 上所有的贝叶斯条件概率系所组成的集合。

对任一有限集 Z，我们用 $\Delta^0(Z)$ 表示 Z 上对 Z 中每个元素都赋予正概率的所有概率分布所组成的集，于是

$$\Delta^0(Z)=\{q\in\Delta(Z) \mid q(z)>0, \quad \forall z\in Z\} \tag{1.6}$$

$\Delta^0(\Omega)$ 中的任何一个概率分布 $\hat{p}$ 都可以由下式生成 $\Delta^*(\Omega)$ 中的一个条件概率系 p：

$$p(t\mid S)=\frac{\hat{p}(t)}{\sum_{r\in S}\hat{p}(r)} \quad 若 \quad t\in S$$

$$p(t\mid S)=0 \quad 若 \quad t\notin S$$

由这种方式从 $\Delta^0(\Omega)$ 中的分布所生成的条件概率系没有包含 $\Delta^*(\Omega)$ 的全部内容，但 $\Delta^*(\Omega)$ 中其余的任何一个贝叶斯条件概率系都可以被表达为由此方式生成的条件概率系的极限。这一事实从下述定理可以得到肯定，定理的证明，参见迈尔森(1986b)。

定理1.4　概率函数 p 是 $\Delta^*(\Omega)$ 中的一个贝叶斯条件概率系的充要条件是，在 $\Delta^0(\Omega)$ 中存在一个概率分布序列 $\{\hat{p}^k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得，对 Ω 的每个非空子集 S 和 Ω 中的每个 t 都有

$$p(t\mid S)=\lim_{k\to\infty}\frac{\hat{p}^k(t)}{\sum_{r\in S}\hat{p}^k(r)} \quad 若 \quad t\in S$$

$$p(t\mid S)=0 \quad 若 \quad t\notin S$$

1.7　贝叶斯模型的局限性

我们已经看到期望效用最大化定理是如何从公理系推导出来的了，而这些 22
公理作为对理性偏好的一个刻划从直觉来看似乎合情合理。因为有了这个结论，数理社会科学家有信心认为，基于期望效用最大化而建立的人类行为数学模型应该有广泛的适用性和重要的意义。本书在很大程度上就是在这种信心激励下的产物。

尽量了解期望效用最大化在实际决策中的适用范围是很重要的。在考虑这个问题时，我们必须记住，任何一个决策模型都可以被描述性地或处方性地使用。这就是说，我们用一个模型去试图描述或预测人们将做什么，或者用一个

模型作为我们自己（或我们的顾客）的决策指南。一个模型预测上的有效性可以用实验或经验数据来检验；但一个决策模型处方上的有效性是难以检验的，我们只能询问了解这个模型的人，若他不依据这个模型做决策，他是否会感到他正在犯一个错误。

从直觉公理系推导出来的期望效用最大化定理 1.1，是期望效用最大化在处方上有效的一种证明，只要这种证明是可能的。尽管也有其他一些决策模型被提出过，但就处方性目的而言，几乎没有一个能挑战期望效用最大化模型的逻辑吸引力。

当然，任何一个决策模型的描述性作用和处方性作用之间都有一种密切的关系。如果一个模型对一个决策者来说是处方上有效的，那么，只有在他犯错误时才会偏离这个模型。人总是要犯错误的，但人又会尽量避免。当一个人已经有充分的时间去弄清楚一个局势并且清楚地思考了它，我们可以预期他将会相对少地犯错误。因此，我们可以预期期望效用最大化在很多局势中是预测上准确的。

然而，决策方面的实验研究已经揭示出了一些系统背离期望效用最大化的行为。[参看阿拉依斯和哈根（Allais and Hagen，1979）；卡尼曼和特弗斯基（Kahneman and Tversky，1979）；卡尼曼、斯洛维克（Slovic）和特弗斯基，1982。] 这一研究导致了一些在描述上可能有更大准确性的新决策模型的提出
23 [参看卡尼曼和特弗斯基，1979；麦奇纳（Machina），1982]。我们在这里讨论3个著名的例子，这些例子，人们看来是常常违背期望效用最大化的：一个是效用函数不适用，一个是主观概率不适用，一个是任何经济模型都不适用。

首先考虑一个著名的悖论，由 M. 阿拉依斯提出（参见阿拉依斯和哈根，1979）。设 $X = \{12, 1, 0\}$（单位为百万美元，本例中下同），且令

$$f_1 = .10\ [12] + .90\ [0]$$
$$f_2 = .11\ [1] + .89\ [0]$$
$$f_3 = [1]$$
$$f_4 = .10\ [12] + .89\ [1] + .01\ [0]$$

许多人表现的偏好为 $f_1 > f_2$ 和 $f_3 > f_4$（回顾没有下标的 $>$ 意味着下标是 Ω）。这些人或许感到1200万美元明显地好于100万美元，所以 f_2 与 f_1 相比，彩金低些的彩票即使中彩概率稍稍高一点也是没有吸引力的。另一方面，它们宁可接受 f_3 中肯定的100万美元，而不愿意接受 f_4，即以1%的概率一无所获作为代价去换取10%将其彩金从100万美元提高到1200万美元的诱惑。

这样的偏好是不能用任何效用函数去解释的，为了证明这一点，注意

$$.5f_1 + .5f_3 = .05\ [12] + .5\ [1] + .45\ [0]$$
$$= .5f_2 + .5f_4$$

因此，共同的偏好 $f_1 > f_2$ 和 $f_3 > f_4$ 一定违反了严格的客观替代性公理。

另外一类悖论引起了对决策理论中主观概率之作用的挑战，最早见于埃尔斯伯格（Ellsberg，1961）的经典论文中。雷费（1968）给出了这类悖论的一个简单例子。令 $X = \{-\$100, \$100\}$，$\Omega = \{A, N\}$，且令

$$b_A(\$100 | A) = 1 = b_A(-\$100 | N)$$
$$b_N(-\$100 | A) = 1 = b_N(\$100 | N)$$

也就是说，b_A 是个 100 美元的赌，如果 A 发生，决策者赢；而 b_N 是决策者赌 N，100 美元，即如果 N 发生，决策者就赢得 100 美元。假设 A 表示美国队将在下一次全明星赛（美国棒球赛事）中获胜这个状态，而 N 表示国家队将在下一次全明星赛中获胜这个状态。（这两个队中间必然有一个队在全明星 24
赛中获胜，因为只有这两个队而且棒球比赛规划不允许出现平局。）

许多对美国棒球赛几乎一无所知的人都表示偏好 $.5[\$100] + .5[-\$100] > b_A$ 和 $.5[\$100] + .5[-\$100] > b_N$。也就是说，他们将严格地偏好通过掷一枚公正的硬币并以 100 美元赌正面朝上胜于以 100 美元赌全明星赛中哪个队会获胜。这样的偏好是不能用 Ω 上任何主观概率分布来解释的。由于 Ω 中至少有一个状态的发生概率必定大于或等于 .5，故赌这个状态下胜队所给出的期望效用一定至少与赌掷一枚公正的硬币所给出的期望效用一样大。从另一种方式也可以看出这一点，注意

$$.50b_A + .50b_N = .5[\$100] + .5[-\$100]$$
$$= .50(.5[\$100] + .50[-\$100] + .50(.5[\$100] + .5[-\$100])$$

故上面所表示的共同偏好一定违反了严格的客观替代性公理。

为了说明构造一个既在预测上准确又在处方上有吸引力的决策模型之困难，卡尼曼和特弗斯基（1982）提出了下述例子。情形 A：你准备观看戏剧表演，为此你已经花 40 美元买了一套票，在你将到剧院之际，突然发觉票从口袋中丢失了，你必须决定是再花 40 美元去另买一套票（还有类似座位的票出售）还是简单地回家。情形 B：你准备到剧院观看演出，票的价格是每套 40 美元，你没有事先买好票，而在临行时放了 40 美元在口袋中，在你将到剧院之际，突然发觉钱从你的口袋中丢失了，你必须决定是用赊帐卡（尚在）买票还是简单地回家。

正如卡尼曼和特弗斯基（1982）所报告的，大多数人都说在情形 A 中他们会简单地回家，但在情形 B 中会买票。然而，在这两种情形的每一种情形中，由两个选择所得到的最后结果都是，一方面观看演出并支出了 80 美元，另一方面没有观看演出而支出了 40 美元。因而，任何一个经济模型，只要它假定在这两种情形中，决策者所关心的所有因素只是货币财富水平和戏剧消费水平，都不可能对这样的行为做出解释。 25

任何一个分析模型的效力总是来自于其简化假设，这些简化假设能使我们将不同的局势视作分析上的等价，而这种简化假设总是值得疑问的。一个能对本例中的普遍行为做出准确预测的模型，一定是在对事件顺序做了详尽描述的基础上对这两种情形加以区分了的，尽管这些事件顺序并没有对结果产生影响。然而，如果将模型用作处方上的目的，做这种区分，将可能减少模型正常的吸引力。(如果一个顾问告诉你，应该在情形 A 与情形 B 中总是采取某种不同的行为，你会怎么想?)

期望效用最大化的解释力可以通过**凸出扰动**（salient perturbations）分析而扩展到对许多貌似矛盾的情形的分析。某给定决策问题的一个扰动就是任何另一个（在某种意义上）与之非常相似的决策问题。对任何一个给定的决策问题，如果实际面临这个决策问题的人很可能会采取其在某个扰动决策问题中一样的行动，我们就说这个扰动是凸出的。当人们发现决策问题难以理解而且扰动情形又与他们通常体验的情形很相像时，这个决策问题的特定扰动可能也是凸出的。如果我们能对个人决策问题的凸出扰动进行预测，那么在这个凸出扰动中最大化他/她期望效用的决策可能会是对其行为的一个准确预测。

举例而言，让我们重新考虑赌美国全明星赛哪个队会获胜的问题。为了让一个决策者在 $\{b_A, b_N, .5[\$100]+.5[-\$100]\}$ 上表达出他的偏好序 $(\gtrsim_\Omega)$，对这个集合中的每一对元素，我们必须问他，如果无增加信息地提供给他，也就是不再给他关于 Ω 中真实状态的任何新的信息，他在这副赌博-选择是将会选择哪一个。换句话说，当我们问他是愿意拿 100 美元去赌美国队获胜还是愿意拿 100 美元去赌抛一枚公正的硬币时，我们假定，提供选项给他的唯一事实不会改变他对全明星赛的信息。然而，人们通常只有在拥有一些特殊信息或信念时才去打赌。因此，对于某个对棒球赛知之甚少的人来说，当有人提供给他的打赌选项中有赌美国队胜这个选择时，这通常是因为对方有信息
26 表明美国队可能会输。在这种情形下，一个去赌全明星赛中某方获胜的机会应该（由贝叶斯公式）让一个对棒球赛一无所知的人降低其对该方获胜的主观概率，因此他可能更愿意去赌一枚公正的硬币。我们可以在受控实验中尽可能无信息地提供赌项，甚至可以告诉实验对象这些赌项是无附加信息地提供的，但这是很不自然的，以致实验对象反而会以为我们只会提供我们认为会输的队给他们赌胜。

1.8 占优

有时决策者发现主观的概率难以确定。这一点在博弈论中特别真实是有根本的理论原因的。在一个博弈局势中，一个决策者所面临的未知环境或“世界状态”可能包括其他人即将做出的决策结果。因此，为了确定他在这个状态空

问上的主观概率分布，决策者必须考虑到他所知道的其他人决策过程的全部信息。从这些其他人也关心他的决策角度而言，他的关于其他人行为的信念至少部分地基于其他人关于他将怎么做的信念。因此，确定其他人行为的主观概率可能要求决策者了解一些由自己的决策过程所产生的预期结果，其中有一部分正是确定自己的主观概率。解决这个貌似悖论的问题正是博弈论讨论的主题，将在本书随后的各章中展开论述。

然而有时候，无论决策者的信念是什么，某些决策选择对他来说都不可能是最优的。在由决策理论转向博弈论之前，本节介绍一些能说明何时这种与概率无关的论断会成立的基本结论。

考虑一个决策者，他具有一个状态依赖（state-dependent）效用函数 $u: X\times\Omega\to\mathbf{R}$ 且能在 X 中选择任何一个 x，即把 X 改成理解为决策者可利用的决策选择集。如果他在 Ω 中每个状态 t 的主观概率是 $p(t)$ [即 $p(t)=p(t|\Omega)$，$\forall t\in\Omega$]，那么，决策者将会从 X 中选择某个特定的 y，其前提是

$$\sum_{t\in\Omega}p(t)u(y,t)\geqslant\sum_{t\in\Omega}p(t)u(x,t),\quad\forall x\in X \tag{1.7}$$

27

凸性是许多数理经济学中出现的集合的一个重要特征。一个向量集是**凸的**(convex)，其充要条件是，对于任意两个向量 p 和 q 以及 0 与 1 之间的任一数字 λ，若 p 和 q 都在这个向量集中，则向量 $\lambda p+(1-\lambda)q$ 也一定在这个集合中。从几何意义上说，凸性意味着连结集合内任意两点的整个线段也都一定包含于此集之中。

定理1.5　*若给定 $u: X\times\Omega\to\mathbf{R}$ 和 X 中的 y，则 $\Delta(\Omega)$ 中使得 y 为最优的所有 p 所组成的集合是个凸集。*

证明　设 y 对决策者拥有信念 p 或者 q 来说都是最优的，令 λ 是 0 与 1 之间的任一数，而 $r=\lambda p+(1-\lambda)q$，那么对 X 中的任意 x 都有

$$\begin{aligned}\sum_{t\in\Omega}r(t)u(y,t)&=\lambda\sum_{t\in\Omega}p(t)u(y,t)+(1-\lambda)\sum_{t\in\Omega}q(t)u(y,t)\\&\geqslant\lambda\sum_{t\in\Omega}p(t)u(x,t)+(1-\lambda)\sum_{t\in\Omega}q(t)u(x,t)\\&=\sum_{t\in\Omega}r(t)u(x,t)\end{aligned}$$

因此，对信念 r 来说 y 是最优的。 ■

举例而言，设 $X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，$\Omega=\{\theta_1,\theta_2\}$，且效用函数 u 如表 1-1 所示。由于只有两个状态，故 $p(\theta_1)=1-p(\theta_2)$。对决策者来说，$\alpha$ 是其最优决策，

表 1-1 状态 θ_1 和 θ_2 的期望效用支付

决策	θ_1	θ_2
α	8	1
β	5	3
γ	4	7

当且仅当下面两个不等式同时被满足：

$$8p(\theta_1)+1[1-p(\theta_1)]\geqslant 5p(\theta_1)+3[1-p(\theta_1)]$$
$$8p(\theta_1)+1[1-p(\theta_1)]\geqslant 4p(\theta_1)+7[1-p(\theta_1)]$$

28 这两个不等式中的第一个断定，从 α 得到的期望效用支付一定要至少和从 β 得到的一样多；第二个不等式断定，从 α 得到的期望效用支付一定要至少和从 γ 得到的一样多。通过简单的代数运算，这两个不等式意味着当 $p(\theta_1)\geqslant 0.6$ 时，α 就是最优的。

类似地，决策 γ 是最优的，当且仅当

$$4p(\theta_1)+7[1-p(\theta_1)]\geqslant 8p(\theta_1)+1[1-p(\theta_1)]$$
$$4p(\theta_1)+7[1-p(\theta_1)]\geqslant 5p(\theta_1)+3[1-p(\theta_1)]$$

并且在 $p(\theta_1)\leqslant 0.6$ 时，这两个不等式是同时满足的。决策 β 是最优的，当且仅当

$$5p(\theta_1)+3[1-p(\theta_1)]\geqslant 8p(\theta_1)+1[1-p(\theta_1)]$$
$$5p(\theta_1)+3[1-p(\theta_1)]\geqslant 4p(\theta_1)+7[1-p(\theta_1)]$$

但没有能同时满足这两个不等式的 $p(\theta_1)$。因此，α 和 γ 都是在某个凸的概率区间上最优的，但 β 为最优的区间是空集。

于是，即使不知道 p，我们也能够断定 β 对决策者而言不可能是最优的决策。这样的一个对任何信念集都不可能是最优的决策称为**强劣的**（strongly dominated）.

识别这样的劣选择或许有助于对决策问题的分析。注意到，若决策者能肯定状态为 θ_1，则 α 是最好的；而若决策者肯定状态为 θ_2，则 γ 是最好的，因此，易于验证，α 和 γ 在这个意义上都不会是劣的。就 β 在支付表的每一列中既不是最好也不是最差的选择这一点来说，β 是一种中间决策。然而，这样的中间决策不一定是劣的。例如，若决策 β 的效用支付在两个状态下都换成 6，则只要 $5/7\geqslant p(\theta_1)\geqslant 1/3$，$\beta$ 就是最优决策。另一方面，若 β 的效用支付在两个状态下都换成 3，则因为选择 γ 总是好于选择 β，所以 β 显然不可能是最优的。

对于上面给出的原支付表而言，有另一种看出 β 是劣选择的方法。假设决策者为了确定其决策而考虑下述随机策略：掷一枚硬币，若正面朝上则选择

α，若反面朝上则选择γ，由于选择α和γ的概率都是 .5，所以这个策略记为 29
.5 [α]+.5 [γ]。若真实状态是θ_1，则这个随机策略给出的期望效用支付为 .5×8+.5×4=6，这好于从β所得到的效用支付 5（回顾一下，由于这些支付都是效用，所以较高的期望值总是更为决策者所喜爱）。若真实状态是θ_2，则这个随机策略给出的期望效用支付为 .5×1+.5×7=4，这好于从β所得到的效用支付 3。因此，无论处于什么状态，从 .5 [α]+.5 [γ] 得到的期望支付总是严格高于从β得到的支付，故可以断言，决策者选择 β 是非理性的，因为无论他关于状态的信念是什么，他从随机策略 .5 [α]+.5 [γ] 得到的期望支付都比从β得到的支付高些。我们可以说，由于随机策略 .5 [α]+.5 [γ]，β成了强劣策略。

一般地，一个**随机策略**（randomized strategy）就是决策选择集 X 上的任一概率分布。通常我们用 $\sigma=(\sigma(x))_{x\in X}$表示这样的一个随机策略，其中 $\sigma(x)$ 表示选取 x 的概率。给定效用函数 $u: X\times\Omega\to\mathbf{R}$，我们说 X 中的一个决策选择 y 因 $\Delta(X)$ 中的一个随机策略 σ 而成为强劣的*，当且仅当

$$\sum_{x\in X}\sigma(x)u(x,t)>u(y,t),\quad \forall t\in\Omega \tag{1.8}$$

也就是说，如果无论在什么状态下，按照期望效用准则，σ 总是严格地好于 y，那么 y 就是由 σ 而为强劣的。

目前，我们已经在两种不同的意义上使用了术语“强劣的”。下述定理肯定了二者之间的等价性。

定理1.6　*若给定 $u: X\times\Omega\to\mathbf{R}$，其中 X 和 Ω 都是非空有限集，且给定 X 中任一 y，则在 $\Delta(X)$ 中存在一个随机策略 σ 使得 y 在条件 (1.8) 的意义上由 σ 为强劣策略的充分必要条件是，在 $\Delta(\Omega)$ 中不存在任何一个概率分布使得 y 在条件 (1.7) 的意义上是最优的。*

此定理的证明稍后在 1.9 节中给出。

定理 1.6 为我们给出了随机策略这一重要概念的第一个应用。然而，值得注意的是，这个结论并没有断言，理性决策者一定要用随机策略，而只是断 30
定，如果我们想证明，不存在关于 Ω 中状态的信念能让 X 中的某特定选择 y 成为最优决策，那我们就应该尽力找到一个在每个状态都好于 y 的随机策略。这样的一个占优随机策略不一定是决策者的最好策略，只是明显地比 y 要好。

X 中的一个决策选择 y 是由 $\Delta(X)$ 中的一个随机策略 σ 为**弱劣的**（weakly dominated），当且仅当

$$\sum_{x\in X}\sigma(x)u(x,t)\geqslant u(y,t),\quad \forall t\in\Omega$$

* 或者译为 y 是被 σ 强占优的——译者注。

并且在 Ω 中至少存在一个状态 s 使得

$$\sum_{x\in X}\sigma(x)u(x,s) > u(y,s)$$

也就是说，如果在任何状态下用 σ 都绝不会差于 y，并且至少在一种可能的状态下 σ 严格地比 y 好，那么 y 是由 σ 而为弱劣的。例如，设 $X=\{\alpha,\beta\}$，$\Omega=\{\theta_1,\theta_2\}$，且 $u(\cdot,\cdot)$ 如表 1-2 所示，在这种情况下，β 是由 α（即 $[\alpha]$，它表示选取 α 的概率为 1 的随机策略）为弱劣的。值得注意的是，如果决策者以概率 1 相信 θ_1 是真实状态，则 β 是最优的（与 α 不分上下）。但是，如果他赋予 θ_2 任何一个正的概率，那他就不会选择 β。这一观察由类似于定理 1.6 的下一定理而得以推广。

表 1-2　　状态 θ_1 和 θ_2 的期望效用支付

决策	θ_1	θ_2
α	5	3
β	5	1

定理1.7　若给定 $u: X\times\Omega\to\mathbf{R}$，其中 X 和 Ω 都是非空的有限集，且给定 X 中的任一 y，则在 $\Delta(X)$ 中存在一个随机策略 σ 使得 y 是由 σ 而为弱劣的充分必要条件是，$\Delta^0(\Omega)$ 中不存在任何一个概率分布使得 y 在条件 (1.7) 的意义上是最优的。（回顾 $\Delta^0(\Omega)$ 是 Ω 上对 Ω 中每一状态都赋予严格正概率的概率分布集。）

31

1.9　占优定理的证明

这里对定理 1.6 和 1.7 的证明使用了线性规划中的对偶定理。有关这一结论的完整推导可以在线性规划方面的任何一本教科书中找到［参见切沃托 (Chvatal, 1983)；或吕恩伯格 (Luenberger, 1984)］。这一定理的叙述在 3.8 节* 中讨论了二人零和博弈之后给出。对线性规划中对偶定理不熟悉的读者应该在阅读过 3.8 节之后，再回头阅读定理 1.6 和 1.7 的证明。

定理 1.6 的证明　考虑以下两个线性规划问题。在第一个问题中，变量是 δ 和 $\{p(t)\}_{t\in\Omega}$：

最小化 δ，其约束为

* 原文误为 3.7 节——译者注。

$$p(s) \geqslant 0, \quad \forall s \in \Omega$$

$$\sum_{t \in \Omega} p(t) \geqslant 1$$

$$-\sum_{t \in \Omega} p(t) \geqslant -1$$

$$\delta + \sum_{t \in \Omega} p(t)[u(y,t) - u(x,t)] \geqslant 0, \quad \forall x \in X$$

在第二个问题中，变量是$(\eta(t))_{t \in \Omega}$，$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 和$(\sigma(x))_{x \in X}$：

最大化　$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$，　其约束为　$\eta \in \mathbf{R}_+^{\Omega}, \varepsilon \in \mathbf{R}_+^2, \sigma \in \mathbf{R}_+^X$

$$\sum_{x \in X} \sigma(x) = 1$$

$$\eta(t) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \sum_{x \in X} \sigma(x)[u(y,t) - u(x,t)] = 0, \quad \forall t \in \Omega$$

（这里 $\mathbf{R}_+$ 表示非负实数集，因此，$\mathbf{R}_+^{\Omega}$ 就是下标集为 Ω 而各个分量均为非负的向量集。）当且仅当第一个问题存在一个使（δ）的最优值小于或等于 0 的解时，才存在使得 y 是最优的某个 p。另一方面，当且仅当第二个问题存在一个使（$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$）的最优值严格大于 0 的解时，才存在某个随机策略 σ 强占优于 y。第二个问题是第一个问题的对偶（参见 3.8 节），并且这两个问题的约束条件都是能够满足的。于是由线性规划的对偶定理可知，这两个问题的最优值必须相等。因而，当且仅当 $\Delta(\Omega)$ 中不存在一个概率分布使 y 是最优选择时，y 是由某个随机策略为强劣的（且两个问题都具有严格正的取值）。 ■

32

定理 1.7 的证明　考虑以下两个线性规划问题。在第一个问题中，变量是 δ 和 $(p(t))_{t \in \Omega}$：

最小化　δ，　其约束为　$p(s) + \delta \geqslant 0, \ \forall s \in \Omega$

$$\sum_{t \in \Omega} p(t) \geqslant -1$$

$$\sum_{t \in \Omega} p(t)[u(y,t) - u(x,t)] \geqslant 0, \quad \forall x \in X$$

在第二个问题中，变量是$(\eta(t))_{t \in \Omega}$，ε，和$(\sigma(x))_{x \in X}$：

最大化　$-\varepsilon$，　其约束为　$\eta \in \mathbf{R}_+^{\Omega}, \varepsilon \geqslant 0, \ \sigma \in \mathbf{R}_+^X$

$$\sum_{t \in \Omega} \eta(t) = 1$$

$$\eta(s) + (-\varepsilon) + \sum_{x \in X} \sigma(x)[u(y,t) - u(x,t)] = 0, \quad \forall s \in \Omega$$

当且仅当第一个问题存在一个使（σ 的）最优值严格小于 0 的解时，$\Delta^0(\Omega)$ 中才存在某个使 y 成为最优选择的 p。另一方面，当且仅当第二个问题存在一个使（$-\varepsilon$ 的）最优值大于或等于 0 的解时，才存在某个随机策略 σ 弱占优于 y（第二个问题的解向量 σ 可以是弱占优于 y 的随机策略的若干正数倍）。第二

个问题是第一个问题的对偶，并且这两个问题的约束条件都是能够满足的。于
33 是由线性规划的对偶定理可知，这两个问题的最优值必须相等。因此，当且仅当 $\Delta^0(\Omega)$ 中不存在一个概率分布使得 y 是最优选择时，y 才是由某个随机策略为弱劣的（且两个问题都有非负值）。 ■

习 题

1.1 设彩金集 X 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个有限子集，而彩金 x 表示给予 x 美元。一个决策者说，如果他知道世界真实状态存在于某个集合 T 中，那么他将弱偏好一个彩票 f 胜于另一个彩票 g（即 $f \gtrsim_T g$），当且仅当

$$\min_{s\in T}\sum_{x\in X} xf(x \mid s) \geqslant \min_{s\in T}\sum_{x\in X} xg(x \mid s)$$

（也就是说，他偏好那种能在最差的可能状态下带给他较高期望支付的彩票。）这个偏好关系违背了公理系的哪一条（如果违背了公理系中某个公理的话）？

1.2 将习题 **1.1** 中的偏好关系改为：$f \gtrsim_T g$ 当且仅当

$$\sum_{s\in T}\min\{x \mid f(x \mid s) > 0\} \geqslant \sum_{s\in T}\min\{x \mid g(x \mid s) > 0\}$$

这个偏好关系又违背了我们的公理系中的哪一条（如果违背了其中某一个公理的话）？

1.3 证明公理 1.1B 蕴含了

若 $f \sim_S g$ 且 $g \sim_S h$，则 $f \sim_S h$；及

若 $f >_S g$ 且 $g \gtrsim_S h$，则 $f >_S h$

1.4 证明公理 1.1A 与 1.5B 一起蕴含了公理 1.1B 和公理 1.3。

1.5 一个决策者表达了其对货币彩票的如下偏好序（单位：美元）

$$\begin{aligned}[600] &> [400] > 0.90\,[600] + 0.10\,[0] \\ &> 0.20\,[600] + 0.80\,[0] \\ &> 0.25\,[400] + 0.75\,[0] > [0]\end{aligned}$$

34 这些偏好与某个状态独立的货币效用相一致吗？如果是，给出一个可以适用的效用函数。如果不是，说明这个偏好序背离了哪个公理。

1.6　考虑一个决策者，他在可能状态集 Ω 上的主观概率分布是 $p=\{p(s)\}_{s\in\Omega}$。我们让他告诉我们，他的主观概率分布，但他可能会撒谎，而说出 $\Delta(\Omega)$ 中他想说的任何一个分布。为了引导他说出决策，我们计划给他某种报酬 $Y(q,\tilde{s})$，这个报酬是他所报告的概率分布 q 和随后将观察到的自然真实状态 $\tilde{s}$ 的一个函数。

a. 设对于 $\Delta(\Omega)$ 中的每个 q 和 Ω 中的每个 s，他对我们所给报酬的效用函数是 $u\{Y(q,s),s\}=q(s)$，则他所报告的 q 是其真正的主观概率分布 p 吗？若不是，他将报告什么？

b. 设对于每个 q 和 s，他对我们所给报酬的效用函数是 $u\{Y(q,s),s\}=\ln\{q(s)\}$。他所报告的 q 是其真正的主观概率分布 p 吗？若不是，他又将报告什么？

1.7　假设效用支付依赖于决策和状态，如表 1-3 所示。令 $\{p(\theta_1),p(\theta_2)\}$ 表示决策者在 $\Omega=\{\theta_1,\theta_2\}$ 上的主观概率分布。

表 1-3　　**状态 θ_1 和 θ_2 的期望效用支付**

决策	θ_1	θ_2
α	15	90
β	B	75
γ	55	40

a. 首先假设 $B=35$。$p(\theta_1)$ 的取值范围是什么时，α 才是最优的？$p(\theta_1)$ 的取值范围是什么时，β 才是最优的？$p(\theta_1)$ 的取值范围是什么时，γ 才是最优的？有没有强劣的决策？如果有，它是由哪个随机策略而为强劣的？

b. 现在假设 $B=20$。$p(\theta_1)$ 的取值范围是什么时，α 才是最优的？$p(\theta_1)$ 的取值范围是什么时，β 才是最优的？$p(\theta_1)$ 的取值范围是什么时，γ 才是最优的？有没有强劣的决策？如果有，它是由哪个随机策略而为强劣的？

c. 对于参数 B 是怎样的取值范围，决策 β 是强劣的？

1.8　假设一个函数 $W:\Delta(\Omega)\to\mathbf{R}$ 满足　35

$$W(p)=\max_{x\in X}\sum_{t\in\Omega}p(t)u(x,t),\quad\forall p\in\Delta(\Omega)$$

证明 W 是一个凸函数，即对 $\Delta(\Omega)$ 中任意 p 和 q，及满足 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 的任一 λ，都有

$$W(\lambda p+(1-\lambda)q)\leqslant\lambda W(p)+(1-\lambda)W(q)$$

1.9 在这个习题中，我们考虑了一些有用的条件，它们足以保证决策者在观察到一个较强的信号后不会去选择（期望效用最大值）较低的最优决策。

假设 X 和 Ω 都是非空有限集，$X\subseteq\mathbf{R}$，$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$，$\Omega_1\subseteq\mathbf{R}$ 和 $\Omega_2\subseteq\mathbf{R}$。决策者具有满足下述性质的效用函数 u：$X\times\Omega\to\mathbf{R}$ 和概率函数 p：$\Omega\to\mathbf{R}$：对于 X 中的每个 x 和 y，Ω_1 中的每个 s_1 和 t_1 及 Ω_2 中的每个 s_2 和 t_2，

$$\begin{aligned}&\text{若 } x>y、s_1\geqslant t_1,\ s_2\geqslant t_2 \text{ 且 } (s_1,\ s_2)\neq(t_1,\ t_2)\\&\quad\text{则 } u(x,s_1,s_2)-u(y,s_1,s_2)>u(x,t_1,t_2)-u(y,t_1,t_2)\\&\text{若 } s_1>t_1 \text{ 且 } s_2>t_2,\ \text{则 } p(s_1,s_2)p(t_1,t_2)\geqslant p(s_1,t_2)p(t_1,s_2)\\&\quad p(s_1,\ s_2)>0\end{aligned}$$

u 所满足的条件表明，X 中元素的增加所带来的净收益是随着 Ω 中各分量的增加而增加的［即 u 具有**递增的差额**（increasing differences）］。由贝叶斯公式，如果决策者观察到世界真实状态的第二个分量是 s_2，则他对真实状态未知的第一个分量为 s_1 这个事件所赋予的条件概率是

$$p(s_1\mid s_2)=\frac{p(s_1,s_2)}{\sum_{r_1\in\Omega}p(r_1,s_2)}$$

a. 证明：若 $s_1>t_1$ 且 $s_2>t_2$，则 $p(s_1|s_2)/p(t_1|s_2)\geqslant p(s_1|t_2)/p(t_1|t_2)$［这被称为**单调似然比性质**（monotone likelihood ratio property）。参见米尔格龙（Milgrom，1981）；及米尔格龙和韦伯（Weber，1982）。］

b. 假设对于决策而言，如果他观察到真实状态的第二个分量是 s_2 时，y 是其最优决策，而如果他观察到真实状态的第二个分量是 t_2 时，其最优决策为 x，即

36

$$\sum_{r_1\in\Omega_1}p(r_1\mid s_2)u(y,r_1,s_2)=\max_{z\in X}\sum_{r_1\in\Omega_1}p(r_1\mid s_2)u(z,r_1,s_2)$$

$$\sum_{r_1\in\Omega_1}p(r_1\mid t_2)u(x,r_1,t_2)=\max_{z\in X}\sum_{r_1\in\Omega_1}p(r_1\mid t_2)u(z,r_1,t_2)$$

证明：若 $s_2>t_2$，则 $y\geqslant x$。

2

基本模型

2.1 展开型博弈

对任何一个博弈或冲突局势的分析都必须从描述该博弈的一个模型的特性 37
出发。因而，我们必须细致地考虑通常用来描述博弈的模型的一般形式或结构。一个过于简单的模型结构可能迫使我们忽略实际博弈中我们想去研究的重要因素，而一个过于复杂的模型结构则可能使简单问题变得模糊而让我们的分析难以进行。为了避免这两种极端情况，有几个常规的形式被用于博弈的表示，其中最重要的就是**展开**（extensive）型和**策略**（strategic）[或**正规**（normal）]型。展开型是描述博弈局势最富于结构的一种方式。现已在博弈论方面大多数文献中标准化的展开型的定义，乃源于库恩（Kuhn，1953），他修改了冯·诺依曼和摩根斯特恩（1944）所使用过的早期定义（也可参见克雷普斯和威尔逊对展开型的另一个定义，1982）。策略型及其推广——**贝叶斯**（Bayesian）型在概念上相对简单，对于一般分析的目的而言也更为方便，只是被普遍地认为是由展开型引伸而得来的。

为了引入展开型，让我们考虑一个两人玩的简单摊牌游戏，这两个人被称为“局中人1”和“局中人2”。（贯穿全书，我们遵循奇数编号的局中人为男性而偶数编号的局中人为女性之约定。当局中人被认为是变量和性别不确定时，一般用男性的代词表示。）

在博弈开始时，局中人1和2各放1美元在一只罐中。然后，局中人1从 38
洗好的一副牌中抽取一张牌，且这副牌中有一半红色牌（方块和红心）和一半黑色牌（草花和黑桃）。局中人1私下看看这张牌后决定是加注还是摊牌。如果局中人1摊牌，那他就把这张牌给局中人2看，游戏也就结束，此时若牌是红色，则局中人1得到罐中的钱；若牌是黑色，则局中人2得到罐中的钱。如果局中人1决定加注，那么他就再放1美元到罐中，并轮到局中人2必须决定是对抗还是放弃。若局中人2决定放弃，则游戏结束，且局中人1取走罐中的钱。若局中人2决定对抗，则她必须也再放一美元在罐中，局中人1将牌摊给她看，游戏结束。此时，若牌是红色，则局中人1得到罐中的钱；若牌是黑色，则局中人2得到罐中的钱。

图 2·1 是一个树图，它表示了这个摊牌博弈中所有可能发生的可能事件。这棵树是由一个**枝**（branches）（或线段）集组成，每个枝连接着两个称之为**结点**（nodes）的点。树中最左端的结点是树的**根**（root），它表示博弈的开始。树中有六个结点向右没有另外的枝继于其后，这类结点被称为**终结点**（terminal nodes），并表示这个博弈可能结束的可能方式。博弈中可能发生的每一可能的事件序列都用一个从根到这些终结点之一的一条由枝形成的路径来表示。当这个博弈实际地进行时，由将发生的实际的事件序列所表示的路径被称为**局路径**（path of play）。博弈论分析的目标就是试图去预测这条局路径。

39

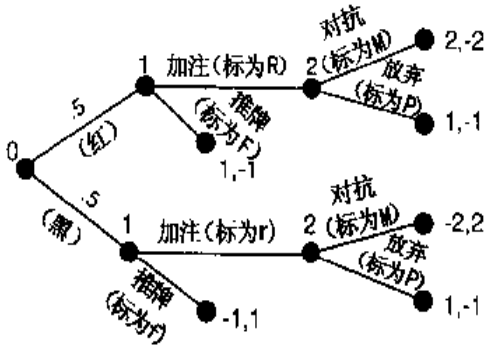

图 2·1

在图 2·1 的每个终结点处都给出了一对数字，用以表示如果局路径在该终结点结束，局中人 1 和 2 将分别得到的支付。例如，一个可能的事件序列是，局中人 1 抽到一张红色牌，他加注且局中人 2 对抗。此时，局中人 1 将得到支付 +2，而局中人 2 得到的支付将是 −2。这个事件序列在图 2·1 中是用从根到右边最高终结点的路径表示的，且在此终结点处指出了支付向量（2，−2）。另一个可能的事件序列是，局中人可能抽到一张黑牌，然后摊牌。这个序列在图 2·1 中是用从根到靠近树图中部的最底端终结点的路径表示的，此处局中人 1 得到的支付是 −1，而局中人 2 得到的支付是 +1。

在向右继有多于一枝的非终结点处，这些后继的枝表示可供选择的事件，其中最多只有一个能够发生。决定这些可供选择事件中哪一个将会发生，要么受控于一个局中人，要么受制于机会。如果事件由机会决定，那我们就给这个结点一个标号“0”，即是说，一个具有标号“0”的非终结点是**机会结点**（chance node），机会结点在局路径中的下一枝将由某种随机机制按照机会结点后继枝上所示的概率而决定。在图 2·1 中，根具有标号“0”，这是因为局中人 1 所取牌的颜色是由机会决定的（局中人 1 不到抽出牌后是不能看他的牌的）。根后继两枝，每枝都有概率 0.5，这是因为这些牌中有一半红色和一半黑色。一个标号不为 0 的非终结点是一个**决策结点**（decision node），从它引出的局路径中的下一枝是由被标号命名的局中人所决定的。在抽取了他的牌后，局中人 1 决定是加注还是摊牌，因此，紧随着根的两个结点由局中人 1 控制并具有标号“1”。

不过，图 2·1 **不是**我们简单摊牌博弈的一个尽如人意的表述。在图 2·1 中，我们没有在任何地方标示了这样一个关键事实，即局中人 1 知道牌的颜色，而局中人 2 不知道牌的颜色。如果你只看了图 2·1，你可能会预料：如果 1 握有红色牌而加注时 2 将放弃（因为那时她将偏好支付 −1 胜于 −2）；但如

果 1 握一张黑色牌而加注时，2 将对抗（因为那时她将偏好支付 2 胜于 - 1）。然而，在这两个结点处 2 的预期行为必须相同，因为她在对抗与放弃之间做出选择之际，并不知道 1 手中牌的颜色。另一方面，局中人 1 可以计划在持有一张红色牌时加注而在持有一张黑色牌时摊牌，因为他能区分他所控制的这两个结点。为了在这个博弈中标出每个局中人在他或她行动时的信息，我们需要把 40
这个树图扩充如图 2·2 所示。

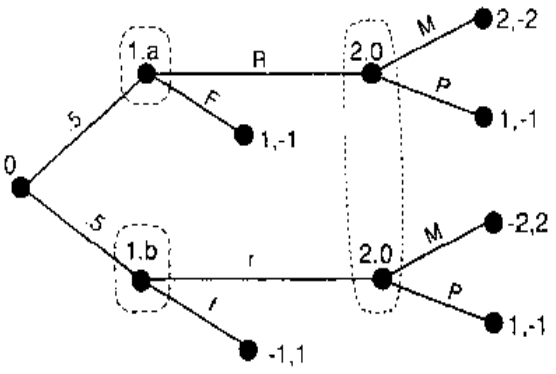

图 2·2

在图 2·2 中，每个决策结点具有两个标号，它们是用小数点隔开的。在小数点的左边，我们写上**局中人标号**（player label），用以表示控制该结点的局中人名称；而在小数点的右边，我们写上**信息标号**（information label），用以标出这个局中人在该结点行动时他或她的**信息状态**（information state）。因此，标号“1.a”标示了局中人 1 在信息状态“a”行动的一个结点；而标号“2.0”标示了局中人 2 在信息状态“0”行动的一个结点。为各种信息状态命名所用的字母和数字可以是相当随意的。在图 2·2 中，1 的信息状态“a”是其持有一张红色牌的状态，1 的信息状态“b”是其持有一张黑色牌的状态，而 2 的信息状态“0”是其知道 1 已经加了注的状态。信息标号的唯一重要之处在于它标出了那些由某个局中人控制但不能加以区分的结点集。所以，由于局中人 1 的结点有不同的信息标号，而局中人 2 的结点有相同的信息标号，故图 2·2 的读者知道，局中人 1 在他行动时能够区分他的两个结点，而局中人 2 在她行动时不能区分她的两个结点。为了强调那些不能被区分的结点的集合，我们还可以将每个具有相同的局中人标号和信息标号的结点集用虚线圈起来。

图 2·2 是用展开型表示我们简单摊牌博弈的一个完整描述。值得指出的是，在图 2·1 中机会结点后面的枝上标有的“红”和“黑”两个标记在图 2·2 41
中都被省略了，但其他枝上的标记都保留了下来。不难看出，将局中人 1 置于致胜位置的实际牌色对分析这个博弈而言是无关紧要的，因此，我们不必在表示机会事件的枝上加以标记。然而，在表示局中人决策的枝上的**行动标号**（move labels）却是描述这个博弈的一个实质部分。

在不知道他或她在其中所必须选择的项是什么的情况下，一个人是不可能做出有意义的选择的。因此，当局中人 2 在不知道自己处在哪个结点上的情况下做出决策时，她不可能选择某一特定的枝。她所必须实际选择的只是一个**行动**（move）：“对抗”或者“放弃”；并且局路径中的下一枝将是当前结点后具有这个行动标号的那个枝。为了保证一个局中人在博弈的每一点上总是知道可

供他或她利用的选项，如果两个结点是在相同的信息状态下被同一局中人所控制，那么两个结点后继的行动标号集必须是相同的。例如，跟随 2 的上结点的枝上的行动标号集必须与跟随 2 的下结点的枝上的行动标号集相同。（如果我们在她的下结点上增加标记为“反加注”的第三枝而对其上结点未做相应的增加，这将意味着，当且仅当局中人 1 有一张黑色牌时，局中人 2 才可以反加注，但是，在她不知道局中人 1 所持牌的颜色而无从知道这个选择项是否存在之际，她又何以实施这个选项呢？为了得到一个有意义的博弈，我们将不得不在 2 的两个决策点处都包含“试试反加注”这一枝，只要这两个结点具有相同的信息标号。）另一方面，跟随结点“1. a”的枝上的行动标号与跟随结点“1. b”的枝上的行动标号不必保持一致，这是因为局中人 1 能够区分这两个结点。假如行动标号不是一一对应，局中人 1 将仍然知道他的选项是什么，因为他（通过看牌的颜色而）知道他处在哪个结点上。

因为对于具有信息标号相同的两个或两个以上的结点的局中人来说，其选择的真正对象是行动，所以对枝指定行动标号的方式是非常重要的。这个博弈的趣味性来自这样一个事实，即对 2 来说，在其上结点选择放弃是较好策略，在其下结点选择对抗是较好策略，但问题在于当她决定是对抗还是放弃之际，她并不知道自己正处在局路径的哪个结点上。另一方面，如果我们交换一下局中人 2 在其上结点的两个行动标号，而保持图 2·2 中其余一切不变，那么，所得到的博弈就彻底不同了。如此修改后的树图将表示一个非常没有趣味的博弈，其中的局中人 2 显然会选择对抗，因为对抗将使她从红色牌中得到 1 的
42 支付，而从黑色牌中得到 +2 的支付，然而放弃只能使她从红色牌中得到 −2 的支付，而从黑色牌中得到 −1 的支付。

为了给出展开型博弈严格的一般定义，我们需要用更准确的术语。按照数学上图论的语言，一个**图**（graph）是由一个有限的结点（或点）集与一个枝集一起构成的，每个枝连接一对结点。从集合论上讲，一个枝也可以与其所连接的两结点所构成的集合等同。一条**路径**（path）就是形如

$$\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\cdots,\{x_{m-1},x_m\}\}=\{\{x_k,x_{k+1}\},k=1,2,\cdots,m-1\}$$

的一个枝集，其中 $m\geqslant 2$ 且每个 x_k 是图中不同的结点。我们可以说这样的一个路径**连接**（connects）结点 x_1 与 x_m。**树**（tree）就是这样的一个图，其中每对结点有且仅有一条该图中的枝路径相连。一个**根树**（rooted tree）又是这样的一个树，其中有一特定的结点被规定为此树的**根**（root）。在本书中，总是把根表示在树图的最左端。当我们说到一个给定结点的**路径**（path）时，我们指的是连接这个结点与根的唯一路径。根树的某个结点处的一个**选择**（alternative）是指连接此结点与另一结点的枝，但这个枝不能在到该结点的路径上。一个结点或枝 x **跟随**（follows）另一个结点或枝 y，当且仅当 y 处在到 x 的路径中。一个结点 x **直接跟随**（immediately follows）一个结点 y，当且仅当 x

跟随y，并且y处有一个选择连接了x与y。根树的一个**终结点**（terminal node）就是一个没有任何选择跟随的结点。

对于任一正整数n，一个**n人展开型博弈**（n-person extensive-form game）Γ^e是对每个结点和每个枝都规定标号的一棵根树，且满足下列5个条件：

1. 每个非终结点有集$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$中的一个**局中人标号**（player label）。局中人标号为0的结点称为**机会结点**（chance nodes）。集合$\{1, 2, \cdots, n\}$表示这个博弈的局中人集，并且对此集中的每个i，具有局中人标号i的结点都是被局中人i所控制的**决策结点**（decision notes）。

2. 机会结点处的每个选择具有一个规定其概率的标记。在每个机会结点，这些选择的**机会概率**（chance probabilities）都是非负数，且其和为1。

3. 一个局中人所控制的每个结点都有第二个标号，这个标号规定了局路径到达这个结点时该局中人将拥有的**信息状态**（information state）。当局路径到达某局中人所控制的一个结点时，该局中人只知道当前结点的信息状态。也就是说，属于同一局中人的两个结点具有相同信息状态的充分必要条件是，当这两个结点中任何一个在博弈进行中发生时，此局中人不可能对这两个结点所表示的局势加以区分。在本书的记号中，任何一个结点上的局中人标号与信息标号之间是用小数点间隔开的，其左边是局中人标号，其右边是信息（状态）标号，因此"$i.k$"表示的结点是决策者i以信息状态k行动的一个结点。 43

4. 被一个局中人所控制的一个结点，其每个选择都具有一个**行动标号**（move label）。进一步说，对于任意两个具有相同的局中人标号和信息标号的结点x和y，以及对于结点x处的任何一个选择，在y处一定有且仅有一个与此选择具有相同行动标号的选择。

5. 在每个终结点，都有一个指定n个实数的n维向量$(u_1, \cdots, u_n) = (u_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$的标记。对于每个局中人$i$，当此终结点是博弈的结果时，数$u_i$是局中人$i$以某种效用尺度度量的**支付**（payoff）。

一般地，我们假定展开型博弈满足一个被称为**完美记忆**（perfect recall）的附加条件。这个条件断定，只要决策者一行动，他就会记起在此博弈中他先前知道的全部信息，包括他自己过去的所有行动。这个完美记忆的假定可以被正式地定义如下。

6. 对于任何一个局中人i及其控制的任意三个结点x、y和z，以及x处的任一选择b，如果y和z具有相同的信息状态且y跟随x和b，那么就存在某个结点w及其某个选择c使得z跟随着w和c，局中人i控制着w，w与x具有相同的信息状态，而且c具有与b相同的行动标号（当然有可能是$w = x$和$c = b$）。也就是说，如果两个决策结点y和z对决策者i来说是不可区分的，那么，对于i在y所能记起的任何一个过去的决策结点和行动，他在z也一定有一个与之不可区分的决策结点和行动被记起。（作为一个不具有完美记忆博弈的例子，假设图2·2中标有"2.0"的结点被换成"1.0"，则所得到的博弈

表示了一个相当奇异的局势，其中局中人1控制了所有的决策结点，但在他决
44 定对抗还是放弃时，他不能记起以前他在决定是否加注时所知道的信息。也可参见第4章的图4·3。）

如果一个博弈中没有两个结点具有相同的信息状态，那我们就说这个博弈具有**完美信息**（perfect information）。也就是说，在一个具有完美信息的博弈中，每当局中人行动时，他总是知道所有其他局中人和机会以前的行动，以及他自己以前的行动。图2·4中的博弈具有完美信息，但图2·2和图2·3给出的博弈都不具有完美信息。

在展开型博弈中，局中人的一个**策略**（strategy）是为这个博弈中每个可能的信息状态都确定了一个行动的某种规则。从数学角度而言，一个策略是一个将信息状态映射为行动的函数。对每个局中人 i，令 S_i 表示 i 在这个博弈中的可能信息状态集，而对 S_i 中的每个信息状态 s，令 D_s 表示 i 在具有信息状态 s 的结点行动时，可供其利用的行动集，于是，局中人 i 在展开型博弈中的策略集就是 $\times_{s\in S_i}D_s$。

在我们的简单摊牌博弈中，局中人1具有4个策略，记他的策略集为

$$\{\mathrm{Rr},\ \mathrm{Rf},\ \mathrm{Fr},\ \mathrm{Ff}\}$$

其中第一个大写字母表示在结点“1.a”（有一张红色牌）所标明行动的首字母，第二个小写字母表示在结点“1.b”（有一张黑色牌）所标明行动的首字母。例如，Rf表示的策略为“若是红色牌则加注；若是黑色牌则摊牌”；而Rr表示的策略为“不论牌是红色还是黑色都加注”。值得指出的是，局中人1的策略是对局中人1的所有可能偶然事件都规定了一个行动的完整规则，尽管实际上只会有一个偶然事件确实发生。局中人2只有两个可能策略，用“M”（表示若1加注则对抗）和“P”（放弃）表示，这是因为局中人2只有一种可能的信息状态。

作为另外的两个例子，考虑图2·3和图2·4。在图2·3给出的一个博弈中，局中人2必须在没有观察到1的行动时就在L和 R 之间进行选择。对于局中人2的任一选择L或 R，局中人1都是选择T为更好，因此，在图2·3所表示的博弈中，局中人1应该选择T。当局中人1选择了T，局中人2可以通过选择L得到支付2。

图2·4与图2·3唯一的不同在于其局中人2的两个结点具有不同的信息状
45 态，因此，在这个博弈中，局中人2在从L和R（或 ℓ 和 r）之间做出选择之前已经观察到了1的实际选择。于是，在这个博弈中，局中人1有一个影响2的选择机会。对局中人2来说，如果她观察到了T，选择L将是更好的（因为2>0）；如果她观察到了B，选择 r 将会更好（因为1>0）。因此，局中人1应该预料到他能从选择T中得到支付2，而从选择B中得到支付3。因而，在图2·4所表示的博弈中，局中人1应该选择 B。在局中人1选择了B之后，局中

人 2 应该选择 r 而得到支付 1。

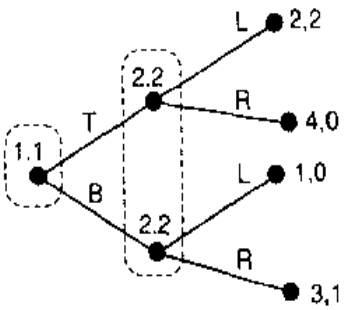

图 2·3

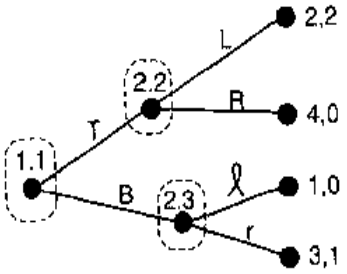

图 2·4

注意到在图 2·3 中，局中人 2 的策略集只是 {L，R}，而在图 2·4 中她的策略集却是 {Lℓ，Lr，Rℓ，Rr}（先写在结点 2.2 处的行动，后写在结点 2.3 处的行动）。因而，此博弈一个扩大局中人 2 的策略集的信息结构变化，可能会改变局中人 1 的最优行动，并从而实际降低局中人 2 的期望支付。

如果我们观看一次图 2·4 中的博弈，我们将会观察到局中人 2 的行动（L 或 R 或 ℓ 或 r），但我们将不能观察到 2 的策略，因为我们不能看到局中人 2 在她的另一信息状态下会做什么。例如，若局中人 1 选择了 B，则局中人 2 被观 46
察到的反应在策略 Rr 和策略 Lr 两者之下都是同一个（r）。然而，为了解释在图 2·4 中局中人 1 为什么应该选择 B，其关键是要认识到局中人 2 应理性地遵循策略 Lr（“若 T 则 L，若 B 则 r”），且局中人 1 应该能明智地预期到这一点。如果能预期到局中人 2 会遵循策略 Rr（“若 T 则 R，若 B 则 r”），那么局中人 1 就可以通过选择 T 以获得支付 4 而改善其境况。

2.2 策略型和正规表示

表示一个博弈的一种较简单的方式就是利用策略型。为了定义一个策略型博弈，我们只需要明确这个博弈的局中人集、每个局中人可利用的选择集，以及局中人的支付依赖于其所选择选项的方式。

形式上，一个**策略型**（strategic-form）博弈就是任何一个具有如下形式的 Γ：

$$\Gamma = \{N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\} \tag{2.1}$$

其中 N 是一个非空集，对 N 中的每一个 i，C_i 是一个非空集，且 u_i 是从 $\times_{j\in N} C_j$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个函数。这里，N 是这个博弈的局中人集。对每个局中人 i，C_i 是可供局中人 i 利用的**策略**（strategies）[或**纯策略**（pure strate-

gies)]集。在策略型博弈Γ进行时，每个局中人 i 都必须在集 C_i 中选择一个策略。一个**策略组合**（strategy profile）就是 N 中所有局中人可以选择的策略的一个组合。设 C 是由所有可能的策略组合所组成的集，则

$$C=\underset{j\in N}{\times}C_j,$$

对于 C 中任一策略组合 $c=(c_j)_{j\in N}$，如果 c 是局中人所执行的策略组合，那么 $u_i(c)$ 就表示此时局中人 i 在这个博弈中将得到的期望效用支付。在我们研究一个策略型博弈时，我们通常假定所有局中人都是同时地选择他们的策略，故在策略型博弈的分析中没有时间元。

如果一个策略型博弈的局中人集 N 和所有策略集 C_i 都是有限的，那这个博弈就是**有限的**（finite）。在阐述博弈论的基本思想时，除非另有规定，我们一般都假定博弈具有这里所说的有限性。

展开型博弈包含了在这个博弈实际进行中随着时间变化而可能发生行动和
47 事件序列的全面描述，就这个意义而言，展开型博弈是一个动态模型。另一方面，策略型博弈则忽略了所有的时间问题，并把所有的局中人视作同时选择他们的策略，从而在这种意义上，策略型博弈是一个静态模型。显然，如果时间问题对我们的分析而言不是本质问题，那么从我们的模型中除去时间因素就可能是个实质性的概念简化。为了实现这样的简化，冯·诺依曼和摩根斯特恩提出了一个对任何给定的展开型博弈 Γ^e 构造一个策略型博弈的程序。

为了说明这个程序，再考虑一下图 2.2 所示的那个简单摊牌博弈。现在假设局中人 1 和 2 知道他们明天将玩这个博弈，但每个局中人今天就在事先计划他或她的行动了。局中人 1 不知道他明天抽的牌将是什么颜色，但现在他可以计划抽到一张红色牌他该怎么办和抽到一张黑色牌他该怎么办。也就是说，如我们所见，局中人 1 在这个展开型博弈中的可能策略集是 $C_1=\{$Rr, Rf, Fr, Ff$\}$，其中第一个字母表示如果他抽到一张红色牌（在标号 1.a 的结点）时的行动，而第二个字母表示在其抽到一张黑色牌（在标号 1.b 的结点）时的行动。局中人 2 今天不知道局中人 1 将加注还是摊牌，但她今天可以计划在 1 加注时是对抗还是放弃。因此，局中人 2 今天可从中选择的策略集是 $C_2=\{$M, P$\}$，其中 M 表示策略“若 1 加注则对抗”，而 P 表示策略“若 1 加注则放弃”。

即使我们知道了每个局中人所计划要用的策略，但由于我们不知道抽出的那张牌将是红色牌还是黑色牌，所以我们仍然不能预测这个博弈的实际结果。例如，如果局中人 1 选择策略 Rf（若是红色牌则加注，若是黑色牌则摊牌），局中人 2 选择的策略是 M，那么 1 的最后支付将是：若是红色牌则为 +2（因为这时 1 要加注，2 将对抗，且 1 将获胜）；或者是黑色牌则为 −1（因为 1 将摊牌认输）。不过，由于我们知道红色牌与黑色牌出现的概率各为 1/2，所以，当这两个策略在博弈中使用时，我们能够对每个局中人计算期望支付。于是，当局中人 1 计划使用策略 Rf 而局中人 2 计划使用策略 M 时，局中人 1 的期望

支付是

$$u_1(\mathrm{Rf},\ M)=2\times 1/2+(-1)\times 1/2=0.5$$

类似地，局中人 2 从策略组合（Rf，M）中得到的期望支付是

$$u_2(\mathrm{Rf},\ M)=-2\times 1/2+1\times 1/2=-0.5$$

我们可以类似地计算每个局中人从每对策略所获得的期望支付。于是所得到的 48
期望支付 $\{u_1(c),\ u_2(c)\}$ 按照表 2－1 依赖于 $C_1\times C_2$ 中的策略组合 $c=(c_1,\ c_2)$。

表 2－1　　策略型简单摊牌博弈，正规表示

C_1	C_2	
	M	P
Rr	0，0	1，－1
Rf	0.5，－0.5	0，0
Fr	－0.5，0.5	1，－1
Ff	0，0	0，0

表 2－1 所示的策略型博弈称为简单摊牌博弈的**正规表示**（normal representation）。在博弈开始时，它就描述了对每个局中人的期望效用支付将如何依赖于他们的策略计划。从决策理论（第 1 章的定理 1.1），我们知道，一个理性的局中人应该计划其策略以最大化他的期望效用支付。因此，表 2－1 表示了在博弈的开始或之前，局中人在计划他们的策略时所面临的决策理论局势。

一般而言，给定如 2.1 节所定义的任一展开型博弈 Γ^e，其策略型表示可以构造如下。令策略博弈的局中人集 N 与所给的展开型博弈 Γ^e 的局中人集 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 相同，对 N 中任一局中人 i，令策略型博弈 Γ **中局中人 i 的策略集** C_i 与展开型博弈 Γ^e 中局中人 i 的策略集相同，如同 2.1 节末所定义的那样。这就是说，c_i 中任一策略 C_i 是一个函数，它为局中人 i 在这个博弈中所可能有的每一个信息状态 r 都确定了一个行动 $c_i(r)$。

对于 C 中任一策略组合和 Γ^e 的树中任一结点 x，我们定义 $P(x|c)$ 为 Γ^e 从根出发的一条局路径通过结点 x 的概率，并且在这条局路径的任何一个决策结点，包含在该路径中的下一个选择都是由该结点处相关的局中人在 c 中的策略所决定的；而在这条局路径的任一机会结点，包含在该路径中的下一个选择是由 Γ^e 中所给出的概率分布所确定的。这个定义能够在数学上用归纳法明确地表述如下。如果 x 是 Γ^e 的根，则 $P(x|c)=1$。如果 x 直接跟随一个机会结点 y，而 q 又是从 y 到 x 那个枝上的机会概率，则 $P(x|c)=qP(y|c)$。如 49

果 x 直接跟随着一个决策结点 y，而 y 又是在信息状态 r 由局中人 i 所控制，则在 $c_i(r)$ 是从 y 到 x 的选择上的行动标号时，$P(x|c) = P(y|c)$，否则 $P(x|c) = 0$。] 在任一终结点 x，令 $w_i(x)$ 为局中人 i 在博弈 Γ^e 的终结点 x 处的效用支付，令 Ω^* 表示博弈 Γ^e 中所有的终结点所组成的集。然后，对 C 中任一策略组合 c 及 N 中任一 i，令 $u_i(c)$ 为

$$u_i(c) = \sum_{x \in \Omega^*} P(x \mid c) w_i(x)$$

即在所有的局中人都实施了由 c 为他们所指定的策略时，$u_i(c)$ 是局中人 i 此时从 Γ^e 中得到的期望效用支付。当 $\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ 是用这种方式从 Γ^e 导出的时候，则称 Γ 为 Γ^e 的**正规表示**（normarl representation）。

我们已经看到，表 2－1 是图 2·2 中展开型博弈的正规表示。考虑并比较一下图 2·3 与图 2·4 中展开型博弈的正规表示也是有益处的。在这两个博弈中，局中人 1 的策略集都是 $C = \{T, B\}$，但局中人 2 的策略集在这两个博弈中却是非常不同的。在图 2·3 中，局中人 2 只有一个可能的信息状态，故 $C_2 = \{L, R\}$. 而由图 2·3 所示博弈的正规表示所得到的效用支付 (u_1, u_2) 如表 2－2 所示。

表 2－2　　一个策略型博弈

C_1	C_2	
	L	R
T	2, 2	4, 0
B	1, 0	3, 1

但在图 2·4 中，局中人 2 有两个可能的信息状态，她的策略集是 $C_2 = \{L\ell, Lr, R\ell, Rr\}$。图 2·4 所示博弈的正规表示的效用支付在表 2－3 给出。因此，区分图 2·4 和图 2·3 的信息状态标号表面上很小的变化导致了正规表示很大的变化。

50　**表 2－3　　一个策略型博弈**

C_1	C_2			
	Lℓ	Lr	Rℓ	Rr
T	2, 2	2, 2	4, 0	4, 0
B	1, 0	3, 1	1, 0	3, 1

冯·诺依曼和摩根斯特恩论证了在一个非常一般的意义上，正规表示应该是在任何博弈的分析中我们所要研究的一切。这一论点的实质如下。我们博弈理论家是要尽力预测理性局中人在给定博弈的每一个可能阶段应该做些什么。

如果知道了博弈的结构，则我们应该可以在博弈实际开始之前，就能做我们的分析并计算我们的预测。而若博弈的局中人都是智能的，则每个局中人都应该能做我们所能做的同样计算，并在博弈开始之前就确定了其理性的行动计划。因而，假定所有局中人在博弈一开始就同时制定了他们的策略计划应该是不失一般性的，于是实际的博弈运转只是一个实施这些策略并按照博弈规则确定结果的机械过程。也就是说，我们可以假定所有局中人在博弈一开始就同时做出所有的实质性的决策，因为每个局中人的实质性决策都被假设为对一个完整的计划或策略的选择，而这种计划或策略确定了在博弈的任何阶段和任何可能的情况下这个局中人所要做的。局中人同时而又独立地做出他们策略决策的情形，恰好被博弈的正规表示所描述。

尽管这个论证的局限性已经在更为近期的文献中被重新探讨了（参看 2.6 节及第 4 章和第 5 章），但正规表示的充分性这一论点仍是博弈论中最重要的思想之一。

作为这个论证的一个推论，策略型博弈中的局中人独立地选择他们的策略的假定，也可以被辩证为不失一般性。任何一个可能会引起局中人决策不相互 51
独立的通信机会，原则上，可以在展开型博弈中用行动显性地表示出来（说某件事就是一种特殊的行动形式）。如果所有的通信机会都被作为显性枝包含在展开型博弈之中，那么“在博弈一开始”，策略选择必定是在没有先验通信下做出的，在这样一个展开型博弈的正规表示中，每个局中人的每个策略都包括了一个在通信过程中他应该说什么和收到讯息后他应该如何反应的规定，并且这些都是假定局中人能独立选择的策略。（然而，在通信的可能性是非常之多而又复杂时，把这样的通信机会从博弈的结构中省略而代之以在解概念中加以考虑，实际上可能是更方便的。这另立的一条分析途径将在第 6 章中详细地加以研究。）

在一个理论家试图用重复多次博弈的局中人将会向解靠拢的论点去捍卫其提出的策略型博弈之一般解概念时，正规表示的充分性这一论点的另一含义就随之而产生了。这样的论点忽视了“重复一个博弈多次”的过程可以被视为一个单独博弈，而其中每次重复只是一个阶段这一事实。而这单个博弈的整体可以用一个展开型博弈及其策略型的正规表示来描述。如果对策略型博弈所提出的一般解概念是正确的，那么，我们可以争辩说，这种情况下，它应该能应用于这一单独博弈的整体，而不只是一个一个的重复阶段（有关重复博弈更多的内容，参见第 7 章）。

2.3 策略型博弈的等价性

从决策理论的观点来看，效用数字只具有表示个人偏好的意义。因而，如果我们以这样的方式改变一个博弈模型的效用函数，使得由这些函数所表示的基本偏好没有改变，那么，新的博弈模型一定被认为是与原博弈模型等价的。能认识到两个博弈模型在什么时候是等价的这一点甚为重要，因为我们的解概念对于实际上表示了同一局势的两个等价博弈模型一定不能做出不同的预测。
52 也就是说，对于等价博弈应该生成相同的解这一要求，可能是识别一个不令人满意的解理论之有用准则。

我们从第 1 章的定理 1.3 知道，表示决策者同一偏好的两个效用函数 $u(\cdot)$和 $\hat{u}(\cdot)$ 是等价的，当且仅当它们的差别在于形如 $\hat{u}(\cdot)=Au(\cdot)+B$ 的一个线性变换，其中 $A>0$ 和 B 都是常数。因此，我们说两个策略型博弈 $\Gamma=\{N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\}$ 和 $\hat{\Gamma}=\{N,(C_i)_{i\in N},(\hat{u}_i)_{i\in N}\}$ 是**完全等价**（fully equivalent）的，当且仅当对每个局中人 i 而言，存在常数 $A_i>0$ 和 B_i 使得

$$\hat{u}_i(c)=A_iu_i(c)+B_i,\qquad \forall c\in C$$

也就是说，具有相同的局中人集和策略集的两个策略型博弈是完全等价的，其充分必要条件是其中一个博弈中的每个局中人的效用函数，从决策理论来看，都是与其在另一个博弈中的效用函数等价的。

描述策略型博弈局中人（预测的或处方的）行为的最一般方式是用在策略组合集 $C=\times_{i\in N}C_i$ 上的一个概率分布。回顾（由第 1 章中的方程 1.1），对于任一有限集 Z，$\Delta(Z)$ 被我们用来表示集 Z 上的所有概率分布所组成的集。因此 $\Delta(C)$ 表示了如上所述的 Γ 或 $\hat{\Gamma}$ 中局中人策略组合集上的所有概率分布组成的集。在博弈 Γ 中，具有效用函数 u_i 的局中人 i 偏好所有的局中人都按照 $\Delta(C)$中的一个概率分布 $\mu=\{\mu(c)\}_{c\in C}$［以概率 $\mu(c)$ 选择策略组合 c］而不是按照另一个概率分布 λ 行动，当且仅当 μ 比 λ 带给他更高的期望效用支付，即

$$\sum_{c\in C}\mu(c)u_i(c)\geqslant\sum_{c\in C}\lambda(c)u_i(c)$$

类似地，在 $\hat{\Gamma}$ 中，i 对 μ 的偏好胜于 λ，当且仅当

$$\sum_{c\in C}\mu(c)\hat{u}_i(c)\geqslant\sum_{c\in C}\lambda(c)\hat{u}_i(c)$$

由定理 1.3 推出，Γ 和 $\hat{\Gamma}$ 完全等价的充分必要条件是，对于 N 中每个 i 及 $\Delta(C)$

中的每个 μ 和每个 λ，局中人 i 在博弈 Γ 中偏好 μ 胜于 λ 等价于其在博弈 $\hat{\Gamma}$ 中偏好 μ 胜于 λ。

对于策略型博弈，也有另外一些关于等价性的定义。等价性的一个较弱的定义（在此定义下有更多对博弈是等价的）是所谓**最佳反应等价**（best-response equivalence）。最佳反应等价的概念是基于这样一个较狭窄的观点，即一 53
个局中人的效用只用于刻划一旦他对其他局中人行为的信念确定下来后，他将会如何选择其策略。为了规范地定义最佳反应等价，我们必须首先引进另外的一些记号。

对于任何一个局中人 i，令 C_{-i} 表示除 i 以外的所有局中人的全部可能策略组合所组成的集，即

$$C_{-i} = \bigtimes_{j \in N-i} C_j$$

（这里 $N-i$ 表示除 i 以外全部局中人的集合。）给定 C_{-i} 中任何一个 $e_{-i} = (e_j)_{j \in N-i}$ 和 C_i 中任一 d_i，我们令 (e_{-i}, d_i) 表示 C 中的一个策略组合，使得其中第 i 个分量是 d_i，而其余全部分量如 e_{-i} 一样。

对于任何一个集 Z 和任何一个函数 $f: Z \to \mathrm{R}$，$\operatorname{argmax}_{y \in Z} f(y)$ 表示 Z 中最大化 f 的点集，于是

$$\underset{y \in Z}{\operatorname{argmax}} f(y) = \{y \in Z \mid f(y) = \max_{z \in Z} f(z)\}$$

如果局中人 i 相信 $\Delta(C_{-i})$ 中的某个分布 η 能预测这个博弈中其余局中人的行为，从而 C_{-i} 中每一个策略组合 e_{-i} 被其余局中人选中的概率为 $\eta(e_{-i})$，那么，局中人 i 将会想在 C_i 中选择他自己的策略以最大化他自己的期望效用支付。因此在博弈 Γ 中，局中人 i 对 η 的**最佳反应**（best responses）集将是

$$\underset{d_i \in C_i}{\operatorname{argmax}} \sum_{e_{-i} \in C_{-i}} \eta(e_{-i}) \bar{u}_i(e_{-i}, d_i)$$

类似地，在博弈 $\hat{\Gamma}$ 中，局中人 i 的最佳反应是用 $\hat{u}_i$ 替代效用函数 u_i 而类似定义的。博弈 Γ 和 $\hat{\Gamma}$ 是最佳反应等价的（best-response equivalent），当且仅当，对于每个局中人 i 和对于其余局中人策略上的每一可能概率分布，这两个最佳反应集总是一致的，即

$$\underset{d_i \in C_i}{\operatorname{argmax}} \sum_{e_{-i} \in C_{-i}} \eta(e_{-i}) u_i(e_{-i}, d_i) = \underset{d_i \in C_i}{\operatorname{argmax}} \sum_{e_{-i} \in C_{-i}} \eta(e_{-i}) \hat{u}_i(e_{-i}, d_i), \quad \forall i \in N, \forall \eta \in \Delta c(-i)$$

举例而言，考虑表 2-4 和表 2-5 所给出的这两个博弈。

这两个博弈是最佳反应等价的，因为在每个博弈中，对每个局中人 i 来说，如果他认为另一个局中人将会以 1/8 或更大的概率去选择 y 策略时，他的最佳反应将是选择 y_i。然而，这两个博弈显然不是完全等价的［例如，在第

一个博弈中，每个局中人都偏好 (x_1, x_2) 胜于 (y_1, y_2)，而在第二个博弈

54 表 2-4 一个策略型博弈

C_1	C_2	
	x_2	y_2
x_1	9, 9	0, 8
y_1	8, 0	7, 7

表 2-5 一个策略型博弈

C_1	C_2	
	x_2	y_2
x_1	1, 1	0, 0
y_1	0, 0	7, 7

中则不然]。这两种等价性概念之间的区别在于，我们是否承认一个局中人在另一个局中人的可能策略上的偏好是有意义的，并且是与我们对这个博弈的分析相关的。

2.4 简约的正规表示

有些策略型博弈可以通过剔除多余的策略而得到简化。举例而言，考虑图 2·5 中的展开型博弈，其正规表示示于表 2-6。

表 2-6 的前三行是完全一样的，这一点并非巧合。在所给定的展开型博弈中，如果局中人 1 在其结点 1.1 处选择了 a_1，则局路径是决不可能到达他的结点 1.3 的，因此，期望支付不会依赖于局路径真的到达结点 1.3 处他所计划（在 x_1，y_1 及 z_1 中）选择的行动。于是，在局中人 1 的策略 a_1x_1、a_1y_1 及 a_1z_1 之间加以区别看来是完全没有必要的。

一般来说，给定任何一个策略型博弈 $\Gamma = \{N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\}$，对于任何一个局中人 i 和 C_i 中任意两个策略 d_i 和 e_i，我们称 d_i 和 e_i 是**支付等价的**（payoff equivalent），当且仅当

55 $$u_j(c_{-i}, d_i) = u_j(c_{-i}, e_i), \ \forall c_{-i} \in C_{-i}, \ \forall j \in N$$

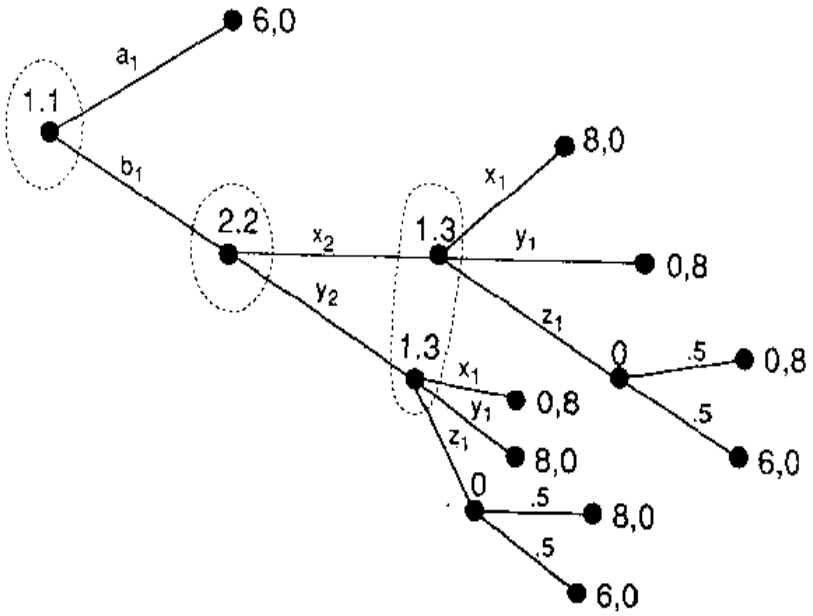

图 2·5

表 2－6　　一个策略型博弈：图 2·5 的正规表示

C_1	C_2	
	x_2	y_2
a_1x_1	6，0	6，0
a_1y_1	6，0	6，0
a_1z_1	6，0	6，0
b_1x_1	8，0	0，8
b_1y_1	0，8	8，0
b_1z_1	3，4	7，0

也就是说，局中人 i 的两个策略 d_i 和 e_i 是支付等价的，当且仅当，无论除 i 之外的局中人怎样行动，没有一个局中人会关心 i 将使用策略 d_i 还是 e_i。在表 2－6 中，a_1x_1、a_1y_1 和 a_1z_1 是两两之间相互支付等价的。

当存在一些支付等价的策略时，我们可以通过把这些支付等价策略合并起来并将每个这样的支付等价策略集代之以一单个策略来简化正规表示。如此简化后的正规表示被称作**纯简约的正规表示**（purely reduced normal representation）。

例如，我们可以把表 2－6 中的策略 a_1x_1、a_1y_1 及 a_1z_1 合并，且用单个策略 a_1·来代替它们。策略 a_1·可以解释为计划“在 1.1 处选择 a_1，在 1.3 处的行动不做规定”。如此所得到的纯简约的正规表示如表 2－7 所示。 56

表 2-7 一个策略型博弈：图 2.5 的纯简约的正规表示

C_1	C_2	
	x_2	y_2
a_1·	6, 0	6, 0
b_1x_1	8, 0	0, 8
b_1y_1	0, 8	8, 0
b_1z_1	3, 4	7, 0

虽然表 2-7 中没有任何两个策略是支付等价的，但策略 b_1z_1 在某种意义上来说是多余的。为了看出其缘由，假设局中人 1 考虑以掷一枚硬币为基础在策略 a_1·和 b_1y_1 之间做选择，所得到的随机策略可以表示为 .5 $[a_1\cdot]$ + .5 $[b_1y_1]$，则这个随机策略将给出期望支付配置：

.5 (6, 0) + .5 (0, 8) = (3, 4) 对 x_2

.5 (6, 0) + .5 (8, 0) = (7, 0) 对 y_2

由于 b_1z_1 与局中人 1 可实施使用的与之不同的一个随机策略是支付等价的，所以 b_1z_1 是多余的。

一般地，给定任何一个策略型博弈 $\Gamma=\{N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\}$，局中人 i 的一个**随机策略**（randomized strategy）是集 C_i 上的任意一个概率分布，故 $\Delta(C_i)$ 表示了局中人 i 的所有随机策略所组成的集。为了强调与这些随机策略的区别，集 C_i 中的策略也可以被称为**纯策略**（pure strategies）。对于 C_i 中的任何一个纯策略 c_i 和 $\Delta(C_i)$ 中的任何一个随机策略 σ_i，$\sigma_i(c_i)$ 表示局中人 i 在他实施 $\Delta(C_i)$ 中的随机策略 σ_i 时他将选择 c_i 的概率。

C_i 中的一个策略 d_i 是**随机多余的**（randomly redundant），当且仅当，在 $\Delta(C_i)$ 中存在一个概率分布 σ_i，使得 $\sigma_i(d_i)=0$ 及

$$u_j(c_{-i}, d_i) = \sum_{e_i\in C_i}\sigma_i(e_i)u_j(c_{-i}, e_i),\ \forall c_{-i}\in C_{-i}, \forall j\in N$$

57 也就是说，d_i 是一个随机多余策略的充分必要条件是：局中人 i 有某种在他的其他策略中随机选择的方式，使得无论其他局中人可能会选择哪种行动组合，每个局中人都会在 i 使用 d_i 时得到与 i 使用这个随机策略时相同的期望支付。

完全简约的正规表示（fully reduced normal representation）是由纯简约的正规表示通过剔除其中所有的随机多余的策略所导出的。图 2·5 中展开型博弈的完全简约的正规表示如表 2-8 所示。除非另有规定，一个展开型博弈的**简约的正规表示**（reduced normal representation）可以被认为是指完全简约的正规表示。

表 2-8　　一个策略型博弈：图 2.5 的完全简约的正规表示

C_1	C_2	
	x_2	y_2
a_1	6，0	6，0
b_1x_1	8，0	0，8
b_1y_1	0，8	8，0

2.5　劣策略的剔除

在 1.8 节中对一人决策问题所定义的占优概念也能够应用于策略型博弈。给定任何一个策略型博弈$\Gamma=(N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$，$N$ 中任一局中人 i 及 C_i 中任一策略 d_i，对局中人 i 来说 d_i 是**强劣的**（strongly dominated），当且仅当，在$\Delta(C_i)$中存在某个随机策略 σ_i，使得

$$u_i(c_{-i},d_i)<\sum_{e_i\in C_i}\sigma_i(e_i)u_i(c_{-i},e_i),\quad \forall c_{-i}\in C_{-i}$$

例如，在我们的简单摊牌博弈的策略型（表 2-1）中，局中人 1 的策略 Ff 是由随机策略 .5 [Rr] + .5 [Rf] 为强劣的。

由定理 1.6，d_i 对局中人 i 来说是强劣的，当且仅当，不论他关于其余局中人的信念是什么，d_i 决不会是 i 的最佳反应。由于局中人 i 绝不会使用强劣的策略，且对所有其他的局中人来说，只要他们是智能的，他们就应该明白这个事实，因此剔除局中人 i 的一个强劣的策略应该不会影响对这个博弈的分析。 58

在一个或多个强劣的策略已经从一个博弈中剔除之后，在原博弈中不是强劣策略的其余策略有可能在这余下的博弈中成为强劣。例如，考虑表 2-9 中的博弈。在这个博弈中，对局中人 2 来说，策略 z_2 是由 .5 [x_2] + .5 [y_2]（对 x_2 和 y_2 的每一个都赋予概率 0.5 的随机策略）为强劣的。其余的策略对任何一个局中人来说都不是强劣的，因为每个策略都至少是对一个关于另一局中人如何行动之猜测的最佳反应（策略 a_1 是局中人 1 对 x_2 的最佳反应；b_1 是局中人 1 对 z_2 的最佳反应；x_2 是局中人 2 对 a_1 的最佳反应；而 y_2 是局中人 2 对 b_1 的最佳反应）。然而，在剔除 z_2 之后余下的博弈中，b_1 对局中人 1 来说是由 a_1 而为强劣的（因为 $0<2$ 且 $1<3$）。除此之外，当 z_2 和 b_1 都被剔除之后，在剩下的博弈中，对局中人 2 来说，y_2 是由 x_2 而为强劣的（因为 $0<3$）。于是再剔除 y_2 之后，博弈中就只为每个局中人留有一个策略了：局中人 1 的 a_1 和局中人 2 的 x_2。因此，重复剔除强劣策略导致了关于局中人在这个博弈中应该做什么的唯一预测。

表 2-9 一个策略型博弈

	C_2		
C_1	x_2	y_2	z_2
a_1	2, 3	3, 0	0, 1
b_1	0, 0	1, 6	4, 2

对于一个一般的策略型博弈 $\Gamma=\{N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\}$，这种重复剔除强劣策略的过程可以具体表示如下。对于任一局中人 i，令 $C_i^{(1)}$ 表示 C_i 中对 i 来说不是强劣的所有策略组成的集，再令 $\Gamma^{(1)}$ 为策略型博弈

$$\Gamma^{(1)}=\left(N, (C_i^{(1)})_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$$

(在博弈 $\Gamma^{(1)}$ 中，当然，每个函数 u_i 实际上是将原函数限制于较小的新定义域
59 $\times_{j\in N}C_j^{(1)}$ 上而得到的。) 于是，应用数学归纳法，对每个正整数 k，我们可以定义策略型博弈 Γ^k 为

$$\Gamma^k=\left(N, (C_i^{(k)})_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$$

其中，对每个局中人 i，$C_i^{(k)}$ 是 $C_i^{(k-1)}$ 中对 i 而言非强劣的所有策略组成的集。(而 u_i 可再次被理解为将 i 的原效用函数限制在更小的定义域 $\times_{j\in N}C_j^{(k)}$ 上而得到)。显然，对每个 i 来说，$C_i\supseteq C_i^{(1)}\supseteq C_i^{(2)}\supseteq\cdots\cdots$ 而且可以证明，所有这些集合都是非空的。因此，由于我们是从一个有限博弈 Γ 开始出发的，故一定存在某个数 K 使得

$$C_i^{(K)}=C_i^{(K+1)}=C_i^{(K+2)}=\cdots, \quad \forall i\in N$$

给定这个数 K，我们令 $\Gamma^{(\infty)}=\Gamma^{(K)}$，且对 N 中的每个 i，令 $C_i^{(\infty)}=C_i^{(K)}$。对局中人 i 来说，在某种强意义上，$C_i^{(\infty)}$ 中的策略是**重复非劣的** (iteratively undominated)。博弈 $\Gamma^{(\infty)}$ 也可以被称为由重复强占优 (或重复剔除强劣策略) 从 Γ 生成的**剩余博弈** (residual game)。

因为所有局中人都被假设为理性的决策者，所以在给定的策略型博弈 Γ 中，我们可以得出结论，没有一个局中人可能去使用任何一个强劣策略，也就是说，每个局中人 i 一定会在 $C_i^{(1)}$ 中选择一个策略。又因为所有局中人都被假定是智能的，所以他们应该像我们一样知道，没有局中人 i 会使用 $C_i^{(1)}$ 之外的策略，于是每个局中人 i 一定会在 $C_i^{(2)}$ 中选择一个策略，因为 $C_i^{(2)}$ 是对 $\times_{j\in N\ j\neq i}C_j^{(1)}$ 上概率分布最佳反应的所有策略组成的集。但又因为每个局中人 i 都是智能的，他也一定知道每个局中人 j 将使用 $C_j^{(2)}$ 中的一个策略，因此，i 必须使用

一个 $C_i^{(3)}$ 中的策略，$C_i^{(3)}$ 是他对 $\times_{j\in N-i}C_j^{(2)}$ 上概率分布的最佳反应集。如此重复地使用这个理性和智能性的假定，这种论证可以一直延伸到证明出每个局中人 i 一定从 $C_i^{(\infty)}$ 中选用一个策略。

对于每个局中人 i，$C_i^{(\infty)}$ 中的每个策略都是对 $\times_{j\in N-i}C_j^{(\infty)}$ 上某个概率分布的一个最佳反应。事实上，这些集合 $(C_i^{(\infty)})_{i\in N}$ 也分别是 $(C_i)_{i\in N}$ 满足这个条件的最大子集。

给定任何一个策略型博弈 $\Gamma=(N,\ (C_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N})$，$N$ 中任一局中人 i 及 C_i 中任一策略 d_i，对局中人 i 来说 d_i 是**弱劣的**（weakly dominated），当且仅当，在 $\Delta(C_i)$ 中存在某个随机策略 σ_i 使得

$$u_i(c_{-i},d_i)\leqslant\sum_{e_i\in C_i}\sigma_i(e_i)u_i(c_{-i},e_i),\quad\forall c_{-i}\in C_{-i}$$

而且对于 C_{-i} 中至少一个策略组合 $\hat{c}_{-i}$，有

$$u_i(\hat{c}_{-i},d_i)<\sum_{e_i\in C_i}\sigma_i(e_i)u_i(\hat{c}_{-i},e_i)$$

60

因为对某个局中人而言，即使他可确信其余局中人的某些策略具有概率 0 时，弱劣策略仍有可能是他的最佳反应，所以，证明剔除弱劣策略不应该影响到对博弈的分析，就要困难得多（回顾定理 1.7）。再则，弱劣策略的重复剔除会有一些技术上的困难，而对于强劣策略的重复剔除则不会如此。举例来说，考虑表 2－10 所示的博弈［来源于科尔伯格和默顿斯（Kohlberg and Mertens，1986）］。如果首先剔除强劣的策略 z_1，则 y_2 在余下的博弈中是弱劣的。另一

表 2－10　　一个策略型博弈

C_1	C_2	
	x_2	y_2
x_1	3，2	2，2
y_1	1，1	0，0
z_1	0，0	1，1

方面，如果首先从表 2－10 中剔除强劣的策略 y_1，则 x_2 在余下的博弈中是弱劣的。但如果从表 2－10 中剔除 y_1 和 z_1，那么在余下的博弈中，局中人 2 的两个策略中没有一个是弱劣的（因为局中人 1 从局中人 2 的选择 x_2 和选择 y_2 中所获得的支付是不同的，所以这两个策略在 2.4 节的意义上来说也不会是等价的支付）。因此，局中人 2 的策略中哪一个将会在重复剔除弱劣策略的过程中被剔除，依赖于我们剔除局中人 1 的劣策略的顺序。

如果只剔除强劣的策略，则这个依赖剔除顺序的问题就不会产生。也就是说，如果我们一直剔除强劣策略直至得到一个不含强劣策略的剩余博弈，则无论

所用的剔除顺序是什么，剩余博弈将总是相同的。事实上，剔除其他局中人的策略不会使局中人 i 的强劣策略不再是强劣的，但可能会使局中人 i 的强劣策略不
61 再是强劣的［参见吉尔博、卡莱及泽梅尔（Gilboa, Kalai and Zemel, 1989）］。

尽管如此，弱占优和重复剔除弱劣策略对于博弈的分析仍是有用的概念。在我们的简单摊牌博弈中（表 2－1），Fr 和 Ff 两者都是局中人 1 的弱劣策略这一事实，是对他在持有一张赢牌时不应该摊牌这一自然直觉的一个正式表述。在表 2－3 中，重复弱占优可以首先剔除 2 的策略 Ll，Rl 和 Rr（它们全都是被 Lr 弱占优的），然后在余下的博弈中剔除 1 的策略 T。另一方面，在表 2－2 中，重复（强）占优可以首先剔除 1 的策略 B，再剔除 2 的策略 R。从而重复剔除劣策略导致了在 2.2 节末所讨论的结论：在图 2·3 所示的博弈中，我们应该预期观察到行动 T 和 L；而在图 2·4 所示的博弈中，我们应该预期观察到行动 B 和 r。

2.6 多代理人表示

冯·诺依曼和摩根斯特恩的正规表示有效地定义了一个从展开型博弈到策略型博弈的映射。另外一个这样的映射是由塞尔滕（Selten）提出的，他称之为**代理人正规**（agent-normal）型。在这里，我们将塞尔滕的术语略做修改而加以使用，并称之为**多代理人表示**（multiagent representation）。塞尔滕多代理人表示背后的思想是，如果 Γ^e 中一个给定的局中人在其每个可能的信息状态都由一个不同的代理人表示，只要这些代理人与原局中人具有相同的偏好并享有相同的信息，这种表示就应该是不成问题的。

令 Γ^e 为任一给定的展开型博弈，并令 N 表示 Γ^e 中的局中人集。对于 N 中的任何一个 i，我们用 S_i 表示此博弈中发生在属于 i 的各种结点上的信息状态集。不失一般性（必要时可重新标号），我们可以假定这些集 S_i 是两两不相交的，故 $i \neq j$ 时有 $S_i \cap S_j = \emptyset$。

在这个展开型博弈的多代理人表示中，局中人集就是 $S^* = \bigcup_{i \in N} S_i$，即是说，在 Γ^e 的多代理人表示中，Γ^e 中每个局中人的每个可能信息状态自身都是一个代理人。我们可以把多代理人表示中的局中人称为**临时代理人**（temporary agents）。代表局中人 i 的一个临时代理人 r 在局路径到达由 i 控制并具有
62 信息状态 r 的一个结点时，负责选择 i 将要做出的行动。我们可以设想所有的临时代理人在博弈开始时都同时计划他们的行动，尽管某些代理人的计划可能绝不会实施（如果局路径不通过由这些代理人所负责并具有相应信息状态的结点）。

对于 N 中任一局中人 i 和 S_i 中任一信息状态 r，令 D_r 为在信息状态 r 下由局中人 i 所控制的结点上各个选择的行动标号集，则在 Γ^e 的多代理人表示

中，集 D_r 是可供临时代理人 r 利用的策略集。将多代理人表示中临时代理人 r 的效用函数 v_r 定义为与正规表示中对应的局中人的效用函数 u_i 相同。也就是说，对于 N 中任一局中人 i 和 S_i 中任一 r，我们定义 $v_r: \times_{s\in S^*} D_s \to \mathbf{R}$，使得对于 $\times_{s\in S^*} D_s$ 中任一 $(d_s)_{s\in S^*}$，如果对 N 中每一个 j 和 S_j 中每一个 t，$(c_j)_{j\in N}$ 都是满足 $c_j(t)=d_t$ 的正规表示之策略组合，那就有

$$v_r((d_s)_{s\in S^*}) = u_i((c_j)_{j\in N})$$

这些结构的合成 $(S^*, (D_r)_{r\in S^*}, (v_r)_{r\in S^*})$ 就定义了 Γ^e 的多代理人表示。同正规表示一样，多代理人表示也是一个策略型博弈。

例如，考虑图 2·6 中的博弈。在其正规表示中，局中人集是 $N=\{1, 2\}$，策略集是 $C_1=\{a_1w_1, a_1x_1, b_1w_1, b_1x_1\}$ 和 $C_2=\{y_2, z_2\}$，且支付 (u_1, u_2) 在表 2－11 中给出。另一方面，在其多代理人表示中，局中人集是 $S^*=\{1, 2, 3\}$，其中代理人 1 和 2 表示了处于不同信息状态的原局中人 1，代理人 3 表示了原局中人 2。多代理人表示的策略集是 $D_1=\{a_1, b_1\}$，$D_2=\{w_1, x_1\}$，$D_3=\{y_2, z_2\}$，其支付 (v_1, v_2, v_3) 则由表 2－12 给出。当然，因为临时代理人 1 和 2 都表示所给定展开型博弈中的局中人 1，只不过处于其不同的信息状态，所以表 2－12 中每个支付单元的前两个支付都是一样的。

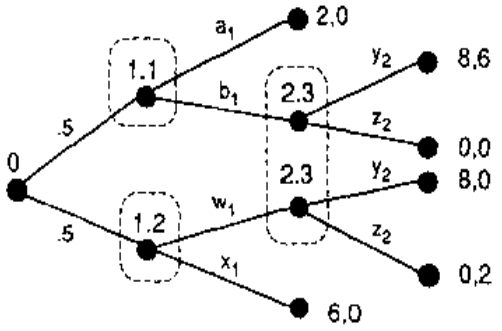

图 2·6

表 2－11　　一个策略型博弈：图 2·6 的正规表示

C_1	C_2	
	y_2	z_2
a_1w_1	5, 0	1, 1
a_1x_1	4, 0	4, 0
b_1w_1	8, 3	0, 1
b_1x_1	7, 3	3, 0

表 2－12　　一个策略型博弈：图 2·6 的多代理人表示

	y_2		z_2	
	w_1	x_1	w_1	x_1
a_1	5, 6, 0	4, 4, 0	1, 1, 1	4, 4, 0
b_1	8, 8, 3	7, 7, 3	0, 0, 1	3, 3, 0

为了理解多代理人表示的某些技术重要性，注意在正规表示中，策略 a_1w_1 对局中人 1 来说是强劣的（由 b_1x_1）。此外，在正规表示中重复剔除弱劣策略将导致这样的结论：局中人 2 将使用策略 y_2（因为一旦剔除了策略 a_1w_1，z_2 就变成了弱劣策略），且局中人 1 也因此应该使用策略 b_1w_1。然而，在多代理人表示中，没有一个策略是（弱或强）劣的。（因为对于每个临时代理人来说，其两个策略中的每一个都是对其他两个代理人的某个策略组合的唯一最佳反应。）由此看来，在我们只考虑正规表示时，占优理论或许看起来相当可信，但当我们考虑多代理人表示时，占优理论就很值得置疑了。

2.7 共同知识

假设在我们的简单摊牌博弈中，局中人 1 在已经抽了一张黑色牌后，他请一个顾问去帮助他决定是加注还是摊牌。在给定这张牌是黑色牌的信息下，这
64 个顾问知道支付实际上将是：若 1 摊牌为（−1，1），若 1 加注而 2 对抗则为（−2，2），而 1 加注且 2 放弃又为（1，−1）。于是，该顾问或许会试图用图 2.7 所示的博弈去模型化这个局势。不过，图 2·7 作为这个摊牌博弈的一种表示是严重不足的。如果只看图 2·7，顾问可能会做出如下解释："局中人 2 显然应该对抗，因为对抗能带给她支付 2，而放弃给她的支付为 −1。于是，局中人 1 的较好策略是摊牌且获得 −1，而不是加注以获得 −2。"这个貌似有理的解释，其错误之处在于局中人 2 并不知道支付如图 2·7 所示。她对于 1 手中牌之颜色的无知，对于理解 1 加注时她为什么有可能会放弃是关键性的，而这种无知在图 2·2 中有所显示而在图 2·7 中则没有。因此，即使顾问确实知道局中人 1 抽出的那张牌的颜色，但具有两种可能抽牌结果的机会结点仍必须被包括在其博弈模型之中，如同图 2·2 所示，因为局中人 2 的行为可能会受到其关于牌色不确定性信念的影响。

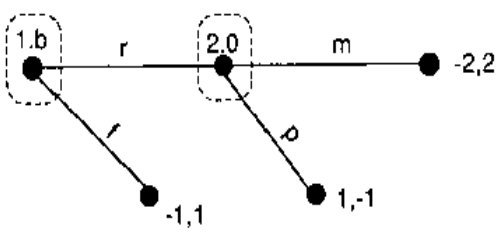

图 2·7

按照奥曼（1976）的说法，如果每个局中人都知道某个事实，每个局中人都知道每个局中人都知道它，如此等等，从而形如"（每个局中人都知道）^{k} 每个局中人都知道它"的语句对 $k=0$，1，2，…都是正确的，那我们就称这个事实为局中人中间的**共同知识**（common knowledge）。一个局中人的**私人信息**（private information）是指任何一个他拥有但不是博弈中所有局中人共同知识的信息。在简

单摊牌博弈中，在局中人 1 已经抽出一张牌后，局路径一定已到达图 2·2 中由局中人 1 控制的两个结点之一，这是共同知识；已到达的实际结点则是局中人 1 的私人信息。

一般地，无论我们选取怎样的一个博弈模型来研究，博弈论的方法都迫使我们假设这个模型是局中人中间的共同知识。为了理解这是为什么，回顾我们 65
曾将博弈论定义为（由 1.1 节），智能的理性局中人之间冲突与合作的数学模型研究。智能性假定意味着，无论我们对这个博弈知道或了解些什么，博弈的局中人也一定都知道或了解，因为他们和我们一样是智能的。因此，智能性假定蕴含着，无论我们研究怎样的一个博弈模型，我们必须假定局中人也都知道这个模型。而且，因为我们知道所有局中人都知道这个模型，所以智能的局中人也都知道所有的局中人都知道这个模型。在建立了这个事实后，我们还认识到智能的局中人也知道他们都知道的他们都知道这个模型，如此等等。

如此一来，为了像一名博弈理论家那样做分析，局中人 1 的顾问在知道牌实际是黑色牌之后，一定会对这个信息漠然视之，因为它不是局中人中间的共同知识。为了表示这个展开型博弈，他一定会应用原来在图 2·2 所给出的博弈，因为图 2·2 展示了这个博弈最多共同知识的信息。（一般而言，像图 2·2 这样一个较大的博弈树与图 2·7 这样一个较小的博弈树相比，前者展示了更多的不确定性，也因此表示了更少的信息）。在这些情况下，图 2·2 中博弈的根或许可以被称为一个**历史机会结点**（historical chance node），因为在博弈模型形成和用于分析时，这个结点的结果已经发生并为某些（但非全部）局中人所知道。这个历史机会结点对于表示局中人 2 的不确定性是必需的。

一般来说，在任何我们用策略型表示一个局中人已经具有不同私人信息的局势时，历史结点都是必需的。因为展开型是从一个单独结点开始的，这个根结点一定表示了过去在局中人掌握他们的私人信息之前的某个时候的局势，所以，那时任何一个局中人关于这个博弈所知道的一切都是共同知识。局中人现在可能拥有的全部相关私人信息，都一定可以在展开型博弈中，用那些用以表示局中人可能曾观察到的过去事件的枝和结点加以解释。

为了说明共同知识的重要性，我引用一个众所周知的寓言。故事发生在一个村庄，村里有 100 对已婚夫妇，他们都是地道的逻辑学家，但也有一些多少 66
有点奇特的社会风俗。每天晚上，村里的男人们都将点起篝火，绕圈围坐举行一个会议，且每个人都谈论自己的妻子。在会议开始时，如果一个男人有理由认为他的妻子对他总是守贞的，那么他就对在坐的男人们赞扬她的美德。另一方面，如果在当前会议之前的任何时间，只要他发现了他妻子不贞的证据，那他就会悲鸣恸哭，并祈求神灵严厉地惩罚她。再则，如果一个妻子曾有不贞，那她和她的情人将会立即通知村里除她丈夫外所有的男人。所有这些传统都是村民们的共同知识。

事实上，每个妻子都已对自己的丈夫不忠。于是，每个丈夫都知道除自己

的妻子外都是不贞的女人，而对自己的妻子每晚都要赞扬。

这种状况持续了很多年，直到一个传教徒走访到这个村庄。他坐在篝火旁参加了一次会议并听到每个男人都赞扬自己的妻子之后，他站到丈夫们围坐的圆中心，大声地说："这个村里有一个妻子已经不贞了。"在此后的 99 个晚上丈夫们继续开会并赞扬他们的妻子，但在第 100 个晚上，他们全都悲鸣恸哭并祈求严厉地惩罚他们的妻子。

为了理解在这个寓言中发生了什么，首先注意到若只有一个妻子不贞，则因为（知道没有另外的不贞女人，且若有的话他是知道的）她丈夫能够立刻知道这个不贞的女人是他的妻子，所以在传教徒访问后的第一天晚上就会悲鸣恸哭。而且，由归纳法可以证明，对于 1 与 100 之间的任一正整数 k，如果恰有 k 个不贞的妻子，那么在传教徒访问后的连续 $k-1$ 个晚上，所有的丈夫仍全都赞扬自己的妻子，但在第 k 个晚上，k 个不贞妻子的丈夫会悲鸣恸哭。于是，在 99 个赞扬之夜过后的第 100 个晚上，每个丈夫都知道一定有 100 个不贞的妻子，包括他自己的妻子在内。

现在，让我们试问一下，这个传教徒告诉了这些丈夫们他们所不知道的什么？每个丈夫都已经知道了 99 个不贞的妻子，故这对任何人来说都不是新闻。
67 但"这个传教徒对所有男人做了一个声明"是共同知识，从而这个传教徒所声明的内容，即有一个不贞的妻子，也就成了所有男人中间的共同知识。在传教徒宣告之前，每个形如"（每个丈夫知道）^{k} 有一个不贞的妻子"的判断对于 $k \leqslant 99$ 都是正确的，但对 $k=100$ 就不正确了。例如，若从 1 到 100 对丈夫们编号，则 1 已经知道 2 已经知道 3 已经知道……99 已经知道 100 的妻子是不贞的，但 1 不知道 2 已经知道 3 已经知道……99 已经知道 100 已经知道 1 的妻子是不贞的。因而，从这个寓言中引申出的含义是，从一个共同知识的事实推出的结果与从（例如）只知道每个人已经知道每个人已经知道的一个事实推出的结果可以非常不同。

2.8 贝叶斯博弈

一个具有**不完全信息**（incomplete information）的博弈是这样的一个博弈，在局中人能够开始计划他们在博弈中的行动的初始时间点上，某些局中人就已经具有关于这个博弈不为其余局中人所知道的私人信息。例如，在我们的简单摊牌博弈中，如果局中人 1 在知道博弈中抽牌做何用处的实际规则之前就已经抽出一张牌并看了它，那么这个博弈就成为不完全信息博弈了。具有不完全信息的博弈时常出现于现实情形中。我们经常要研究的局势是，其中各种局中人当前已经拥有了他们久已了解的私人信息，而将博弈的起点定义在他们知道他们的私人信息之前的某过去时点又可能是不自然的。更何况，一个局中人私人

信息的某些部分对他来讲是如此地基本，以致在他知道这个信息（例如关于该局中人的性别、母语及风险厌恶水平等信息）之前讨论他的行动计划毫无意义。因此，我们应该允许一个局中人在他开始计划其博弈行动的初始时点上，可能已经具有某些私人信息。一个局中人在这个时点上所具有的初始私人信息被称为该局中人的**类型**（type）。

不完全信息博弈可以通过利用一个历史机会结点以描述局中人类型的随机决定，从而模型化为展开型。不过，正如上文所指出的那样，将博弈的起点定义在局中人知道他们的类型之前的某个过去时点，或许有其难以解释之处。此外，2.2 节中关于策略型正规表示充分性的论断不能应用于不完全信息博弈，这也是值得慎重考虑的。这个论断的关键之处在于假定，每个局中人应该能在展开型博弈的根处或之前就计划其行动。但对于不完全信息博弈，这个假定简直就是错的（因为根表示了局中人知道他们的类型之前的时点，而一个局中人的类型是他开始思考这个博弈时业已拥有的私人信息）。因此，**哈森伊**（Harsanyi，1967～1968）指出，需要用策略型的一般推广——所谓贝叶斯型来表示不完全信息博弈。贝叶斯型给了我们一个几乎与策略型一样简单的表示博弈的方式（至少与展开型相比是如此），但它又不要求我们做到让局中人在知道任何私人信息之前就选取他们的策略。 68

为了定义一个**贝叶斯博弈**（Bayesian game）［或**贝叶斯型博弈**（game in bayesian form）］，我们必须确定局中人集 N，并对 N 中每个局中人 i 规定可能**行动**（actions）*集 C_i、可能**类型**（types）集 T_i、一个概率函数 p_i 及一个效用函数 u_i，我们令

$$C=\bigtimes_{i\in N}C_i,\quad T=\bigtimes_{i\in N}T_i$$

即 C 是局中人在博弈中可使用的所有可能的行动组合所组成的集，T 是局中人在博弈中可能有的所有可能的类型组合所组成的集。对于每个局中人 i，我们令 T_{-i} 表示除 i 之外其余所有局中人的所有可能的类型组合所组成的集，即

$$T_{-i}=\bigtimes_{j\in N-i}T_j$$

贝叶斯博弈中的概率函数 p_i 一定是一个从 T_i 到 T_{-i} 上概率分布集 $\Delta(T_{-i})$ 的函数。也就是说，对 T_i 中任一可能类型 t_i，这个概率函数确定了集 T_{-i} 上的一个概率分布 $p_i(\cdot|t_i)$，它表示局中人 i 在自己的类型为 t_i 下对其余局中人类型的信念。因此，对 T_{-i} 中任一 t_{-i}，$p_i(t_{-i}|t_i)$ 表示局中人 i 在自己的类型为 t_i 之下，对其他局中人的实际类型组合是 t_{-i} 这一事件所赋予的主观概率。

---

* 不完全信息博弈中的行动如后文所定义，不同于前文所说的行动，而是介于前文所定义行动与策略之间的一个概念——译者注。

69 对于 N 中任一局中人 i，贝叶斯博弈中的效用函数 u_i 一定是一个从 $C\times T$ 到实数集 **R** 的函数。也就是说，对 $C\times T$ 中任一行动与类型组合 (c, t)，效用函数 u_i 必须确定一个数 $u_i(c, t)$，而且如果局中人的实际类型全都与 t 中一样且所有局中人都选择如 c 中所规定的行动，那么 $u_i(c, t)$ 就是局中人 i 将得到的用某种冯·诺依曼和摩根斯特恩效用尺度度量的支付。

这些结构一起定义了一个贝叶斯博弈 Γ^b，故我们可以写为

$$\Gamma^b=\{N, (C_i)_{i\in N}, (T_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\} \tag{2.2}$$

当且仅当，集 N、C_i 和 T_i（对每个 i）全都是有限集时，Γ^b 才是**有限的**（finite）。当我们研究这样一个贝叶斯博弈 Γ^b 时，我们假定每个局中人 i 都知道这个博弈的整个结构（如前所定义的）和自己在 T_i 中的实际类型，并且这个事实是 N 中所有局中人中间的共同知识。

为了避免混淆，我们把贝叶斯模型中的选择对象称作一个“行动”而不是一个“策略”。相对于作为基础的展开型博弈来说，贝叶斯博弈中一个局中人的一个行动表示了这样的一个计划，即在他知道自己的类型之后，为自己认为可能的每个偶然事件确定一个动作。* 另一方面，局中人 i 在贝叶斯博弈 Γ^b 中的一个**策略**（*strategy*）被定义为从他的类型集 T_i 到他的行动集 C_i 的一个函数。

正如前面所指出的，如果我们假定局中人 1 在博弈开始时已经知道牌的颜色，则我们的简单摊牌博弈就成为一个不完全信息博弈。这个博弈的贝叶斯型表示就具有 $N=\{1, 2\}$，$T_1=\{1.a, 1.b\}$，$T_2=\{2\}$，$C_1=\{R, F\}$ 和 $C_2=\{M, P\}$。概率函数是

$$p_2(1.a|2)=.5=p_2(1.b|2)$$

这是因为局中人 2 认为红色牌与黑色牌是有同样的可能性；和

$$p_1(2|1.a)=1=p_1(2|1.b)$$

这又是因为局中人 1 对局中人 2 的类型不存在不确定性。效用函数 $\{u_1(c, t), u_2(c, t)\}$ 依赖于 $(c, t)=(c_1, c_2, t_1)$，如表 2-13 所示。

70 **表 2-13　　所有类型与行动组合的期望支付**

	$t_1=1.a$			$t_2=1.b$	
	M	P		M	P
R	2, -2	1, -1	R	-2, 2	1, -1
F	1, -1	1, -1	F	-1, 1	-1, 1

* 此处的动作即传统意义上的行动（*move*），以示与本节行动（*action*）的区别而暂用——译者注。

作为贝叶斯博弈的另外一个例子，考虑如下所述的讨价还价博弈，其中局中人1是某物品的卖者，而局中人2是唯一的潜在买主。每个局中人知道此物品对自己是有价值的，但认为它对另一个局中人的价值（以美元计）可能是从1到100的任一整数，每个数的概率为1/100。在这个讨价还价博弈中，每个局中人将同时地在0～100之间出价（以美元计）以交易该物品。如果买者的出价大于或等于卖者的出价，那么他们将以他们出价的平均值成交，否则就交易不成。让我们假定这两个局中人都是风险中性的，从而我们可以把效用支付等同于交易的货币收益。于是这个博弈可以表述为如下的贝叶斯博弈。局中人集是 $N=\{1, 2\}$；对每个局中人 i，他的可能类型集是 $T_i=\{1, 2, \cdots, 100\}$（这里把一个局中人的类型与这个物品对他的价值等同），且他的可能行动集（出价）是 $C_i=\{0, 1, 2, \cdots, 100\}$。概率函数是

$$p_i(t_{-i}\mid t_i)=1/100,\quad \forall i\in N,\quad \forall t=(t_{-i}, t_i)\in T$$

对 C 中任一 c 和 T 中任一 t，效用支付是

$$\begin{aligned} u_1(c, t)&=(c_1+c_2)/2-t_1 && \text{若}\quad c_2\geqslant c_1\\ u_2(c, t)&=t_2-(c_1+c_2)/2 && \text{若}\quad c_2\geqslant c_1\\ u_1(c, t)&=0=u_2(c, t) && \text{若}\quad c_2<c_1 \end{aligned}$$

尽管为有限博弈提出一般记号较为容易，但是分析具有无限类型集的例子常常比分析具有很大的有限类型集的例子更为容易。在无限类型的情况下，在记号上唯一复杂的地方在于，概率分布 $p_i(\cdot\mid t_i)$ 必须定义在 T_{-i} 的所有可测子集上，而不是只在 T_{-i} 的各个元素上。[从而若 R_{-i} 是 T_{-i} 的一个子集，则 $p_i(R_{-i}\mid t_i)$ 表示局中人 i 在自己的类型为 t_i 下对其余局中人的类型组合在 R_{-i} 中这个事实所赋予的主观概率。] 例如，考虑上述买者－卖者博弈的一个修改模型，其中每个局中人的类型集扩大为包括0～100之间的全部实数，使得 $T_1=T_2=[0, 100]$。对于每个局中人 i 和 T_i 中每个 t_i，令 $p_i(\cdot\mid t_i)$ 是 $[0, 100]$ 上的均匀分布，则对于任意两个数 x 和 y 使得 $0\leqslant x\leqslant y\leqslant 100$，局中人 i 在自己的类型为 t_i 下对另一个局中人的类型为 x 与 y 之间这一事件所规定的概率是 71

$$p_i([x, y]\mid t_i)=(y-x)/100$$

（这里 $[x, y]$ 表示实数轴上 x 到 y 的闭区间。）这个博弈已经被**查特吉和塞缪尔森**（Chatterjee and Samuelson, 1983）研究过了。

我们称贝叶斯博弈中的信念 $(p_i)_{i\in N}$ 是**一致的**（consistent），当且仅当存在类型组合集上的某个共同先验分布使得每个局中人在给定他的类型下，其信念恰好是通过贝叶斯公式从先验分布算出的条件概率。也就是说（在有限类型集的情况下），信念是一致的，当且仅当在 $\Delta(T)$ 中存在某个概率分布 P 使得

$$p_i(t_{-i} \mid t_i) = \frac{P(t)}{\sum_{s_{-i} \in T_{-i}} P(s_{-i}, t_i)}, \quad \forall t \in T, \ \forall i \in N$$

[其中 (s_{-i}, t_i) 表示 T 中这样的类型组合，使得局中人 i 的类型是 t_i，而其余局中人的类型与 s_{-i} 相同。只要 t、t_{-i} 及 t_i 在同一公式中一起出现，t 就是局中人 i 的类型为 t_i 而其余局中人的类型如同 t_{-i} 中相应的类型，故 $t=(t_{-i}, t_i)$。] 例如，在我们的简单摊牌博弈中的信念是与先验分布

$$P(1.a, 2) = P(1.b, 2) = 0.5$$

一致的。前面所述的有限讨价还价博弈的信念是与先验分布

$$P(t) = 1/10000, \ \forall t \in T = \{1,2,\cdots,100\} \times \{1,2,\cdots,100\}$$

一致的。在修改后的无限博弈中，信念是与 $[0, 100]^2$ 上的均匀分布一致的。

72 应用博弈理论中所研究过的大多数贝叶斯博弈，以及本书中出现的所有正式的例子，都具有在这个意义上与先验分布一致的信念。（事实上，2.1 节的定义隐含地把一致性要求强加于展开型博弈，尽管定义一个广义展开型博弈是容易的。在这种广义展开型中，对于跟随每一机会结点的可选枝集都可以规定每个局中人不同的主观概率分布。）出现利用这种一致性模型的趋势的一个原因是一致性简化了模型的定义。T 上共同先验分布确定了所有的概率函数，而且规定一个概率分布比规定依赖于类型的许多概率函数较为简单。此外，不一致性时常看起来像模型的一个显著不自然的特征。在一致的模型中，局中人之间信念的差异可以用信息的差异加以解释，而不一致的信念涉及见解上的差异，这种差异是不能由观察的差异导出的，所以必须简单地假设为先验的。尽管如此，设想有着不一致信念的博弈是可能的。例如，在运动比赛中，如果两个队的每一队教练都相信自己队在对另一队的下一次比赛中获胜的概率有2/3，这是他们之间的共同知识，则这两个教练的信念是不可能与一个共同先验分布相一致的。在一致的模型中，每队教练相信自己队获胜的概率有 2/3 是可能发生的，但这一信念差异不可能是教练中间的共同知识（参见奥曼，1976）。

因为贝叶斯博弈包含概率函数和效用函数二者，故两个贝叶斯博弈的等价性可以由第 1 章的定理 1.2 推出。因此，两个贝叶斯博弈 $\{N, (C_i)_{i\in N}, (T_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\}$ 和 $\{N, (C_i)_{i\in N}, (T_i)_{i\in N}, (q_i)_{i\in N}, (w_i)_{i\in N}\}$ 是 [**完全** (fully)] **等价的** (equivalent)，当且仅当对于 N 中每一个 i，存在函数 $A_i: Ti \to \mathbf{R}$ 和 $B_i: T \to \mathbf{R}$ 使得对 T_i 中的每一个 t_i，都有 $A_i(t_i) > 0$ 且

$$q_i(t_{-i} \mid t_i) w_i(c,t) = A_i(t_i) p_i(t_{-i} \mid t_i) u_i(c,t) + B_i(t)^*$$

---

* 原文此式有印刷错误，现已改正——译者注。

$$\forall c \in C, \quad \forall t_{-i} \in T_{-i}$$

这就是说，两个贝叶斯博弈是等价的，当且仅当，对于每个局中人的每个可能类型，这两个博弈把它们的概率和效用函数归结为在定理 1.2 的意义上是决策等价的。（注意，乘法系数 $A_i(t_i)$ 只依赖于局中人 i 的类型，而加法项 $B_i(t)$ 则可以依赖于所有局中人的类型。）

73

利用这个等价判据，可以证明任何有限类型集的贝叶斯博弈等价于一个一致信念的贝叶斯博弈。给定如上定义的任何博弈 Γ^b，用下式我们可以构造一个等价的贝叶斯博弈：对于 N 中每个 i、T 中每个 t 及 C 中每个 c，令

$$q_i(t_{-i}|t_i)=1/|T_{-i}| \text{ 和 } w_i(c,t)=|T_{-i}|p_i(t_{-i}|t_i)u_i(c,t) \tag{2.3}$$

（这里对任何有限集 X，$|X|$ 表示集 X 中元素的个数。）事实上，注意到在博弈 $(N, (C_i)_{i\in N}, (T_i)_{i\in N}, (q_i)_{i\in N}, (w_i)_{i\in N})$ 的一致先验分布下，类型是独立均匀分布的，因此，只要我们考虑的是具有一般效用函数的有限贝叶斯博弈，信念一致性和类型独立性就不可能是一个在我们分析中有问题的假定。

然而，如果我们想要把注意力放在具有特殊结构的效用函数上，那么一致性和类型独立性就可能很重要。例如，我们或许想假定每个局中人的效用支付仅依赖于其类型［这被称为**个人价值假定**（private values assumption）］，或者我们又想假定货币财富以简单的加性分离型进入每个局中人的效用函数［如在做**可转让效用**（transferable utility）假设时］，则公式（2.3）所构造的效用函数 w_i 可能不满足这些条件，即使这时函数 u_i 确实是满足它们的。因此，在关于效用函数的这种附加假定的范围内，一致性可以是关于 Γ^b 要做的一个重要的且有用的假定。再则，当类型集是无限集时，利用公式（2.3）的构造是不可能的，故无限贝叶斯博弈的一致性仍是一个不同寻常的假定。

遵循 R. 塞尔滕的一个建议，哈森伊（1967～1968）讨论了用一个策略型博弈表示任何一个贝叶斯博弈 Γ^b［如式（2.2）所定义］的一种方式，我们称之为**类型代理人表示**（type-agent representation）。［哈森伊称之为**塞尔滕博弈**（Selten game）或**后验彩票模型**（posterior-lottery model）。］在类型代理人表示中，所给定贝叶斯博弈中的每个局中人，其每个可能类型都有一个局中人或代理人。不失一般性，我们可以假定不同的集合 T_i 是不相交的，因为如果有必要的话，可以对类型重新标号，因此如果 $i\neq j$ 则 $T_i \cap T_j = \varnothing$。于是，如上给出贝叶斯博弈 Γ^b，类型代理人表示中的局中人集是

$$T^* = \bigcup_{i\in N} T_i$$

74

对于 N 中任一 i 和 T_i 中任一 t_i，类型代理人表示中对代理人 t_i 可用的策略集是 $D_{t_i} = C_i$。其思想是说，如果 t_i 是局中人 i 的实际类型，那么类型代理人表示中，代表 t_i 的那个代理人负责选择 i 在 Γ^b 中使用的行动。在类型代理人表示中，T_i 中任一代理人 t_i 的效用支付定义为，给定 t_i 是局中人 i 的实际类型

下 i 在 Γ^b 中的条件期望效用支付。形式上，对 N 中任一局中人 i 和 T_i 中任一类型 t_i，在类型代理人表示中的效用函数 $v_{t_i}: \times_{s\in T^*} D_s \to \mathbf{R}$ 被做如下定义：对 $\times_{s\in T^*} D_s$ 中的任一 $d=(d(s))_{s\in T^*}$ 均有

$$v_{ti}(d)=\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p_i(t_{-i}\mid t_i)\,u_i\Big((d(t_j))_{j\in N},(t_j)_{j\in N}\Big)$$

（这里，对 $N-i$ 中任何 j，只要 t_j 和 t_{-i} 出现在同一公式中，则 t_j 是 t_{-i} 的第 j 个分量。）借助于这些定义，类型代理人表示 $(T^*,(D_t)_{t\in T^*},(v_t)_{t\in T^*})$ 实际上是一个策略型博弈，且可以被视为给定贝叶斯博弈的一个表示。

2.9 不完全信息博弈的建模

本章所讨论的一些模型为我们分析在任何经济、政治及社会的局势中出现的冲突提供了一个一般框架。然而，对于通过简单的博弈模型能否恰如其分地准确描述现实局势之可能性表示担忧，自有其根本原因。特别地，在局中人的信念是用主观概率刻划，以致一个局中人对另一个人的主观概率的判断值得疑问时，实际建模的困难通常也就出现了。

举例而言，假设把我们的简单摊牌博弈换成“填题测验”（trivia guiz）博弈，即其中结果依赖于局中人 1 是否知道某个随机选取问题的正确答案（譬如，“美国是为了纪念谁而命名的?”或“谁写过“《博弈论与经济行为（Theory of Games and Economic Behavior）》*一书?”），而不是牌的颜色。也就是说，博弈进行的步骤是：（1）两个局中人都放 1 美元在一只罐中；（2）从一大堆问题中随机地抽取一个问题，并向两个局中人宣读；（3）局中人 1 可以加注 1 美元或认输；（4）若局中人 1 加注，则局中人 2 必须对抗（她再加 1 美元）或放
75 弃；（5）局中人 1 试图回答问题。如果局中人 1 回答正确或者他加注时未遭对抗，则他赢得罐中的钱；如果局中人 1 认输或者在局中人 2 对抗时，局中人 1 回答不正确，则 2 赢钱。

在这个博弈中，当问题已经宣读之后，关于局中人 1 是否知道被宣读问题的答案，这有着基本的不确定性。贝叶斯决策理论告诉我们，局中人 2 一定能用某个介于 0 与 1 之间的数 Q 来描述她关于这个基本不确定性的信念，Q 表示了她对局中人 1 知道答案这一事件的主观概率。在简单摊牌博弈中，在博弈开始时抽取一张红色牌的概率，客观上为 1/2，因此假定这个数字是共同知识

* 该书中译本书名为《竞赛论与经济行为》，王建华、顾琳琳 译，科学出版社，1963 年。为与本书名一致，略做修改——译者注。

是合乎情理的。但在这个琐题测验博弈中，假设局中人 1 关于局中人 2 的主观概率 Q 会有某种不确定性是有道理的。还有，贝叶斯决策理论告诉我们，局中人 1 应该能用 0 到 1 区间上的某个主观概率分布描述他对 Q 的信念。除此之外，如果我们不假定局中人 1 对 Q 的信念是共同知识，那么局中人 2 一定能用 0 到 1 区间上所有概率分布组成的集中的某个主观概率分布来描述她关于 1 关于 Q 信念的信念。如果这些信念依次都不是共同知识，那么局中人 2 的类型作为包括她所知道但不是共同知识的一切信息的一个明细单，一定包含了 0 到 1 区间上概率分布集上的概率分布的明细单，这是一个异常复杂的无限维向量空间上的一个点！

可能会寄希望于这些关于信念的信念的信念可能会与预测或解释局中人行为的根本问题不相关，但是（如同 2.7 节的寓言所说明的）我们不可能指望这种无关性。当局中人 1 不知道答案时，如果他认为局中人 2 对抗的概率小于 1/3，则他可能要加注（作为一种吓唬）。可以自然而然地预期到，其他情况不变，Q 越低，局中人 2 越有可能对抗加注。从而局中人 1 赋予 Q 低值的概率越大，在他不知道答案的情况下加注的可能性越低。因而，如果 2 认为 1 对低 Q 值赋予高概率，那么认为 1 加注是 1 知道答案强有力的证据，从而反过来降低了她对抗加注的意愿。（注意，Q 是 2 在知道 1 是否加注之前所估计 1 知道答案的先验概率。她在 1 加注后关于 1 的信念，由贝叶斯公式而同时依赖于 Q 和 1 在他不知道答案时可能加注的概率。）这样一来，2 关于 1 的关于 2 关于 1 是否知道答案的信念的信念的信念，确实是确定 2 在这个博弈中是否对抗加注的一个重要因素。 76

一般地，因为一个局中人的类型是他所知道的不是共同知识的一切的概括，所以共同知识越少则可能类型集越大，这是一个似非而是的结论。但是，作为贝叶斯博弈结构一个部分的这些可能类型集，都假设是局中人中间的共同知识。因此，为了描述一个其中很多人对相互的信息和信念具有实质不确定性的局势，我们可能不得不提出一个具有很大类型集的非常复杂的贝叶斯博弈模型，并且假定这个模型是局中人中间的共同知识。

这一结论提出了这样一个问题，是否可能构造一个局势，对此局势没有足够大的类型集来包含假设局中人所具有的全部私人信息，以致没有一个贝叶斯博弈能够表示这个局势呢？默顿斯和赞米尔（Zamir，1985）在哈森伊的奠基性工作（1967～1968）的基础上考虑了这个问题。在某些技术假定下，因为能够构造充分大的**泛信念空间**（universal belief space）来作为每个局中人的类型集，所以不可能找到这样的怀疑贝叶斯博弈模型一般性的一个反例。不幸的是，这个泛信念空间是一个庞大而又复杂的数学对象。因此，实际分析则要求有足够多的共同知识以让我们使用某个较小但更便于处理的集合作为我们贝叶斯博弈中的类型集。因而，尽管对任一给定局势构造一个准确的模型可能是极其困难的，但我们至少可以相信，永远不可能有人证明某个特殊的冲突局势不

可能用任何一个充分复杂的贝叶斯博弈来描述。

为了理解这个结论，假设有某个特殊的冲突局势，而我们要用一个贝叶斯型博弈来表示它。假设我们能询问卷入这个局势中的各种局中人或参与者，并且只要我们保证我们问的是一些有意义的问题，他们都将诚实地回答我们的问题。(让我们假定，由于他们认为我们是无偏见的科学观察者，且不会泄漏任何信息给其他人，所以他们愿意诚实回答。)

77 一个局中人在这个博弈中的**类型**（type）一定要说明他现在对这个博弈所拥有的一切相关私人信息（即不是共同知识的信息）。我们为一个局中人在这个博弈中定义一个**行动**（action）为他的一个计划，给定他目前的类型，该计划对未来每个可能的偶然事件为他规定一个动作。因此，我们可以假设，所有局中人现在（当每个局中人都知道自己的类型时）同时选择行动，并且他们此后在博弈中不再做更多的决策。

在一个局中人可能具有不同信息的冲突局势中，有几个基本问题：这个博弈中实际有多少个局中人？对每个局中人，其怎样的动作或行动是可行的？结果将如何依赖于局中人的行动？局中人在可能结果集上的偏好是怎样的？哈森伊（1967～1968）论证了所有这些问题都可以用一个统一的方式来摸拟。关于一个局中人是否“在这个博弈中”的不确定性，可通过在他被假设“在这个博弈外”时他只允许有一个可行行动（“不参与”）而被转化为其可行行动集的不确定性。关于一个特定的行动对局中人 i 是否可行的不确定性，可通过说他在使用假设为不可行的行动时将得到某个非常坏的结果，同样也转化为结果如何依赖于行动的不确定性。换句话说，只要一个行动 c_i 被假设为对局中人 i 是不可行的，我们可以简单地让它等同于另外某个可行行动 d_i 并假设在我们的博弈模型中使用 c_i 得到与 d_i 一样的结果（于是在我们的博弈模型中 c_i 被再理解为“如果你能用 c_i 就用 c_i，否则用 d_i”）。关于结果如何依赖于行动的不确定性和关于对结果偏好的不确定性，可以通过把每个局中人的效用模型化为局中人的行动组合集直接到可能效用支付集的函数（表示从行动到结果的函数与从结果到效用支付的函数的复合函数）而得到统一。于是，我们能够把这个博弈中所有的基本不确定性模型化为效用支付如何依赖于行动组合的不确定性，而这种不确定性形式上可以通过引入一个未知参数 $\tilde{\theta}$ 到效用函数中而得以表示。

因此，用 N 表示所有局中人集，他们是被任何一个人认为卷入这个局势的人。对 N 中每个 i，令 C_i 表示他所有的可能行动集，而任何一个人都相信这些行动对局中人 i 是可行的。令 Θ 表示参数 $\tilde{\theta}$ 的可能值集，我们称之为这个
78 博弈的基本不确定性域。记 $C=\times_{j\in N}C_j$，则每个局中人 i 的效用支付与局中人的行动组合及未知参数 $\tilde{\theta}$ 的依赖性可以用函数 $w_i: C\times\Theta\to\mathbf{R}$ 表示。

在某些局势中，基本不确定性域可以是明确地予以定义的。在我们的简单摊牌博弈中，$\tilde{\theta}$ 可以等同于随机抽取一张牌的颜色，故 $\Theta=$ {红，黑}。在琐题测验博弈中，基本不确定性是关于局中人 1 是否知道答案，故 $\Theta=$ {知道答

案，不知道答案]。在卖者与买者之间对某物品的讨价还价博弈中，基本不确定性是每个局中人对该物品的价值判断，故 Θ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集，Θ 中任一向量的第一个分量表示物品对卖主的价值（比如以美元计），第二个分量表示物品对买主的价值。

一般地，将 Θ 与 $\mathbf{R}^{C\times N}$ 的一个子集等同起来总是可能的，因为 $\tilde{\theta}$ 在博弈分析中的唯一任务是识别每个局中人的期望效用支付是如何依赖于 C 的。如果我们做出了这个等同，那我们就可以简单地定义每个 w_i 函数为：对 N 中的每个 i，C 中的每个 c 及 Θ 中的每个 θ，均有 $w_i(c,\theta)=\theta_{i,c}$。进一步而言，如果假设 C 是有限集，那么，不失一般性，可能假定局中人都具有有界的效用函数，故 Θ 是有限维向量空间中一个有界（紧）闭子集。

为了继续默顿斯和赞米尔对泛信念空间的构造，我们需要某些更高深的数学知识［拓扑学和测度论，如罗伊登（Royden，1968）；柯尔莫哥洛夫和福明（kolmogorov and Fomin，1970）；也可参见第 3 章的 3.13 节］。数学基础不够的读者可以浏览或绕过这个构造［直到下面的（2.4）式］，本书后面的内容与此毫不相干。

给定任一度量空间 Z，令 $\Delta(Z)$ 表示 Z 上所有概率分布组成的集，这些分布是定义在 Z 上的波雷尔可测子集所组成的波雷尔域上的。对 Z 赋予弱拓扑，这个弱拓扑是这样定义的，即对每个有界连续函数 $f:Z\to\mathbf{R}$，积分 $\int_{x\in Z}f(x)p(dx)$ 是 $\Delta(Z)$ 中 p 的连续函数。若 Z 是紧集，则 $\Delta(Z)$ 也是紧的，且可度量化［具有普罗霍洛夫（Prohorov）度量］。比林斯利（Billingsley，1968）对这个结论给出了完整的推导。

结构 $(N,(C_i)_{i\in N},\Theta,(w_i)_{i\in N})$ 用来描述问题中的局势是不充分的，因为这个结构没有指出局中人关于未知参数 $\tilde{\theta}$ 的信念或信息可能是什么。贝叶斯决策理论指出，每个局中人 i 必须有 Θ 上一个主观概率分布，我们称这个分布为 i 的**一阶信念**（first-order beliefs）。令

$$B_i^1=\Delta(\Theta) \tag{79}$$

则 B_i^1 包含了局中人 i 所有可能的一阶信念。

在一个博弈中，局中人的最优决策一般会依赖于他所预期的其余局中人会做什么。而他预期其余局中人会做什么又依赖于他所想的他们相信什么。因此，我们现在要问，局中人 i 所想的其余局中人的一阶信念是什么呢？再则，为了描述局中人 i 所相信的其余局中人的信念是准确的还是不准确的，我们要问，关于其余局中人的一阶信念与 $\tilde{\theta}$ 的真实值之间的关系，局中人 1 相信什么？贝叶斯决策理论意味着，每个局中人 i 关于这些问题的信念必须用 $\Theta\times(\times_{j\in N-i}B_j^1)$ 上某个主观概率分布来描述，我们称这个分布为 i 的**二阶信念**（second-order beliefs）。令

$$B_i^2 = \Delta(\Theta \times (\underset{j \in N-i}{\times} B_j^1))$$

则 B_j^2 包含了局中人 i 所有可能的二阶信念。

依这种方式定义，则局中人 i 的二阶信念隐含地确定了他的一阶信念。事实上，一阶信念是二阶信念关于 Θ 的边缘分布。也就是说，对于 B_j^2 中任何一个二阶信念 β_i^2，对应于 β_i^2 的一阶信念可以表示为 $\phi_i^2(\beta_i^2)$，这里

$$[\phi_i^2(\beta_i^2)](\Psi) = \beta_i^2[\Psi \times (\underset{j \in N-i}{\times} B_j^1)], \quad \forall \Psi \subseteq \Theta$$

对 $\{3, 4, 5, \cdots\}$ 中的每个 k，我们现在可以归纳地定义一个局中人 i 的**k阶信念**（k-order beliefs）为，他关于其余局中人的 $(k-1)$ 阶信念及关于这些信念对基本未知参数 θ 之关系的信念。即对每个局中人 i 和每个正整数 k，我们归纳地定义

$$B_j^k = \Delta(\Theta \times (\underset{j \in N-i}{\times} B_j^{k-1}))$$

从而局中人 i 的 k 阶信念可以用 B_i^k 中一个点表示。如前所示，局中人 i 的 k 阶信念通过函数 $\phi_i^{k-1}: B_i^k \to B_i^{k-1}$ 确定了他的 $(k-1)$ 阶信念（并由归纳法，确定了他所有的低阶信念），而函数 ϕ_i^{k-1} 是被这样定义的：对于 B_i^k 中任一 β_i^k 和 $\Theta \times (\times_{j \in N-i} B_j^{k-2})$ 上的任一波雷尔可测子集 Ψ，

$$[\phi_i^{k-1}(\beta_i^k)](\Psi) = \beta_i^k\left(\{(\theta, (\beta_j^{k-1})_{j \in N-i}) \mid \left(\theta, \{\phi_j^{k-2}(\beta_j^{k-1})\}_{j \in N-i}\right) \in \Psi\}\right)$$

80 （我们在这里利用了每个局中人的信念满足概率运算定律是共同知识这一假定。）

于是局中人 i 的**泛信念空间**（universal belief space）是

$$B_i^\infty = \{\beta_i = (\beta_i^1, \beta_i^2, \cdots) \in \overset{\infty}{\underset{k=1}{\times}} B_j^k \mid \beta_i^{k-1} = \phi_i^{k-1}(\beta_i^k), \ \forall k \geqslant 2\}$$

在基本不确定性域 Θ 是紧度量空间和局中人集 N 是有限集的假定之下，B_i^∞ 也是一个紧集（具有乘积拓扑）。

B_i^∞ 中任一 β_i 诱导出 $\Theta \times (\times_{j \in N-i} B_j^\infty)$ 上一个概率分布，用 $q_i(\cdot \mid \beta_i)$ 表示这个分布。若 Ψ 是 $\Theta \times (\times_{j \in N-i} B_j^\infty)$ 的任一闭子集，则

$$q_i(\Psi \mid \beta_i) = \lim_{k \to \infty} \beta_i^k\left(\{(\theta, (\beta_j^{k-1})_{j \in N-i}) \mid (\theta, (\beta_j)_{j \in N-i}) \in \Psi\}\right)$$

事实上，默顿斯和赞米尔已经证明了，$q_i(\cdot)$ 是 B_j^∞ 与 $\Delta(\Theta \times (\times_{j \in N-i} B_j^\infty))$ 之间的一个同胚。也就是说，局中人 i 的泛信念空间包含了关于 Θ 中基本不确定性及其余局中人之信念的所有可能（波雷尔可测的）信念。

注意，随机变量 $\tilde{\theta}$ 不能直接影响局中人 i 在博弈中的任何行为，除了在一定程度上，在他的实际信念中反映了他关于 $\tilde{\theta}$ 可能拥有的信息，且这个信息用

β_i 表示。从而我们可以在概率与效用函数之外对基本不确定性变量 θ 积分，而与预测局中人行为有关的任何结构都不会因此而受到影响。对于 B_i^∞ 中的任一 β_i，令 $p_i(\cdot|\beta_i)$ 是 $q_i(\cdot|\beta_i)$ 关于 $\times_{j\in N-i}B_j^\infty$ 的边缘概率分布。对于 $\times_{j\in N}B_j^\infty$ 中任一信念组合 $\beta=(\beta_j)_{j\in N}$，令 $\bar{q}_i(\cdot|\beta)$ 表示在 i 知道其余每个局中人的实际信念如 β 所规定的条件下，局中人 i（用贝叶斯公式）从 $\Theta\times(\times_{j\in N-i}\beta_j^\infty)$ 上先验分布 $q_i(\cdot|\beta_i)$ 所导出的 Θ 上条件分布。对于 C 中任一行动组合 c 和 $\times_{j\in N}B_j^\infty$ 中任一信念组合 $\beta=(\beta_j)_{j\in N}$，令 $u_i(c,\beta)$ 表示用 Θ 上分布 $\bar{q}_i(\cdot|\beta)$ 而得到的 $w_i(c,\theta)$ 的条件期望值，即

$$p_i(\Psi|\beta_i)=q_i(\Theta\times\Psi|\beta_i),\quad \forall\Psi\subseteq\underset{j\in N-i}{\times}B_j^\infty$$

$$u_i(c,\beta)=\int_{\theta\in\Theta}w_i(c,\theta)q_i(d\theta|\beta)$$

由此一来，最终得到了泛贝叶斯博弈为 81

$$(N,(C_i)_{i\in N},(B_i^\infty)_{i\in N},(p_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}) \tag{2.4}$$

根据构造，每个类型集 B_i^∞ 足够地大，以致于包括了 i 关于 Θ 中基本未知参数 θ 以及关于其他局中人与这个基本未知参数有关的信息或信念所有的可能状态。

正如前面所指出的，这些泛信念空间如此之大，以至于我们实际上对将它用于分析局势几乎不抱什么希望，除非可以找到另外某些也可描述该局势但类型空间较小的贝叶斯博弈模型。关于泛信念空间和泛贝叶斯博弈模型存在性的这些结论，形成了一个理论证据，在任何一个给定具有不完全信息的局势中，总应该存在一个能描述所有信息与激励结构的贝叶斯博弈模型，因此我们有信心认为对贝叶斯博弈的结构不存在实质性的限制。我们可以确信，绝不会有人能找到一个现实的冲突局势并证明它不可能被任何一个贝叶斯博弈模型所描述。

我们说，$\times_{i\in N}R_i$ 是 $\times_{i\in N}B_i^\infty$ 的一个**信念闭的**（belief-closed）子集，当且仅当，对于每个局中人 i，$R_i\subseteq B_i^\infty$，并且对于 R_i 中的每个 β_i，概率分布 $p_i(\cdot|\beta_i)$ 都对集 $\times_{j\in N-i}R_j$ 指定概率 1。如果局中人的类型组合在 $\times_{i\in N}R_i$ 的信念闭子集中，那么这个事实可以成为共同知识而无需影响任何局中人的信念。因此，信念闭的子集与那些发生时实际上是共同知识的事件相对应。

为了得到一个易于分析处理的贝叶斯博弈，我们必须假定关于这个博弈的结构有足够多的共同知识，以至每个局中人的私人信息可以用一个变量来表示，且这个变量在一个易于处理的很小的可能类型集上取值。实质上，我们必须假定局中人类型能用泛信念空间的某个小信念闭子集中的点来表示。

然而，对实际建模来说，将类型视作泛信念空间中的点，实际上并不是很有帮助的。实践中常用于构造易于处理模型的方法是，假定每个局中人的私人信息和信念只依赖于某个他观察到的且在一个适当小的范围内变动的随机变

量，因此可以把这个随机变量与他的类型等同起来。如果我们再假定这些随机
82 变量和基本未知参数 $\tilde{\theta}$ 都是从一个作为共同知识的联合先验分布抽取的，那么贝叶斯公式将让我们能导出每个局中人作为其类型的所有各阶信念。

例如，为了得到项题测验的一个易于处理的模型，我们假设每个局中人不是知道正确答案就是不知道正确答案，甚至连正确地猜出答案的可能性都没有。我们再假设每个局中人的私人信息和信念只依赖于他是否知道答案。注意到，如果局中人 2 知道答案，那么她自然会想到，其他许多人也知道答案的可能性相对会大些，她也可能会因此对赌胜局中人 1 相对多一些悲观。

于是我们可令 $T_1=\{a_1, b_1\}$，$T_2=\{a_2, b_2\}$，其中，对于每个 i，a_i 是知道答案的类型，b_i 是不知道答案的类型。为了生成一个在这些随机变量上一致的先验分布，我们假设知道答案的实际人数比例（在包括局中人 1 和 2 的总体中）是一个随机变量 π，它是从一个 0 到 1 区间上的均匀分布中抽取的。由这个假定，我们可以推导出下述的先验分布：

$$P(a_1,a_2)=1/3, P(a_1,b_2)=1/6, P(b_1,a_2)=1/6, P(b_1,b_2)=1/3$$

（例如，两人都知道答案的概率是 $\int_0^1 \pi^2 d\pi = 1/3$。）实际上，每个局中人可以将自己的类型作为一个容量为 1 的统计样本，并在此基础上做出这个未知比例的贝叶斯推断。

在这个模型中，影响支付的基本未知参数 $\tilde{\theta}$ 恰是局中人 1 的类型本身，故局中人 1 的一阶信念总是给 $\tilde{\theta}$ 的真实值赋予概率 1。局中人 2 的一阶信念给事件 $\tilde{\theta}=a$ 所赋予的概率，依赖于 2 知道答案还是不知道答案，而相应地为 2/3 或 1/3。如果 1 的类型 a_1，那么他的二阶信念对局中人 2 关于 a_1 的主观概率是 2/3 这事件所赋予的概率为 2/3（因为她的类型是 a_2），则对 2 关于 a_1 的主观率为 1/3 这一事件所赋予的概为 1/3（因为她的类型是 b_2）。另一方面，如果 1 的类型是 b_1，则他的二阶信念对 2 关于 a_1 的主观概率是 2/3 这一事件赋予概率 1/3，而对 2 关于 a_1 的主观概率是 1/3 这一事件赋予概率 2/3。这些和其他所有各阶信念都可以通过贝叶斯公式从先验分布 P 计算出来。事实上，
83 假定局中人的信念依赖于具有小取值范围的随机变量，则等于是假定，对每个 k，任一局中人 i 的可能 k 阶信念集都在 B_i^k 的一个小子集之中。

不过，对 T_1 和 T_2 中不同的类型实际地计算所有这些高阶信念是不必要的。我们只需要计算作为贝叶斯博弈结构中一部分的概率函数 $p_1: T_1 \to \Delta(T_2)$ 和 $p_2: T_2 \to \Delta(T_1)$。就上例而言，这些概率是：

$$\begin{aligned}
&p_1(a_2|a_1)=2/3, \quad p_1(b_2|a_1)=1/3\\
&p_1(a_2|b_1)=1/3, \quad p_1(b_2|b_1)=2/3\\
&p_2(a_1|a_2)=2/3, \quad p_2(b_1|a_2)=1/3\\
&p_2(a_1|b_2)=1/3, \quad p_2(b_1|b_2)=2/3
\end{aligned}$$

当然，当两个具体的人实际进行琐题测验博弈时，我们必须对这个特定的模型是琐题测验博弈的一个准确表示之假定有质疑的准备。例如，将 T_i 集扩大到包括那些对答案不肯定但有正概率猜中的类型，可能被认为是重要的。然而，这类灵敏性分析在应用数学建模的任何一个领域都是需要的。现实生活的局势总是比我们所研究的任何数学模型复杂得多，所以在分析的可处理性与建模的准确性之间要进行取舍。与对实际问题的任何分析方法一样，我们能希望的最好办法是有一类充分多而又灵活的模型，如果有人提出反对，说我们的模型忽略了局势中某些我们正试图去分析的重要方面，我们就能将我们的模型扩展成一个更复杂的模型并将这个方面考虑进去。

习 题

2.1 企业 1 正在开发的新的小机械生产过程同等地有高成本或低成本两种可能。企业 1 将在下季度初知道这个生产过程是高成本的还是低成本的，然后企业 1 可以选择是否建一个新的车间。企业 2 不能观察到企业 1 新生产过程的成本，但可以观察到企业 1 是否建了一个新车间。随后，企业 2 要决定是否进入小机械市场去与企业 1 抗争。如果企业 1 的生产过程有高成本，企业 2 将从进入小机械市场获利 2 百万美元（以长期利润的贴现值计），但如果 1 的生产过 84
程是低成本的，企业 2 进入小机械市场将损失 4 百万美元。新生产过程的较低成本将增加 1 的利益 4 百万美元。如果新生产过程是低成本，则建一个新车间将使企业 1 的利润再增加 2 百万美元（因为在一个新车间里采用新生产过程要容易得多），但如果新生产过程是高成本，则建一个新车间使企业 1 的利润减少 4 百万美元。在任何情况下（无论新生产过程具有高成本还是低成本，也无论企业修建一个新厂房与否），企业 2 进入小机械市场都会降低企业 1 的利益 6 百万美元。（两个企业都是风险中性的，故我们可以把效用与货币收益等同。）

a. 描述这个展开型博弈。

b. 构造这个博弈的策略型正规表示。

c. 试用重复剔除弱劣策略分析这个正规表示。

d. 给出这个展开型博弈的多代理人表示。在这个多代理人表示中，是否存在代理人有一个劣策略？

e. 现在假设这个博弈是在企业 1 刚知道其成本是高还是低后（但在企业 1 决策是否建新车间之前）的时点开始，写出一个具有不完全信息的贝叶斯博弈来描述这个博弈。

f. 写出（e）的贝叶斯博弈的类型代理人表示。这时，这个策略型博弈的

局中人集是什么?

2.2　回顾2.1节所介绍的简单摊牌博弈。在一付52张牌里面，有20张牌是"10或更大"的牌（10，J，Q，K，A）。假设规则改为：若局中人1有一张10或更大的牌，或者在1加注后局中人2放弃，则局中人1赢钱。如前一样，局中人1在决定是否加注前看了这张牌，但现在多数牌对局中人2是有利的。

a. 对这个博弈建立展开型模型，并构造它的正规表示。

b. 如果你要玩这个博弈，那么你喜欢要局中人1还是局中人2的角色?（只需表达你的直觉，至于正式的分析，见第4章习题4.7。）

85　**2.3**　假设把2.1节的简单摊牌博弈改变为在局中人1看了牌后允许他加注1美元，或加注0.75美元，或放弃。如果局中人1加注，那么局中人2知道局中人1加注的钱数，并必须选择是以同样的钱数对抗加注还是放弃。如前一样，如果局中人1握有一张红色牌或者加注后局中人2放弃，则1赢。

a. 建立这个博弈的展开型模型。

b. 给出这个博弈的正规表示。

c. 找出能由弱占优重复剔除的所有策略。

2.4　构造如图2.8所示博弈的正规表示。

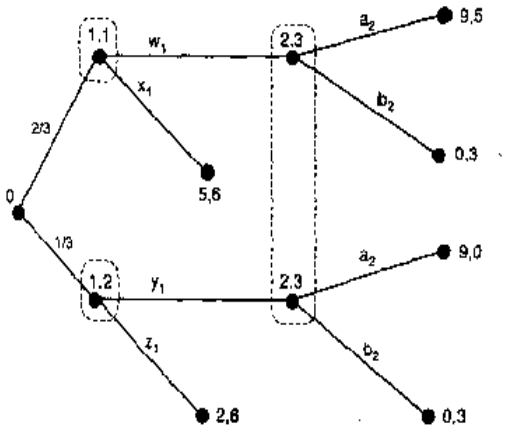

图2·8

2.5　构造如图4·10（在第4章中）所示博弈的正规表示。

2.6　考虑表2－14所给出的策略型博弈。试用重复剔除弱劣策略来分析这个博弈。

2.7　证明：若两个贝叶斯博弈是等价的，则它们的类型代理人表示是完全等　86
价的。

表 2－14　　**一个策略型博弈**

C_1	C_2		
	x_2	y_2	z_2
x_1	2，4	9，4	1，3
y_1	3，9	8，1	2，9
z_1	5，5	6，6	7，6

表 2－15　　**一个投票博弈中所有结果的支付**

方案	局中人		
	1	2	3
α	8	0	4
β	4	8	0
γ	0	4	8

2.8　［**莫林**（Moulin）的投票博弈，1983］在一个委员会中，局中人 1、2 和 3 对被称为 α、β 和 γ 的三个方案进行投票选择。首先，每个局中人对这三个方案中赞成的一个无记名地投一票，然后公开检票。如果任何一个方案有两票，则它是这个博弈的结果。否则，若得票相同（必然是三方案各一票），则局中人 1（他是委员会的主席）将选择结果。局中人的支付依赖于结果，且如表 2－15 所示。用重复剔除弱劣策略分析这个博弈。

2.9　一个非负整数 $\tilde{X}$ 是由参数 0.9 的几何分布随机确定的，即对任一非负整数 k，$\tilde{X}$ 等于 k 的概率为 $P(\tilde{X}=k)=0.9^k\times 0.1$。$\tilde{Y}_1$ 和 $\tilde{Y}_2$ 是依赖于 $\tilde{X}$ 的两个随机变量使得

$$\begin{aligned}(\tilde{Y}_1,\ \tilde{Y}_2) &= (\tilde{X},\ \tilde{X}+1)\text{ 的概率为 }1/2\\ &= (\tilde{X}+1,\ \tilde{X})\text{ 的概率为 }1/2\end{aligned}$$

局中人 1 只观察 $\tilde{Y}_1$，而局中人 2 只观察 $\tilde{Y}_2$。也就是说，两个局中人中有一个观察到 $\tilde{X}$，另一个则观察到 $\tilde{X}+1$，且每个局中人都有相同的可能性成为观察到 $\tilde{X}$ 的人。　87

a. 证明：如果一个局中人观察到 $\tilde{Y}_i$ 不是 0，则他认为他已观察到 $\tilde{X}$ 本身的概率小于 1/2。即，对任何 $k\in\{1,2,3,\cdots\}$，证明 $P(\tilde{X}=\tilde{Y}_i\mid\tilde{Y}_i=k)$

$<1/2$.

b. 看到较高数字 $\tilde{Y}_i$ 的局中人 i 将从另一局中人那里赢得 1 美元。考虑语句

两个局中人都知道……两个局中人都知道每一局中人认为他赢得 1 美元的概率严格大于 1/2。

如果 $\tilde{X}$ 实际上等于 5，但局中人中间的共同知识是，每一局中人 i 只是已经观察到他自己的 $\tilde{Y}_i$，那么短语“两个局中人都知道”能够在上述语句中重复的最大次数是多少，并使得这个语句是正确的？

c. 若 $\tilde{Y}_i$ 实际等于 5，但局中人中间的共同知识是，每个局中人 i 仅已观察到他自己的 $\tilde{Y}_i$，那么能成为局中人中间的共同知识的最小事件（即最小先验概率事件）是什么？

3

策略型博弈的均衡

3.1 占优和可理性化

在上一章中所介绍的数学博弈的三种不同形式中，概念上最简单的是策略型。再则，我们已经看到，任何一个展开型或贝叶斯型博弈也都可以（通过正规表示、多代理人表示或类型代理人表示）用策略型加以表示。因此，对我们来说，从策略型的解概念开始学习，就是自然而然的事了。 88

我们可以将任何一个策略型博弈 Γ 表示为

$$\Gamma=\{N,\ (C_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\},$$

其中 N 是局中人集、C_i 是局中人 i 的策略集，$u_i: C\to\mathbf{R}$ 是局中人 i 的效用支付。这里的 C 表示在每个局中人 i 从其策略集 C_i 中选择一个策略时，各个局中人可能会选择的所有可能策略组合（profiles）所组成的集，即

$$C=\bigtimes_{i\in N}C_i$$

除非另有规定，我们一般都假定 Γ 是一个有限博弈。

最简单的一类解概念是确定每个局中人的策略集，可以合理地预期到局中人会使用这些策略，而且不需要试图确定各种不同策略的概率。也就是说，这样的一个解将对每个局中人 i 确定一个 C_i 的非空子集 D_i，且 D_i 被理解为局中人 i 实际会选择的策略集。

回顾我们的基本假定，每个局中人在其目标是最大化其期望效用支付的意义上都是理性的，而且在至少与我们一样了解博弈的意义上是智能的。因此，如果预期到每个局中人 j 都在 D_j 中选择一个策略，那么，每个局中人 i 都应该了解这个事实并使用某个对 D_{-i} 上某概率分布是最佳反应的策略，其中 89

$$D_{-i}=\bigtimes_{j\in N-i}D_j$$

令 $G_i(D_{-i})$ 表示所有这样的最佳反应策略组成的集，即 $d_i\in G_i(D_{-i})$，当且仅当 $\Delta(D_{-i})$ 中存在某个 η 使得

$$d_i\in\operatorname*{argmax}_{c_i\in C_i}\sum_{d_{-i}\in D_{-i}}\eta(d_{-i})u_i(d_{-i},c_i)$$

[回顾，对任何集 Z，$\Delta(Z)$ 表示 Z 上概率分布集，而 $(d_{-i},\ c_i)$ 表示策略组

合，其中局中人 i 的分量是 c_i，其余所有的分量如同 $d_{-i}=(d_j)_{j\in N-i}$] 于是，若局中人 i 知道没有一个局中人 j 会使用一个 D_j 以外的策略，那么他决不会用 $G_i(D_{-i})$ 之外的决策。因此，我们的解概念应该满足

$$D_i\subseteq G_i(D_{-i}),\quad \forall i\in N \tag{3.1}$$

如同在 2.5 节，令 $C_i^{(\infty)}$ 表示在重复剔除强劣策略后所余下的局中人 i 的所有策略组成的集。作为定理 1.6 的一个推论，可以证明

$$C_i^{(\infty)}=G_i\left(\underset{j\in N-i}{\times}C_j^{(\infty)}\right)$$

因为经重复剔除后，每个非劣策略都是对非劣策略集上某个概率分布的一个最佳反应（否则还会有劣策略要剔除）。此外，条件 (3.1) 意味着每个集 D_i 一定是 $C_i^{(\infty)}$ 的子集。(证明是对 k 用归纳法，说明对每个 i 和每个正整数 k 都有 $D_i\subseteq C_i^{(k)}$。) 因此，当所有局中人都是理性的和智能的，可以预期没有一个局中人会使用任何一个强劣策略。于是，我们的第一个也是最弱的一个解概念只是预测了博弈结果应该是 $\times_{i\in N}C_i^{(\infty)}$ 中某个重复非劣的策略组合。

90 我们已经看到了像表 2－2 和表 2－9 的例子，其中重复强占优导致预测了唯一的一个策略组合。不过，一般而言，重复强占优是一个极弱的解概念。就简单摊牌博弈（表 2－1）来说，重复强占优只告诉我们局中人 1 不应该使用策略 Ff（总是摊牌），它甚至连策略 Fr 也不能排除掉，因为如果局中人 1 认为局中人 2 肯定会放弃时，他持有一张赢牌也会愿意摊牌。

剔除更多策略的办法之一是应用重复剔除弱劣策略。正如我们在 2.5 节所见，重复剔除弱劣策略让我们在表 2－1 中能剔除策略 Fr，而在表 2－3 中能剔除 B 与 Lr 之外的所有策略。不过，弱劣策略的剔除顺序一般是成问题的。为了避免这个顺序问题，L. 塞缪尔森（L.Samuelson，1989）建议我们转而寻找最大集 $(D_i)_{i\in N}$ 使得，对每个局中人 i 而言，如果他知道其余局中人只使用 $\times_{j\in N-i}D_j$ 中的某策略组合时，D_i 是由 C_i 中对于 i 为非弱劣策略所组成的集。但他也指出了，存在一些博弈，对它们而言不存在这样的策略集。表 3－1 给出了一个这样的博弈。(对于这个例子，如果我们的集排除了 y_1，那就必须排除 y_2，但此时 y_1 不能被排除；如果我们的集包括了 y_1，则必须包括 y_2，但在包含了 y_2 时 y_1 又必须被排除。)

表 3－1　　一个策略型博弈

C_1	C_2	
	x_2	y_2
x_1	1，1	1，0
y_1	1，0	0，1

* 原书误为 $G(D_{-i})$ ——译者注。

在2.2节中我们论证了，由于任何的通信和协调的可能性都可以考虑在一个策略的定义中，所以假定所有的局中人独立地选择他们的行动是不失一般性的。于是，我们可以假设局中人的策略是独立的随机变量。因而，如果我们的解概念告诉我们每个局中人 j 将在 D_j 中选择他的策略，而且局中人 i 又是智能的话，那么他应该选择一个当其余局中人独立地在其 D_j 上随机化时对他来说 91
是一个最佳反应的策略。令 $H_i(D_{-i})$ 表示这样的最佳反应集，即 $d_i \in H_i(D_{-i})$，当且仅当存在概率分布 $(\sigma_j)_{j\in N_{-i}}$ 使得

$$\sigma_j \in \Delta(D_j),\ \forall j \in N_{-i},$$

而且

$$d_i \in \underset{c_i \in C_i}{\operatorname{argmax}} \sum_{d_{-i}\in D_{-i}} \left(\prod_{j\in N-i} \sigma_j(d_j) \right) u_i(d_{-i}, c_i)$$

从而，如果所有的局中人都在像我们一样了解这个博弈及我们的解概念 $(D_j)_{j\in N}$ 这层意义上是智能的，那么我们的解概念应该满足

$$D_i \subseteq H_i(D_{-i}),\ \forall i \in N \tag{3.2}$$

伯恩海姆（Bernheim，1984）和皮尔斯（Pearce，1984）已经证明，存在集 $(D_j^*)_{j\in N}$ 满足（3.2）式，并使得对任何另外一个满足（3.2）式的 $(D_j)_{j\in N}$ 均有

$$D_i \subseteq D_i^*,\quad \forall i \in N$$

D_i^* 中的策略被称为**可理性化策略**（rationalizable strategies）。任何一个可理性化策略都是对某余局中人可理性化策略集上某个独立随机化组合的一个最佳反应，即

$$D_i^* = H_i(D_{-i}^*),\quad \forall i \in N$$

易于验证，一般有 $D_i^* \subseteq C_i^{(\infty)}$，而对二人博弈则有 $D_i^* = C_i^{(\infty)}$。

3.2　纳什均衡

给定任何一个策略型博弈 $\Gamma = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$，任一局中人 i 的一个**随机策略**（randomized strategy）都是 C_i 上一个概率分布。令 $\Delta(C_i)$ 表示局中人 i 能使用的所有可能随机策略组成的集。为了强调与随机策略的区别，C_i 中的策略可以被称为**纯策略**（pure strategy）。

一个**随机策略组合**（randomized-strategy profile）是为每个局中人都确定一

个随机策略的任一向量，故所有随机策略组合所组成的集是$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$。也就是说，$\sigma$是$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$中的一个随机策略组合的充要条件是，对于每个局
92 中人i和C_i中每个纯策略c_i，σ都确定了一个非负实数$\sigma_i(c_i)$以表示局中人i将选择c_i的概率并使得

$$\sum_{d_i\in c_i}\sigma_i(d_i)=1,\quad \forall i\in N$$

我们可以把这个随机策略组合写成$\sigma=(\sigma_i)_{i\in N}$，其中$\sigma_i=\{\sigma_i(c_i)\}_{c_i\in C_i}$。如果局中人按照随机策略组合$\sigma$独立地选择他们的策略，则他们将选择纯策略组合$c=(c_i)_{i\in N}$的概率是$\prod_{i\in N}\sigma_i(c_i)$，即各个策略概率的乘积。

贝叶斯决策理论告诉我们，在博弈Γ进行时，尽管我们或许不能确定局中人将选择怎样的纯策略组合，但应该存在纯策略组合集$C=\times_{i\in N}C_i$上的某个概率分布来定量地表示我们关于局中人策略选择的信念。此外，我们还可以依据2.2节的论断而做出局中人独立选择其策略的假定。因此，我们关于这个博弈的信念应该对应于$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$中的某个随机策略组合。

对于任一随机策略组合σ，令$u_i(\sigma)$表示在所有局中人都按照σ独立地选择他们的纯策略时，局中人i所能获得的期望效用支付，即

$$u_i(\sigma)=\sum_{c\in C}\Big(\prod_{j\in N}\sigma_j(c_j)\Big)u_i(c),\ \forall i\in N$$

对于$\Delta(C_i)$中任一τ_i，我们令(σ_{-i},τ_i)表示一个其中第i分量是τ_i而其余分量都如同σ的随机策略组合，于是

$$u_i(\sigma_{-i},\tau_i)=\sum_{c\in C}\Big(\prod_{j\in N\ i}\sigma_j(c_j)\Big)\tau_i(c_i)u_i(c)$$

利用在1.2节引入的记号（方程（1.2）），我们令$[d_i]$表示$\Delta(C_i)$中对纯策略c_i赋予概率1的随机策略，则利用标准的线性代数符号有：

$$\sigma_i=\sum_{c_i\in C_i}\sigma_i(c_i)[c_i]$$

93 如果局中人i使用纯策略d_i，而所有其他的局中人都按照随机策略组合σ独立地实施其策略，则局中人i的期望支付将是

$$u_i(\sigma_{-i},[d_i])=\sum_{c_{-i}\in C_{-i}}\Big(\prod_{j\in N-i}\sigma_j(c_j)\Big)u_i(c_{-i},d_i)$$

其中$C_{-i}=\times_{j\in N-i}C_j$

现在假设我们的信念有充分根据，并且所有局中人都有足够的智能去共享这些信念，那么每个局中人都将想去选择那个能最大化其期望支付的纯策略，而且选择任何一个不能实现这个最大值的策略应该具有零概率。即

$$若\ \sigma_i(c_i)>0，则\ c_i\in \underset{d_i\in C_i}{\operatorname{argmax}} u_i\ (\sigma_{-i},\ [d_i]) \tag{3.3}$$

一个随机策略组合 σ，当且仅当它对每一个局中人 i 和 C_i 中的每一个 c_i 都满足条件（3.3）时，才是 Γ 的一个（纳什）均衡［(Nash) equilibrium］［或策略均衡 (strategic equilibrium)］（参见纳什，1951）。

因此，当且仅当没有一个局中人能从单方面背离某个随机策略组合的预见中增加其期望效用支付时，这个随机策略组合才是一个纳什均衡。即当且仅当

$$u_i(\sigma)\geqslant(\sigma_{-i},\ \tau_i),\ \forall i\in N,\ \forall\tau_i\in\Delta(C_i) \tag{3.4}$$

σ 才是 Γ 的一个纳什均衡。条件（3.3）（对所有的 i 及 c_i）等价于条件（3.4）之事实，乃是如下有用的引理之一个结果。

引理3.1　对于 $\times_{j\in N}\Delta(C_j)$ 中任一 σ 及 N 中任一局中人 i，均有

$$\max_{d_i\in C_i} u_i\ (\sigma_{-i},\ [d_i])\ =\ \max_{\tau_i\in\Delta(C_i)} u_i(\sigma_{-i},\ \tau_i)$$

此外，$\rho_i\in\operatorname{argmax}_{\tau_i\in\Delta(C_i)}u_i(\sigma_{-i},\ \tau_i)$ 的充要条件是，对每一个使得 $c_i\notin\operatorname{argmax}_{d_i\in C_i}u_i(\sigma_{-i},\ [d_i])$ 的 c_i 都有 $\rho_i(c_i)=0$。

证明　注意到，对 $\Delta(C_i)$ 中任一 τ_i，

$$u_i(\sigma_{-i},\tau_i)=\sum_{d_i\in C_i}\tau_i(d_i)u_i(\sigma_{-i},[d_i])$$

于是，$u_i(\sigma_{-i},\ \tau_i)$ 是各项 $u_i(\sigma_{-i},\ [d_i])$ 的一个加权平均值，其中权 τ_i 94
(d_i) 都是非负的且权重之和为 1。这样一个加权平均不可能大于被平均之项的最大者，而且只要有一个非最大值项具有正概率，这个加权平均就是严格小于这个最大值的。 ■

于是局中人 1 所能从对付其余局中人的随机策略组合中得到的最大期望效用并不依赖于他自己使用的只是一个纯策略还是一个随机策略。而且，i 的最优随机策略恰恰就是只对他的最优纯策略赋予正概率的那些随机策略。

我们可以说，C 中的一个纯策略组合 c 是一个均衡［或更准确地说是一个**纯策略均衡** (equilibrium in pure strategies)］，当且仅当

$$u_i(c)\geqslant u_i(c_{-i},\ d_i),\ \forall i\in N,\quad \forall d_i\in C_i$$

［这里 $(c_{-i},\ d_i)$ 表示 C 中的一个纯策略组合，其第 i 个分量是 d_i 而其余所有分量如同 $c=(c_j)_{j\in N}$］引理 3.1 意味着，c 是一个纯策略纳什均衡，当且仅当随机策略组合 $([c_i])_{i\in N}$（对 c 赋予概率 1）是 $\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 中的一个纳什均衡。

将纳什均衡与 3.1 节中所讨论过的策略剔除概念加以比较，或许是有意义的。可理性化和重复占优只明确了哪些策略被假定为有合理的可能性，而纳什均衡则对每个策略都确定了数值概率。当我们这样增加一个解所明确说明的信

息时，如果解是局中人中间的共同知识，那么我们也就暗含地加强了它所必须满足的限制。因而，对于许多博弈来说，纳什均衡集可能会显著地小于可理性化或重复非劣的策略组合集。例如，考虑表 3 2 中的博弈。

表 3-2　　一个策略型博弈

C_1	C_2		
	x_2	y_2	z_2
x_1	3，0	0，2	0，3
y_1	2，0	1，1	2，0
z_1	0，3	0，2	3，0

95 在这个博弈中，没有一个（弱或强）劣策略，且所有的策略都是可理性化的。事实上，这个博弈中的每一个策略都是对另一个局中人策略之一的最佳反应。从而会有某些人声称，在这个博弈中的每一个策略都可能被一个局中人理性地使用。例如，局中人 1 会因预料局中人 2 选择 x_2 而有可能选择 x_1。为了对自己解释为什么应该选择 x_2，1 会假设 2 相信 1 正计划使用 z_1。于是，1 之所以选择 x_1 可以用一个（描述局中人将选择的策略、他们关于相互选择的信念，以及他们关于相互选择信念的信念等）这样的理论来解释。然而，如果这个理论是正确的，那么至少有某个局中人的信念一定是错误的。无疑，如果局中人 1 因为他相信 2 会相信他将选 z_1 而计划选择 x_1，那么，要么是局中人 1，要么是局中人 2，一定是错的。当我们像博弈理论家那样试图去描述理性的局中人在这个博弈中实际上应该做什么时，我们不能同意这个理论（即局中人 1 应该因相信了 2 会相信 1 将选择 z_1 而去选择 x_1），因为这样的理论违反了我们的假定：局中人 2 是足够智能的，可以了解我们对这个博弈所了解的一切。

但是，如果局中人 1 相信 2 将选择 y_2，那么 1 应该选择 y_1，并且 1 可以通过假设 2 知道他将选择 y_1 而向自己解释为什么她会选 y_2。因此，在这个博弈中，我们可以想到，局中人 1 应该选择 y_1，而局中人 2 应该选择 y_2，且没有任何必要认为两个局中人中的某一个出了差错或缺乏我们所说的智能性。事实上，$([y_1],[y_2])$ 是这个博弈唯一的均衡。于是，局中人肯定应该选择 y_1 且局中人 2 肯定应该选择 y_2 这个理论，是关于局中人行为唯一有效的理论，它不仅对所有的纯策略组合确定了概率，而且能为所有的局中人所了解而又不致自我否定。

现在我们来叙述纳什的一般存在性定理（1951），其证明在 3.12 节提供。

定理3.1　给定任何一个策略型有限博弈 Γ，在 $\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 中至少存在一个均衡。

随机策略对这个存在性定理的证明是必要的，因为很多博弈没有纯策略均衡。例如，回顾第 2 章的简单摊牌博弈，其正规表示如表 3－3 所示。

表 3－3　　简单摊牌的策略型博弈　　96

	C_2	
C_1	M	P
Rr	0，　0	1，　－1
Rf	0.5，－0.5	0，　0
Fr	－0.5，　0.5	1，　－1
Ff	0，　0	0，　0

不难验证，对这个博弈就不存在纯策略的纳什均衡。(只要对八种可能性予以验证)。因此，它一定是一个适当地使用了随机策略的均衡。为了找到这个均衡，首先注意到，在这个博弈中，纯策略 Ff 是强劣的，而 Fr 是弱劣的。可以证明，通过重复剔除弱劣或强劣的策略所生成的剩余博弈的任一均衡也是原博弈的均衡。于是，我们可以指望在 Rr 与 Rf 之间和 M 与 P 之间随机化能找到一个均衡。

于是令 $q[\mathrm{Rr}]+(1-q)[\mathrm{Rf}]$ 和 $s[\mathrm{M}]+(1-s)[\mathrm{P}]$ 分别为局中人 1 和 2 的均衡策略，其中 q 和 s 都是介于 0 与 1 之间的某个数。也就是说，q 表示局中人 1 即使握有一张输牌也要加注的概率，而 s 表示局中人 2 在 1 加注时要对抗的概率。局中人 1 乐意在 Rr 与 Rf 之间随机化的唯一可能是，Rr 和 Rf 在他对付 2 的策略 $s[M]+(1-s)[P]$ 时带给他相同的期望效用，故

$$0s+1(1-s)=0.5s+0(1-s)$$

这意味着 $s=2/3$。于是，局中人 2 的均衡策略必须是 $2/3[M]+1/3[P]$ 才能使局中人 1 乐意于在 [Rr] 与 [Rf] 之间随机化。类似地，为使局中人 2 乐意于在 M 与 P 之间随机化，M 和 P 必须在用来对付 $q[\mathrm{Rr}]+(1-q)[\mathrm{Rf}]$ 时带给她相同的期望效用，故

$$0q+(-0.5)(1-q)=(-1)q+0(1-q)$$

这意味着 $q=1/3$。因此，均衡一定是

$$(1/3[\mathrm{Rr}]+2/3[\mathrm{Rf}],\ 2/3[\mathrm{M}]+1/3[\mathrm{P}])$$

也就是说，局中人 1 在持有一张赢（红）牌时肯定加注，在持有一张输（黑）牌时，他也会以概率 1/3 加注；局中人 2 在这个均衡中会以 2/3 的概率对抗加注。事实上，这个随机策略组合是这个简单摊牌博弈唯一的均衡。　97

局中人 1 和 2 从这个唯一的均衡中所获得的期望效用支付分别是 1/3 和 －1/3。这一事实表明，(当支付都是以美元计时) 一个风险中性且可以拒绝参与这个博弈的人，应该愿意为 0.34 美元的局前贿赂而担任在这个博弈中处于不利地位的局中人 2 这个角色，但对任何低于 0.33 美元数量的贿赂则不愿意(假设贿赂是在 1 手中的这张牌的颜色被决定之前提供的)。

现在是给出纳什均衡的两个一般性评注的时候了。博弈可能有**无效**（inef-

ficient）均衡，也可能有**多重均衡**（multiple equilibria）。

博弈的一个结果是**（弱）帕累托有效的**［(weakly) Pareto efficient］，当且仅当不存在另一个能使所有局中人的状况更好的结果。作为一个无效均衡的例子，考虑表 3－4 中所谓**囚徒困境**（Prisoners' Dilemma）的博弈。这个博弈（引自卢斯和雷费，1957）背后的故事可以描述如下。两个局中人被指控在两个罪案中犯有同谋罪，轻罪案不需要供认就能证实他们的罪状，而重罪案至少在有一人坦白时才能宣布他们有罪。公诉人承诺，如果恰好有一个人坦白，则坦白者将获得自由但另一个人将坐 6 年牢；若两人都坦白，则他们两人都要坐 5 年牢；而若两人都不坦白，则他们两人都只坐 1 年牢。从而每个局中人 i 都有两个可能策略：坦白（f_i）或不坦白（g_i）。支付如表 3－4 所示，其中数字表示局中人在随后 6 年中将享受自由的年数。

表 3－4　　策略型囚徒困境博弈

	C_2	
C_1	g_2	f_2
g_1	5，5	0，6
f_1	6，0	1，1

在这个博弈中，($[f_1]$，$[f_2]$)是唯一的纳什均衡。（事实上，f_1 和 f_2 都是唯一的非强劣策略。）然而，由（f_1，f_2）所得到的结果只是博弈的一个非
98 帕累托有效的结果。因此，如果纳什均衡可以被解释为描述了理性的局中人应该如何进行博弈的话，那么在这个博弈中，可以预期到每个理性的个人相对来说都干得很坏。这个例子，作为对人们都理性地追逐他们的个人最优是如何可能导致对他们全体来说是坏的结果的一个简单说明，已经是非常有影响的了。

作为一个具有多重均衡的博弈的一个例子，考虑如表 3－5 所示的所谓**性别之战**（Battle of the sexes）的博弈。这个博弈（仍取自卢斯和雷费，1957）的背景故事是，局中人 1 和 2 分别是丈夫和妻子，他们正在决定星期六下午到哪里去。每个策略 f_i 都表示去看足球比赛，而 s_i 表示去购物中心，$i=1$，2。这对夫妻中任一方在没有对方相伴时会毫无快乐，但丈夫偏好在足球比赛场会面，而妻子则偏好在购物中心相见。

表 3－5　　策略型性别之战

	C_2	
C_1	f_2	s_2
f_1	3，1	0，0
s_1	0，0	1，3

这个博弈有三个均衡：($[f_1]$, $[f_2]$)给出局中人1和2支付配置 (3, 1)；($[s_1]$, $[s_2]$)相应给出支付配置 (1, 3)；以及

$$(.75\ [f_1]\ +.25\ [s_1],\ .25\ [f_2]\ +.75\ [s_2])$$

给每个局中人0.75的期望支付。在第一个均衡中，两个局中人都去看足球比赛，这是局中人1所喜欢的结果。在第二个均衡中，两个局中人都去购物中心，这是局中人2所喜欢的结果。因此，每个局中人偏好一个不同的均衡。

在第三个均衡中，局中人的行为处于随机而又不协调的状态，且任何一个局中人都不可能单方面地改善它。每个局中人对另一个局中人将去哪里都是不确定的，并且无论去哪里都得到相同的期望支付 ($.75\times 1=.25\times 3$)。这第三个均衡对两个局中人来说都比前两个均衡要差，所以它也是一个无效均衡。

3.3　计算纳什均衡

在一个纳什均衡中，如果局中人 i 的两个不同纯策略都具有正的概率，则这两个策略在这个均衡中一定给与他相同的期望支付，因为否则他将决不会使用那个给他较低期望支付的策略。也就是说，对均衡来说，一个局中人必须对他在其随机策略中具有正概率的策略表现出无差异。 99

因而，具有正概率的策略所组成的集是均衡的一个重要定性特征。一般而言，$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 中一个随机策略组合 σ 的**支撑** (support) 是，如果所有的局中人都按照 σ 选择他们的策略，C 中将具有正概率的所有纯策略组合集。即，σ 的支撑是集合

$$\underset{i\in N}{\times}\ \{c_i\in C_i \mid \sigma_i\ (c_i)\ >0\}$$

例如，再考虑性别之战博弈。均衡($[f_1]$, $[f_2]$)的支撑显然是 $\{f_1\}\times\{f_2\}$。在这个均衡中，给定可以预期到另一局中人去看足球比赛，那么每个局中人 i 都严格地偏好使用策略 f_i 胜于 s_i。同样，均衡($[s_1]$, $[s_2]$)的支撑是 $\{s_1\}\times\{s_2\}$，而且在这个均衡中，给定预期对方会到购物中心去，每个局中人都严格地偏好使用策略 s_i 胜于 f_i。

正如我们已经见到的那样，这个博弈还有第三个均衡，其支撑为 $\{f_1, s_1\}\times\{f_2, s_2\}$。在具有这个支撑的均衡中，给定对另一局中人的行为预期，每个局中人一定在 f_i 和 s_i 之间是无差异的。注意到，在局中人1使用随机策略 σ_1 的基础上，局中人2的期望支付以如下方式依赖于她的纯策略选择：

$$u_2(\sigma_1, [f_2])=1\sigma_1(f_1)+0\sigma_1(s_1)\quad \text{若2选择 } f_2$$

$$u_2(\sigma_1, [s_2]) = 0\sigma_1(f_1) + 3\sigma_1(s_1) \quad \text{若 2 选择 } s_2$$①

100 从而为了让局中人 2 乐意于选择 f_2 或 s_2，由于每个选择都有正概率，那么她从选择 f_2 或 s_2 中所获得的期望支付必须相同。即一定有 $\sigma_1(f_1) = 3\sigma_1(s_1)$。这个方程与概率方程 $\sigma_1(f_1) + \sigma_1(s_1) = 1$ 一起，可解出 $\sigma_1(f_1) = .75$ 和 $\sigma_1(s_1) = .25$。注意，我们已经从局中人 2 愿意在其支撑中随机地选择一个纯策略的条件推导出了局中人 1 的随机策略。同样，为了让局中人 1 愿意以正概率选择 f_1 或 s_1，那我们就必须有

$$3\sigma_2(f_2) + 0\sigma_2(s_2) = 0\sigma_2(f_2) + 1\sigma_2(s_2)$$

这就蕴含着 $\sigma_2(f_2) = .25$ 和 $\sigma_2(s_2) = .75$，因此，具有支撑 $\{f_1, s_1\} \times \{f_2, s_2\}$ 的均衡一定是

$$(\sigma_1, \sigma_2) = (.75\ [f_1] + .25\ [s_1],\ .25\ [f_2] + .75\ [s_2])$$

现在，我们来描述一种寻找任一有限策略型博弈 $\Gamma = (N,\ (C_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N})$ 之均衡的一般程序。尽管有无限多个随机策略组合，但能成为均衡支撑的只有 C 的有限多个子集。从而我们可以通过依次考虑可能成为支撑的各种猜测，并对每个猜测出的支撑求均衡，以便搜索出 Γ 的均衡。

对于每个局中人 i，令 D_i 表示局中人 i 的策略集 C_i 的某个非空子集，并用以表示我们当前对局中人 i 在均衡中有正概率的那些策略的一种猜测。如果有一个以 $\times_{i\in N} D_i$ 为支撑的均衡 σ，那么一定存在数组 $(\omega_i)_{i\in N}$ 使得下列方程成立：

$$\sum_{c_{-i}\in C_{-i}} \left(\prod_{j\in N-i} \sigma_j(c_j) \right) u_i(c_{-i}, d_i) = \omega_i,\ \forall i \in N, \forall d_i \in D_i \tag{3.5}$$

$$\sigma_i(e_i) = 0,\quad \forall i \in N,\ \forall e_i \in C_i \setminus D_i, \tag{3.6}$$

$$\sum_{c_i\in D_i} \sigma_i(c_i) = 1,\ \forall i \in N \tag{3.7}$$

条件 (3.5) 断言，每个局中人 i② 都必须从选择其在 σ_i 下有正概率的任一纯策略中得到相同的支付，记作 ω_i。条件 (3.6) 和 (3.7) 得自于 σ 是一个以 $\times_{i\in N} D_i$ 为支撑的随机策略组合这一假定。条件 (3.6) 断言，i 在 D_i 之外的纯策略具有零概率，而条件 (3.7) 断言，D_i 中的纯策略所取概率之和为 1。条件 (3.5) ~ (3.7) 一起意味着 ω_i 是局中人 i 在 σ 下所得到的期望支付，因为

$$u_i(\sigma) = \sum_{d_i\in C_i} \sigma_i(d_i) u_i(\sigma_{-i}, [d_i]) = \omega_i$$

---

① 原文误为 s_1——译者注。

② 原文漏了 i——译者注。

(3.5) ~ (3.7) 这些条件给了我们 $\sum_{i\in N}(|C_i|+1)$ 个方程，其中未知数（概率 $\sigma_i(c_i)$ 和支付 ω_i）的个数与方程的个数相同（这里 $|C_i|$ 表示集 C_i 中纯策略的个数）。因此有可能求解出这些方程。对于二人博弈，这些方程都是 101
σ 和 w 的线性方程，但当局中人个数多于二人时，式 (3.5) 成为 σ 的非线性方程，于是求解这些方程的任务就可能相当艰巨了。

不过，让我们假定，给定猜出的支撑 $\times_{i\in N}D_i$，我们可以找到满足条件 (3.5) ~ (3.7) 的全部解。这些解不一定就给了我们 Γ 的均衡，因为有可能会出现三个困难。第一，可能不存在解；第二，如果某些 $\sigma_i(c_i)$ 是负的，则这个解就不是一个随机策略组合，因此我们必须要求

$$\sigma_i(d_i)\geqslant 0,\quad \forall i\in N,\ \forall d_i\in D_i。\tag{3.8}$$

第三，如果某个局中人 i 在 D_i 之外有某个纯策略将在为他对付 σ_{-i} 时比 D_i 中任何一个策略都更好，那么这个解即使满足 (3.5) ~ (3.8) 也不能成为一个均衡。因此，我们又必须要求

$$\omega_i\geqslant\sum_{C_{-i}\in C_{-i}}\Big(\prod_{j\in N-i}\sigma_j(c_j)\Big)u_i(c_{-i},e_i),\ \forall i\in N,\forall e_i\in C_i\setminus D_i\tag{3.9}$$

如果我们求出了方程 (3.5) ~ (3.7) 的一个解 (σ,ω) 也同时满足不等式 (3.8) 和 (3.9)，那么 σ 就是 Γ 的一个纳什均衡，且 ω_i 正是局中人 i 在这个均衡中所得到的期望支付。

另一方面，如果不存在满足 (3.5) ~ (3.9) 的解，那就不存在以 $\times_{i\in N}D_i$ 为支撑的均衡。为了找到一个均衡，我们必须猜测其他的支撑并重复这个过程，纳什存在性定理保证了至少存在一个能让条件 (3.5) ~ (3.9) 都满足的支撑。

为了说明这个方法，考虑表 3-6 中的博弈。我们可以从寻找非随机均衡 102
开始，即从其支撑只包含每个局中人的一个策略的均衡开始。如果预期局中人 1 肯定选择 T，那么局中人 2 将会想去选择 M，但 B 将是局中人 1 对 M 的最佳反应，故不存在局中人肯定选择 T 的均衡。如果预期局中人 1 肯定选择 B，那么局中人 2 将会想去选择 L，但局中人 1 对 L 的最佳反应是 T，故也不存在局中人肯定选择 B 的均衡。因此，这个博弈没有非随机的均衡，亦即这个博弈的任何一个均衡，都必须在其支撑中包括局中人 1 的两个策略 T 和 B.

表 3-6　　一个策略型博弈

	C_2		
C_1	L	M	R
T	7, 2	2, 7	3, 6
B	2, 7	7, 2	4, 5

同样，也不存在其支撑中只包含局中人2一个策略的均衡，因为局中人1对局中人2的3个策略中的每一个策略，都有唯一的最佳反应（T对L，B对M或R），而我们又已经看到，在均衡中，局中人1一定乐意在T和B之间随机选择。如此一来，在这个博弈的任何一个均衡中，局中人1一定对T和B都赋予了正概率，且局中人2也一定对她的3个策略中的至少2个赋予了正概率，故有4个这样的支撑需要我们去试探。

作为第一个猜测，让我们试探支撑 {T，B}×{L，M，R}。也就是说，让我们猜测局中人1的两个策略和局中人2的三个策略全都在随机策略组合 σ 中取得了正概率。为使局中人1乐意在T与B之间随机选择，他必须从这两个策略的使用中取得相同的期望支付，因此我们需要

$$\omega_1 = 7\sigma_2(L) + 2\sigma_2(M) + 3\sigma_2(R) = 2\sigma_2(L) + 7\sigma_2(M) + 4\sigma_2(R)$$

为使局中人2乐意在L、M和R中间随机地选择她必须从这三个策略得到相同的期望支付，故我们需要

$$\omega_2 = 2\sigma_1(T) + 7\sigma_1(B)^* = 7\sigma_1(T) + 2\sigma_1(B) = 6\sigma_1(T) + 5\sigma_1(B)$$

此外，σ 还必须满足两个概率方程

$$\sigma_1(T) + \sigma_1(B) = 1, \qquad \sigma_2(L) + \sigma_2(M) + \sigma_2(R) = 1$$

从而我们的7个未知数（$\sigma_1(T)$，$\sigma_1(B)$，$\sigma_2(L)$，$\sigma_2(M)$，$\sigma_2(R)$，ω_1，ω_2）必须满足一个有7个方程的方程组。不幸的是，给定概率方程 $2\sigma_1(T) + 7\sigma_1(B) = 7\sigma_1(T) + 2\sigma_1(B)$，则意味着 $\sigma_1(T) = \sigma_1(B) = 1/2$，而 $7\sigma_1(T) + 2\sigma_1(B) = 6\sigma_1(T) + 5\sigma_1(B)$ 又意味着 $\sigma_1(T) = 3\sigma_1(B)$。因此，这个方程组无解，这个博弈也就没有支撑为 {T，B}×{L，M，R} 的均衡。

103 作为第二个猜测，让我们试探支撑 {T，B}×{M，R}。也就是说，让我们假定 $\sigma_2(L) = 0$，但每个其他策略都有以正概率被选中的可能。对于这个支撑，概率方程是

$$\sigma_1(T) + \sigma_1(B) = 1, \qquad \sigma_2(M) + \sigma_2(R) = 1$$

为了使局中人1在T与B之间无差异，以让他应该乐意于在T与B之间随机选择，我们需要

$$\omega_1 = 2\sigma_2(M) + 3\sigma_2(R) = 7\sigma_2(M) + 4\sigma_2(R)$$

为了使局中人2在M与R之间无差异，我们需要

$$\omega_2 = 7\sigma_1(T) + 2\sigma_1(B) = 6\sigma_1(T) + 5\sigma_1(B)$$

---

* 原文将 $7\sigma_1(B)$ 误为 $7\sigma_2(B)$ ——译者注。

(从支撑中剔除 L 已经通过令 $\sigma_2(L)=0$ 而减少了一个未知数，但也减少了一个无差异方程，因为局中人 2 不再需要在 L 和她的其他策略之间无差异。) 这些方程有 σ 的唯一解，它是

$$\sigma_2(M)=-1/4,\ \sigma_2(R)=5/4,\ \sigma_1(T)=3/4,\ \sigma_1(B)=1/4$$

但局中人 2 不可能以负概率去选择 M。于是，不存在以 $\{T, B\}\times\{M, R\}$ 为支撑的均衡。

作为第三个猜测，让我们来试探 $\{T, B\}\times\{L, M\}$。也就是说，让我们假定 $\sigma_2(R)=0$，但其他每一个策略都有以正概率被选中的可能。对于这个支撑，概率方程是

$$\sigma_1(T)+\sigma_1(B)=1,\qquad \sigma_2(L)+\sigma_2(M)=1$$

为了使局中人 1 在 T 和 B 之间无差异，以致他应该愿意在 T 和 B 之间随机地选择，我们需要

$$\omega_1=7\sigma_2(L)+2\sigma_2(M)=2\sigma_2(L)+7\sigma_2(M)$$

为了使局中人 2 在 L 和 M 之间无差异，我们需要

$$\omega_2=2\sigma_1(T)+7\sigma_1(B)=7\sigma_1(T)+2\sigma_1(B)$$

这些方程有唯一解，它是

$$\sigma_2(L)=.5=\sigma_2(M),\qquad \sigma_1(T)=.5=\sigma_1(B),\ \omega_1=\omega_2=4.5$$

现在我们有了一个解，并且它没有给出负概率；于是情况看来都很顺利。但这个解是一个均衡吗？这里还有一点需要验证。我们已经肯定了在这个解中，局中人 2 对 L 和 M 是无差异的，但我们还没有验证局中人 2 是否真正地偏好这两 104
个策略胜于她赋予零概率的策略 R。当局中人 1 以概率 .5 选择 T 时，局中人 2 从她的策略 R 所得到的期望支付将是 $6\times.5+5\times.5=5.5$，但局中人 2 从她的策略 L 或 M 所得到期望是 $\omega_2=4.5$。于是，预期局中人 1 会以概率 .5 选择 T 时，由于局中人 2 反倒偏好选择 R，所以实际上她不会乐意随机地在 L 与 M 之间选择。因此，这个解不是一个均衡，故不存在以 $\{T, B\}\times\{L, M\}$ 为支撑的均衡。

作为第 4 个（也是最后可能的）猜测，让我们来试探支撑 $\{T, B\}\times\{L, R\}$。也就是说，让我们假定 $\sigma_2(M)=0$，但其余每个策略都有以正概率被选中的可能。对于这个支撑，概率方程是

$$\sigma_1(T)+\sigma_1(B)=1,\qquad \sigma_2(L)+\sigma_2(R)=1$$

为了使局中人 1 对 T 与 B 无差异，我们需要

$$\omega_1=7\sigma_2(L)+3\sigma_2(R)=2\sigma_2(L)+4\sigma_2(R)$$

为了使局中人2对L与R无差异，我们需要

$$\omega_2 = 2\sigma_1(T) + 7\sigma_1(B) = 6\sigma_1(T) + 5\sigma_1(B)$$

这些方程有唯一解，它是

$$\sigma_2(L) = 1/6, \quad \sigma_2(R) = 5/6, \quad \sigma_1(T) = 1/3, \quad \sigma_1(B) = 2/3,$$
$$\omega_1 = 3\tfrac{2}{3}, \quad \omega_2 = 5\tfrac{1}{3}$$

这个解没有给出任何负概率，而且，当局中人1按照这个解行动时，局中人2从选择M中所得到的期望支付将是

$$u_2(\sigma_1, [M]) = 7\times 1/3 + 2\times 2/3 = 11/3 \leqslant \omega_2 = 16/3$$

因此，局中人2将确实乐意在L和R之间随机地选择，而且她不愿意选择M。于是，随机策略组合

$$(1/3[T] + 2/3[B],\ 1/6\,[L] + 5/6[R])$$

是这个博弈唯一的均衡。在这个均衡中，局中人1的期望支付是$3\frac{2}{3}$，而局中人2的期望支付则是$5\frac{1}{3}$。

105 对于局中人很多而且策略集很大的博弈，这里所提出的算法可能是不可行的，因为可能的支撑变得如此之多而难以应付，并且无差异方程（3.5）也会变成σ的非线性方程。就这样的博弈来说，需要用更为复杂的算法，诸如斯卡夫（Scarf，1973）和威尔逊（1971）提出的算法，去寻找均衡。

3.4 纳什均衡的意义

纳什（1951）的均衡概念可能是博弈论中最重要的解概念。这个概念重要性的一般论证可以概述如下。假设我们正像理论家那样试图预测局中人在一个给定博弈中的行为，或者像社会计划者那样试图给局中人的行为以建议。如果我们规定局中人应该使用哪些（有可能是随机的）策略，而且局中人也了解这种规定（回想他们知道我们对这个博弈所知道的一切），那么，我们要么必须确定一个均衡，要么必须对某些局中人指出其非理性行为。如果我们不规定一个均衡，那么某个局中人就可能通过将其策略换成我们没有为他规定的另外某个策略而受益，于是，如果所有的局中人都相信它，则一个非均衡的规定将是一个自我否定的预言。

这个论证利用了策略型博弈的局中人独立选择其策略这一假定，从而一个局中人的策略变化不能引起任一其他局中人的策略变化。正如我们在2.2节所说，这个独立性假设是不失一般性的。如果局中人之间有一系列的通信，那么

每个局中人的策略集都可以被重新定义，以包括关于在这一系列通信中说什么和选择什么行动（作为收到的信息的一个函数）的全部计划。这就是说，原则上，任何通信机会都可以被记入博弈的展开型中，从而可以被纳入到正规型表示纯策略的定义之中。因此，假定局中人在选择他们的策略之前没有通信机会，并不失其一般性。（不过，不使用这个假定的其他分析方法可能也是有价值的，参见第6章。）

奥曼和马施勒（Maschler，1972）对于像表3－7这样的例子，重新考查 106
了纳什均衡作为博弈解概念的论断。这个博弈唯一的均衡是

$$(.75\ [T] + .25\ [B],\ .5\ [L] + .5\ [R])$$

表3－7　　一个策略型博弈

C_1	C_2	
	L	R
T	0，0	0，－1
B	1，0	－1，3

我们已经提出过，由于策略T和L是对均衡策略的最优反应，而且又保证了每个局中人能得到其期望均衡支付0，所以局中人1可能偏好于选择T，而局中人2则偏好于选择L（均以概率1）。但是，如果这样的行为能被正确地预期到，那么局中人1在这个博弈中不选择B将是非理性的，因为B是他对L唯一最佳的反应。这样一来，由于([T]，[L])不是纳什均衡，故在这个博弈中预测到行动T和L的一种理论将破坏自身的正确性了。

注意到我们尚未直接论证智能理性的局中人在博弈中一定要使用均衡策略。当被问到为什么博弈中的局中人应该按某个纳什均衡行动时，我最喜欢的答复是反问“为什么不?”并让挑战者说明他认为局中人应该怎样做。如果他所说明的策略组合不是一个纳什均衡，那么（如上）我们可以指出，如果局中人相信它是每个局中人行为的一个准确描述，这个说明则是不能自圆其说的。

但值得注意，这个论证只是意味着任何一个非均衡的结果，作为决策者应该怎样行动的一个描述，将是不合乎情理的；但并不意味着任一特定的均衡在任一特定的局势中都是一个合情合理的预测。本质上来说，纳什均衡的概念对社会计划者和理论家施加了一个约束，使他们不能建议或者预测一种非均衡行为。

为了把这个论点置于更一般的框架内，在这里引进评价解概念的几个术语或许是有益的。一般而言，任何一种对局中人在任一给定博弈中应如何行动确定了预测的规则，都是一个**解概念**（solution concept）。然而，当我们用一个数 107
学模型去表示一个真实的冲突局势时（用第2章介绍的三种形式中的任一个），

我们必须去掉或者忽略掉实际局势的许多“非博弈理论的（non-game-theoretic）”细节，我们称之为**环境变量**（environmental variables）。例如，在策略型中，没有指明任何一个局中人的身高、体重、社会经济地位或国籍。我们不能先验地排除博弈结果以某种方式依赖于这些环境变量的可能性。于是我们应该允许一个解概念可以对任一给定博弈确定不止一个预测，而在一个特殊的真实局势中，从这些预测中加以选择可以依赖于环境。

因此，一个解概念可以视为一个映射，对于某个定义域内的每一个数学博弈Γ，它确定了一个集合$\phi(\Gamma)$，而$\phi(\Gamma)$是作为局中人可能如何行动的数学描述的某个值域R之子集。例如，定义域是所有策略型博弈组成的集，而值域R是所有随机策略组合集。博弈论分析的目标是生成具有下述两个性质的解概念：

1. 对于任一博弈Γ及其解集$\phi(\Gamma)$中的每个预测π，都存在一个环境能使π成为理性智能局中人在这个博弈中将会如何行动的准确预测。
2. 对于任一博弈Γ及值域R中不属于解集$\phi(\Gamma)$的任一π，没有一个环境能使π成为理性智能局中人在这个博弈中将会如何行动的一个准确预测。

任何一个满足这两条性质的解概念可以被称为一个**精确解**（exact solution）。也就是说，一个精确解概念应该包含所有那些至少在给定数学博弈所表示的某些局势中被认为是合理的预测，而且又要排除所有那些永远不可能被认为是合理的预测。

不幸的是，找到一个精确解概念可能是非常困难的，所以我们也应该重视那些只满足这两个性质之一的解概念。所谓**下解**（lower solution）就是任何一个满足上述性质（1）的解概念，而所谓**上解**（upper solution）则是任何一个
108 满足上述性质（2）的解概念。也就是说，一个下解虽排除了所有不合理的预测，但也可能排除了某些合理的预测；一个上解虽包含了所有合理的预测，但也可能包含了某些不合理的预测。用这些术语来说，最好是把纳什均衡看成上解而不是精确解，因为一个理论欲成为对智能理性局中人行为的较好预测，作为一个纳什均衡来说，只是一个必要条件。

3.5 焦点效应

正如表3-5的性别之战博弈所表明的，一个博弈可以具有不止一个的均衡。实际上，构造一些博弈，使其均衡集相当大并不难。在第4章和第5章，我们将说明纳什均衡概念的某些自然的精炼可以剔除一些博弈的某些均衡，不过，即使进行了这些精炼，许多博弈中仍可能出现广泛的均衡多重性。

当一个博弈具有多重均衡时，纳什均衡概念所加之于社会计划者和理论家

的约束就相对弱化了。我们知道，这些均衡中的任何一个，只要所有的局中人都预测到它，那它就会成为一个自行应验的预言。举例来说，在性别之战博弈中，假设（由某种原因）局中人1和2相互预期对方会实施 (f_1, f_2) 均衡，那么每个局中人都将通过服从这一预期去期望达到最大化他自己的支付。局中人2可能偏好于均衡 (s_1, s_2)，但给定她预期局中人1将选择 f_1 下，她选择 s_2 以代替 f_2 将会使她的支付从1减少到0。

因此，为了弄清楚具有多重均衡的博弈，我们必须问，在一个博弈中，是什么原因引起局中人相互预期会执行某一特定的均衡？这个问题曾被谢林(Schelling，1960）详尽地讨论过。谢林证明，在一个具有多重均衡的博弈中，趋向于把局中人的注意力集中到一个均衡的任何事情，都可能使他们全都预期并随之实现这个均衡，就像一个自行应验的预言一样。谢林称这个现象为**焦点效应**（focal-point effect）。也就是说，一个**焦点均衡**（focal equilibrium）就是一个具有某种使它显著地区别于所有其他均衡之性质的均衡。根据这个焦点效应，如果在一个博弈中存在一个焦点均衡，那么我们应该预期能观察到这个均衡。

例如，假设性别之战博弈中的局中人1和2是生活在妇女总是传统地服从 109
其丈夫这种情形的社会中的丈夫和妻子。那么，即使这对夫妇没有感到迫使其遵守这个传统的压力，这个传统也使得均衡 (f_1, f_2) 更为聚焦并更有可能被执行。由于这个性别歧视传统，妻子将预期她丈夫会认定他应该选择 f_1，故她将勉强地选择 f_2；而丈夫将预期他妻子会选择 f_2，因此对他来说 f_1 好于 s_1（回顾我们这里有假定：两个局中人独立而又同时地做出他们的选择）。

在某些情形下，即使表面看来只是博弈表示方法的平凡方面，也有可能决定局中人会实施的焦点均衡。例如，假设在性别之战博弈中对任何一个均衡不存在强烈的文化偏见，但局中人是从表3-8而不是从表3-5中了解这个博弈结构的。虽然表3-8中的星号和黑体在这个博弈的数学定义上并没有任何作用，但它们会把局中人的注意力聚集到均衡 (s_1, s_2) 上来，因此这个博弈中的理性局中人在这种情形下将很有可能实施 (s_1, s_2)。

表3-8　　**带有强调的性别之战策略型博弈**

	C_2	
C_1	f_2	s_2
f_1	3，1	0，0
s_1	0，0	***1，3***

类似地，(s_1, s_2) 也有可能因为局中人发觉它已是现状而成为焦点均衡。例如，性别之战的局中人若已经在购物中心了，即使去足球比赛场的成本可以

忽略不计，他们也很可能满足于 (s_1, s_2)。

另一种局中人可能会聚焦于一个均衡的途径是通过某个局前通信过程。例如，如果在性别之战博弈的前一天，局中人 1 对局中人 2 说："让我们明天在足球比赛场见。"那么，我们可以很好地预期他们会实现 (f_1, f_2)。

当然，这种局前通信也可以作为博弈模型的一部分（如同我们前面所指出
110 的）。为了看出我们这样做会得到什么，假设（为简单起见）唯一可能的"局前"通信是，局中人 1 在星期五对局中人 2 说"让我们在足球比赛场相会"或"让我们在购物中心相会"，然后每个局中人必须同时决定，星期六是去看足球比赛还是去购物中心。局中人 1 在星期五所说的话没有被假定必须为他星期六的决策所遵守；即使他星期五建议了去看足球比赛，他在星期六仍可以去购物中心。我们可以把星期五和星期六期间两个局中人之间的相互影响模型化为一个展开型博弈。在这个博弈的简约正规表示中，局中人 1 的策略集可以被写作

$$C_1 = \{Ff_1, Fs_1, Sf_1, Ss_1\}$$

这里第一个大写字母表示他在星期五推荐的选择，而第二个小写字母表示他在给出建议之后在星期六做出的行动。（在简约的正规表示中，我们去掉了与局中人 1 在星期六可能选择什么行动无关的说明，只要他记得星期五提议时并没有确定他的策略。）局中人 2 的策略集可以写成

$$C_2 = \{f_2f_2, f_2s_2, s_2f_2, s_2s_2\}$$

其中先列出如果局中人 1 建议看足球比赛时，她将做出的决策；第二个字母再列出如果局中人 1 建议去购物中心，她将做出的决策。这个博弈的简约正规表示如表 3-9 所示。对于原性别之战博弈的每个均衡，这个博弈相应地也有一个给出相同期望支付配置的均衡。例如，(Sf_1, s_2f_2) 是表 3-9 的一个均衡，

表 3-9　　具有通信的性别之战博弈的策略型表示

	C_2			
C_1	f_2f_2	f_2s_2	s_2f_2	s_2s_2
Ff_1	3, 1	3, 1	0, 0	0, 0
Fs_1	0, 0	0, 0	1, 3	1, 3
Sf_1	3, 1	0, 0	3, 1	0, 0
Ss_1	0, 0	1, 3	0, 0	1, 3

它给出支付(3, 1)。在这个均衡中，局中人 1 说："让我们在购物中心相会。"
111 然后他去看足球比赛，而局中人 2 也去看足球比赛，但如果局中人 1 已经建议过去看足球比赛，她将去购物。另一个均衡是 (Fs_1, s_2s_2)，它给出支付 (1, 3)。在这个均衡中，局中人 1 建议去看足球比赛，但实际上他去了购物中心；而局中人 2 无论 1 建议去何处她都决定去购物中心。然而，这个博弈的明显焦

点均衡是（Ff_1，f_2s_2），在这个均衡中，局中人1说："让我们在足球比赛场相会。"然后他就去了足球赛场，而局中人2将无论他建议去何处都决定到那个地方去与局中人1相会。这最后一个均衡是唯一的均衡，其中局中人1在星期五所说的话是其字面的意思，从而两个局中人对作为其文化传统一部分之语言的共同理解，可能使得局中人1能有效地在表3－5的均衡（f_1，f_2）和（s_1，s_2）之间选择其一，使之成为表3－9的焦点均衡［至于这一思想一般规范的论述，参见法雷尔（Farrell，1988）及迈尔森，1989］。

一般地，当存在这种局前通信的可能性时，如果某个人能够通过向局中人公开地建议他们全都应该实施某个均衡而决定了这个均衡成为博弈的焦点均衡，我们则称这个人为一个**焦点仲裁人**（focal arbitrator）。尽管这个建议没有约束力，但如果每个局中人都相信其余的局中人都将会接受仲裁人的建议，则只要仲裁人的建议是一个均衡，那么每个局中人都会发现按照仲裁人的建议去做将是最好的。因此，一个均衡集很大的博弈也是一个仲裁者或社会计划者可以实质性地影响局中人行为的博弈。

一个博弈的焦点均衡也可以由效用支付的内在性质来决定。例如，考虑**分摊美元**（Divide the Dollars）博弈，其中有两个局中人，每个局中人都可以在0美元到100美元之间提出他所需要的某个钱数。如果他们的需求之和等于或小于100美元，那么每个人都得到他所需要的钱数，否则，每人都只能得到0美元。这就是说，这个博弈的纯策略集是

$$C_1 = C_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 100\} = [0,\ 100]$$

而两个支付函数（$i=1$，2）是

$$\begin{aligned} u_i\ (c_1,\ c_2) &= 0 \quad \text{若} \quad c_1 + c_2 > 100 \\ &= c_i \quad \text{若} \quad c_1 + c_2 \leqslant 100 \end{aligned}$$

对于0与100之间的任一数字x，纯策略偶$(x,\ 100-x)$都是一个均衡，这时两个局中人将肯定地得到100美元并分摊。(100，100)也是一个均衡，这时每 112
个局中人得到的支付肯定为0，此外，还有许多随机均衡，这时分摊可供利用的这100美元的概率可能会相当地小。例如，｛(1/99)［1］+(98/99)［99］，(1/99)［1］+(98/99)［99］｝是一个均衡，这时每个局中人得到的期望支付是1。在这个博弈中，一个不偏袒的仲裁人很可能会建议局中人应该执行（50，50）这一均衡，因为它既是帕累托有效的，又对两个局中人是平等的。但即使实际上没有这样一个不偏袒的仲裁人出面，这一事实本身也可能会使均衡（50，50）成为焦点均衡。也就是说，因为两个局中人都知道，（50，50）是有效而又公平的均衡，也是一位不偏袒的仲裁人最有可能建议的均衡，所以即使没有出现这位仲裁人，（50，50）也已经具有了强烈的内在聚焦性质。因此，**公平**（equity）与**效率**（efficiency）的福利属性可以决定博弈的焦点均衡。

焦点均衡在某些博弈中还可能由策略自身的性质来确定。例如，表3-10的博弈有3个均衡，但其中只有一个是纯（非随机）策略组合。可以论证，相对于其他两个涉及到随机化的均衡，这个博弈的局中人因而更有可能聚焦到这个纯策略均衡（y_1，y_2）上来。在重复博弈（参见第7章）中，在其他情况相同的情况下，在一个均衡中，策略的简单性或稳定性可能会使这个均衡更为聚焦。

表3-10　　一个策略型博弈

C_1	C_2		
	x_2	y_2	z_2
x_1	3，0	0，0	0，3
y_1	0，0	1，1	0，0
z_1	0，3	0，0	3，0

值得注意的是，焦点效应不可能引导智能的理性局中人去执行一个非均衡的策略组合。例如，假设一个焦点仲裁人向表3-11中的局中人推荐了（y_1，x_2）这个策略组合。这个仲裁人甚至可能通过关于这个策略组合所产生的支付配置(4，4)既有效率又兼顾公平的论调来强调他的推荐对象，但这个推荐不可能成为一个自行应验的预言。如果局中人1相信局中人2会按照仲裁人的推荐去选择x_2，那么局中人1将偏好于选择x_1而不是y_1。于是，对于智能的理性局中人来说，聚焦因素仅在它针对一个均衡时才可能是有效的。

113

表3-11　　一个策略型博弈

C_1	C_2	
	x_2	y_2
x_1	5，1	0，0
y_1	4，4	1，5

当不同的因素倾向于把注意力聚焦到不同的均衡时，在一个给定局势中，实际参与者将会聚焦并实行哪一个均衡呢？这一问题只能从人类感觉心理学和局中人的文化背景的角度来予以回答。从博弈论的视角来看，**文化规范**（cultural norms）可以被定义为一个社会用于确定博弈局势的焦点均衡的规则。可能在有些局势中，给定文化背景的局中人或许会注重用公平原则来确定焦点均衡（譬如，具有平等独立的社会地位的人之间的讨价还价）；而在另外一些局势中，某个特殊的人可能会被认为是一个有效的焦点仲裁人（譬如，在一个工作冲突中的上司）；而在另外一些局势中，传统的行为模式决定了均衡，以至没有一个人的建议或辩解可以推翻它。或许有一种文化（或地区性亚文化），

周末按照妻子的想法办事的传统是如此地强烈以致于在具有局前通信的博弈中，即使丈夫在星期五告诉了妻子他认为他们该做什么，但所执行的焦点均衡仍可能是 (Fs_1, s_2s_2)，即丈夫建议的是他们应该在足球比赛场会面，但他的建议被忽略了。(这样的文化规范可以用一些试验博弈来研究；例如，参见罗思和绍梅克（Roth and Schoumaker，1983)；罗思(1985)；库珀、德琼、福赛斯及罗斯（Cooper，DeJong，Forsythe and Ross，1989，1990)；以及范·休克、巴特里奥和比尔（van Huyck，Battalio and Beil，1990)。

于是，焦点效应既明确了数学博弈理论用于预测实际冲突局势中人类行为之根本局限，又确定了社会心理学和文化人类学的一个重要研究课题。若没有其它学科理论的补充，博弈论不可能提供一套彻底的人类行为理论应该不足为 114
奇。另一方面，博弈论的焦点效应可以提供一个关于文化和感觉的功能方面有用的视角，特别地，博弈论可预测到，在均衡集较小的局势中，文化规范的重要性也较小。

3.6　博弈的决策分析法

在博弈论的分析中，假定所有局中人都是理性而又智能的参与者，我们力图了解他们在博弈中的行为。雷费（1982）及卡登和拉基（Kadane and Larkey，1982）曾主张，当我们的任务是劝告某个特殊的局中人 i（顾客）在一个给定的博弈中应该使用什么策略时，另外有一个决策分析法可用于对博弈的研究。局中人 i 的最优策略应该相对于他在其余局中人可能策略集上的主观概率分布来最大化他的期望支付。局中人 i 决策问题的**决策分析法**（decision-analytic approach）就是，首先确定 i 的主观概率分布，以概括 i 关于其余局中人将使用什么策略的信念，然后为 i 选择一个策略，以最大化他相对于上述信念的期望支付。也就是说，用决策分析法去解决 i 的问题就是，首先要力图预测到除 i 之外其余局中人的行为，然后再来解决 i 的决策问题。对比之下，通常的博弈方法总是将所有局中人的决策问题一起加以分析并求解，就像是一个关于多个未知数的联立方程组一样。

然而，有一个基本的困难可能会使决策分析法不太可能实现。为了确定局中人 i 在其余局中人策略集上的主观概率分布，他或许感到尽力设想自己处于他们的情况之下。当他这样做时，可能会意识到其他局中人在确定其关于 i 的可能策略的主观概率分布之前，也不能决定他们的最优策略。于是，局中人 i 可能会意识到，在他能够预测对手们的行为之前，必须知道一个智能的对手所理性地预期到的他的行动，当然，这也正是他开始的问题。这个困难将迫使 i 放弃决策分析 115
法，代之以博弈论方法，即尽力同时求解所有局中人的决策问题。

即使决策分析法对局中人 i 是可行的，纳什均衡分析在他的思想中仍有作用。在应用决策分析法之后，局中人 i 将被警告，至少要注意一下，他对其余局中人策略的预测与他为自己选择的策略一起，是否构成了博弈的一个均衡。如果它们不能形成一个均衡，那么至少有某个局中人按照这些预测和计划并没有选择其最优策略。局中人 i 应该问自己，这个人为什么会犯这个错误。例如，是否有某件 i 知道而另一局中人不知道的事情？或者这是不是一个质朴决策者经常犯的一个普通错误？如果局中人 i 能找到这样的一种解释，那他可能会对自己选择的策略有信心。另一方面，如果他不能找到一个这样的解释，那么他或许应该进一步思考，如果他们了解了他的这个计划，那其余局中人可能会如何反应，相应地，他也应该修正其预测和计划。

作为一个使用决策分析法看起来比使用均衡分析更为奏效的例子，雷费曾提出了如下的**美元拍卖**（Dollar Auction）博弈。有两个风险中性的局中人，他们中的每一个都必须在 0 与 1 之间选择任一实数作为他的出价，出价高的局中人付出其出价并赢得 1 美元。（如果二人出价相同，每个人都有 .5 的概率获胜，并用其出价买下这个美元。）于是，策略集是 $C_1 = C_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$，而效用函数则是

$$
\begin{aligned}
u_i(c_1, c_2) &= 0 && \text{若} \quad i \notin \underset{j \in \{1,2\}}{\operatorname{argmax}}\, c_j \\
&= 1 - c_i && \text{若} \quad \{i\} = \underset{j \in \{1,2\}}{\operatorname{argmax}}\, c_j \\
&= (1 - c_i)/2 && \text{若} \quad c_1 = c_2
\end{aligned}
$$

在这个博弈的唯一均衡中，两个局中人肯定都出价 1，每个局中人也因此得到净支付 0。注意到，由于这是唯一不能带给他一个正支付的出价（而没有任何出价会给他一个负支付），实际上出价 1 是每个局中人的弱劣策略。因而，很难看出如何向这个博弈的局中人推荐这些均衡策略。如果我们正在为局中人
116 1 出谋划策，那么，我们尽量使用决策分析法会做得更好，只要局中人 1 对局中人 2 出价将低于 1 美元这一事件赋予某个正概率，他都将发现他的最优出价低于 1 美元。

如果博弈被轻微地扰动一下，那么均衡的某些性质可能会消失，在这个意义上，看上去不合情理的均衡性质总会更加不稳定。实际上，对美元拍卖博弈稍加扰动，其唯一的均衡将会显著地改变。例如，假设用下述约定来改变这个博弈的规则：即对每个局中人 j，有一个独立的概率 .1 让 j 的出价不是由一个理性智能的决策者来决定，而是由一个质朴的代理人从 0 到 1 区间上的一个均匀分布中选择一个出价。给定局中人 i 的出价不再受这个质朴代理人影响，并且对于每个局中人 j，给定 c_j 就是局中人 j 在不再受这样一个质朴代理人影响时将决定的出价，那么，我们就可以把 $\tilde{u}_i(c_1, c_2)$ 理解为局中人 i 在这个扰动博弈中得到的条件期望支付。于是这个扰动博弈的效用函数就是

$$\hat{u}(c_1, c_2) = .1c_i(1-c_i) \quad \text{若} \quad i \notin \underset{j\in\{1,2\}}{\operatorname{argmax}}\, c_j$$

$$= .1c_i(1-c_i) + .9(1-c_i) \quad \text{若} \quad \{i\} = \underset{j\in\{1,2\}}{\operatorname{argmax}}\, c_j$$

$$= .1c_i(1-c_i) + .9(1-c_i)/2 \quad \text{若} \quad c_1 = c_2$$

这个扰动博弈有一个均衡，其中每个局中人随机地从0.5到0.975这个区间上选择一个出价的方式如下，对这个区间上的任一数字 x，他的出价低于 x 的累积概率为 $(.025 + .1x^2 - .1x) / \{.9(1-x)\}$。在这个分布之下，每个局中人的中位出价（即累积概率为 .5 时的出价）是0.954；故出价倾向于高的价位，但它们都低于1。

当然，这个均衡依赖于我们扰动原美元拍卖博弈的特定方式。绕过这个困难的一种方式是将决策分析法的某些要素与博弈论的方法相结合。当局中人1认识到局中人2有足够的经验以至足以智能地去思考1的决策问题时，使用决策分析法就出现了困难。因此，在一个真正的美元拍卖博弈中，作为局中人1的顾问，我们可以首先问他，如果他被告知局中人2是一个特别“质朴的”决策者，那么他将用什么样的主观概率分布来描述他关于这样一个质朴决策者之出价的信念；接着我们可以询问他关于局中人2确实是那样质朴这个事件所赋 117
予的主观概率。也就是说，在允许关于局中人2是理性而又智能的这一假定有可能不正确之后，我们既可以询问局中人1对这个假定不正确所确定的概率，又可以让他描述在这个假定不正确时，他将预期到2怎样的行为。假定局中人2不是质朴的，并且有与局中人1同样的认识，那么我们就可以用这些回答去构造一个类似于前一段中的美元拍卖博弈的扰动变形，但需要利用他所确定的质朴人的出价分布及对方是质朴人的概率。然后向局中人1推荐他在这个扰动博弈中的均衡策略可能就是合乎情理的了。

3.7　演进、抵制及风险占优

阿克塞尔罗德（Axelrod，1984）曾试图用一种生物进化准则去识别博弈的好策略［也可以参见梅纳德·史密斯（Maynard Smith，1982）］。我们可以将阿克塞尔罗德的方法描述如下。首先，对博弈中的每个局中人 i，都选出由于某种原因看上去有指望或引人注目的一列或一组随机策略 L_i，故有

$$L_i \subseteq \Delta(C_i)$$

然后，对每个局中人 i 及 L_i 中的每个策略 σ_i，假设有一给定数目的“第 i 种动物”，他们任何时候参与这种博弈，都总是本能地按照这个 σ_i 策略所拟定的程序去行动。我们称之为**第一代总体**（first-generation population）。现在，我

们可以用数学归纳法产生一个代序列如下。每一个第 i 种动物都必须进行这个博弈多次，且每一次他都是充当局中人 i 的角色，而这个博弈中的其余每个局中人 j 都是由第 j 种动物充当的，这个第 j 种动物则是从目前这一代第 j 种动物总体中随机而又独立地抽取的。那么，令 $q_j^k(\sigma_j)$ 表示第 j 种动物在第 k 代中拟定使用 σ_j 的比例，我们发现一个拟定使用 σ_i 的第 i 种动物的期望支付是 $\bar{u}_i^k(\sigma_i)=u_i(\bar{\sigma}_{-i}^k,\ \sigma_i)$，其中 $\bar{\sigma}^k=(\bar{\sigma}_j^k)_{j\in N}$及

$$\bar{\sigma}_j^k(c_j)\ =\sum_{\sigma_j\in L_j} q_j^k(\sigma_j)\ \sigma_j(c_j),\quad \forall_j\in N,\ \forall c_j\in C_j.$$

118 然后第 k 代的每个动物都将在下一代即第 $k+1$ 代有与这个期望支付成正比例的子女数，即

$$q_i^{k+1}(\sigma_i)\ =\ \frac{q_i^k(\sigma_i)\bar{u}_i(\sigma_i)}{\sum\limits_{\tau_i\in L_i} q_i^k(\tau_i)\bar{u}_i(\tau_i)}$$

（为避免困难，假设所有的支付都是正数）于是，一旦对每个 i 和 L_i 中每个 σ_i 确定了 $q_i^1(\sigma_i)$，那我们就能够计算这个想像的生态系统的进化，并在很多代以后看出，怎样的策略将趋于长期地支配这个总体。（阿克塞尔罗德本人实际上只考察了对称的二人博弈，但上述内容是将其方法对任意策略型博弈的一个自然推广。）

这种分析的潜在重要性来源于如下事实，即人类实际上是一个长期进化过程的结果，并且在许多有意义的博弈中，其支付被认为与我们祖先在这个进化过程中有利于繁殖适应性的结果之间有某种关系。另一方面，任何这样的进化模拟的结果可能又过度依赖于第一代所用策略的分布假定。在阿克塞尔罗德的著作中提出，即使是那些确实相当拙劣的策略，在决定哪一个策略繁殖得最好时，仍有可能是决定性因素。至于结果可能依赖于第一代动物中执行劣策略或其他愚蠢策略者的出现，我们可以辩解说，只要所有局中人都是智能而又理性的是共同知识，这个进化模拟的结果与局中人的决策问题应该是不相关的。

此外，对于任一纳什均衡 σ，如果对所有的 i，几乎所有第 i 种动物的第一代都拟用均衡策略 σ_i，那就没有一个动物可以通过任一其他策略能做得明显更好。给定任一策略型博弈 Γ 和$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 中任意两个均衡 σ 与 τ，我们称 σ 对 τ 的抵制（resistance）为满足 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 及下式的最大 λ

$$\begin{aligned}&u_i\Big(\ (\lambda\tau_j+\ (1-\lambda)\ \sigma_j)_{j\in N-i},\sigma_i\Big)\\&\quad\geqslant u_i\Big(\ (\lambda\tau_j+\ (1-\lambda)\ \sigma_j)_{j\in N-i},\ \tau_i\Big),\quad \forall i\ \in N\end{aligned}$$

也就是说，一个均衡 σ 对另一个均衡 τ 的抵制是，对所有的 i，若把拟定用 τ_i 的动物放到拟定用 σ_i 的一个动物总体中，拟定用 τ_i 的动物所占的最大比例，
119 使得按照阿克塞尔罗德的进化过程，对任何一个 i，拟定用 τ_i 的动物不可能具

有超过拟定用 σ_i 的动物的繁殖优势。因而，如此定义的话，则抵制可以提供当一个均衡与另一个均衡相比时相对进化稳定性方面一个粗略的度量。[这个抵制指标（即 λ）的粗略性在具有许多局中人的博弈中会变得明显，当其中的抵制是用这个方式度量时，一个其策略对任何其他局中人可能都无关紧要的次要局中人之几乎不重要可以降低一个均衡的“抑制”。]

哈森伊和塞尔滕（1988）已经设法研究出了一个程序，用以对每个有限策略型博弈识别出一个可被认为是这个博弈的解的一个唯一均衡。这个哈森伊－塞尔滕解可以被看成一个与阿克塞尔罗德的进化理论有某种相似之处的进化过程的极限。不过，哈森伊和塞尔滕提供了一个定义策略初始分布的复杂准则，以避免任意性及对与博弈无关细节的依赖性。而且，哈森伊与塞尔滕所用的称之为**跟踪过程**（tracing procedure）的进化过程，最好被理解为描述由一个固定的理性智能局中人集所考虑的试探性计划随时间的演变，而不是一个自然动物生态系统的繁殖进化。关于哈森伊－塞尔滕解概念的严格定义，读者可以参考他们的著作(1988)。

哈森伊和塞尔滕在提出他们的解概念时，定义了均衡之间的一个**风险占优**（risk dominance）关系。对于每个局中人都有两个纯策略的二人博弈，他们就纯策略均衡的特殊情况用公理提出这个概念。在这种情况下，当且仅当一个均衡 c 对 d 的抵制大于 d 对 c 的抵制时，c 才是对 d 风险占优的。（在更一般的情况下，哈森伊和塞尔滕的风险占优定义是不能简单地用抵制的术语来叙述，也不能用公理导出。）

考虑表 3－12 所示的例子，它来源于奥曼。在两个纯策略均衡之间，(y_1, y_2) 对 (x_1, x_2) 的抵制是 7/8，而 (x_1, x_2) 对 (y_1, y_2) 的抵制仅为1/8，故 (y_1, y_2) 对 (x_1, x_2) 是风险占优的。事实上，y_1 和 y_2 为最优策略所能取的随机策略的范围比 x_1 和 x_2 为最优策略所能取的范围更宽。再则，这个博弈的随机均衡对这两个纯策略均衡中任一个的抵制都为 0。

表 3－12　　**一个策略型博弈**

	C_2	
C_1	x_2	y_2
x_1	9，9	0，8
y_1	8，0	7，7

恰如公平与效率的福利属性可以确定局中人所聚焦的均衡一样，抵制值和 120
风险占优关系也同样可以确定一个博弈中的焦点均衡。表 3－12 的博弈是很有意思的，因为帕累托有效这个性质可能倾向于使均衡 (x_1, x_2) 成为聚焦的，而风险占优的性质可能倾向于使均衡 (y_1, y_2) 成为聚焦的。考虑这个或那个

性质的传统可能确定在一个特定局势中哪个均衡是聚焦的。

哈森伊和塞尔滕对风险占优提出了一个有意思的理论论点。他们提出，对于理想的理性局中人来说，在博弈的变换下若相应的最佳反应不变，则焦点均衡的确定应该不依赖于这个变换。正如2.3节所指出的，表3-12中的博弈与表2-5的博弈是最佳反应等价的（但不是完全等价的），但在表2-5的博弈中，(y_1, y_2)既是帕累托有效又是风险占优的。

博弈中朝着帕累托有效的趋势可以从其它的生物进化模型中导出，其中总体中的竞争是通过一种**粘性**（viscosity）[在哈密尔顿（Hamilton），1964和波洛克（Pollock），1989的意义上]来刻划的。例如，让我们修改一下前面描述的进化模型，假设进行这个博弈的动物生活在一些群体中，每一个动物都生活在与其祖先相同的一个群体中，并且对自己群体内成员的抗争比对另一群体的成员的抗争更有可能。假定这些动物进行表3-12的博弈，则在任一给定的群体内部，除非这个群体中最初使用x_i的动物比例大于7/8，否则使用y_i的动
121 物会很快地增殖。从而我们可以预料，在很多代以后，任一给定群体内的几乎所有的动物都会使用相同的均衡策略，并且多数群体（包括最初总体中使用x_i和y_i的动物之比例近似相等的那些群体）都会收敛于风险占优的均衡(y_1, y_2)。不过，从长期来看，的确收敛于帕累托有效均衡(x_1, x_2)的群体在规模上要比收敛于(y_1, y_2)的群体增长得快。因此，归根结底，抗争过程中的粘性可能趋于产生一个其中大多数个体都使用有效均衡(x_1, x_2)的总体。

一般地，生物学的博弈与经济学的博弈的区别在于，前者是在遗传层次上的策略选择，而后者是在个体认知力层次上的选择。因此，生物学中博弈，其策略选择（通过变异）受制于基因类型或亚种。因为亚种成员可能相遇并相互对抗地博弈，所以这个区别是重要的。即使在一个亚种是整个种群总体的一个极小部分时，但由于具有亲属关系的一些群体在整个种群的范围内不是均匀分散的，所以亚种的成员们仍能够以正频率相互相遇。

于是，当某给定物种的两个个体相遇时，假设他们之间的博弈$\Gamma = (|1, 2|, C_1, C_2, u_1, u_2)$在下述意义上是一个**对称的**（symmetric）博弈，即

$$C_1 = C_2 \quad 且\ u_1(\alpha, \beta) = u_2(\beta, \alpha), \qquad \forall \alpha \in C_1, \forall \beta \in C_1.$$

（这里，一个个体的支付表示对其繁殖适应性的某种贡献。）让我们用某个**粘性系数**（Viscosity parameter）δ表示在小亚种内部交互作用的相对频率，其中$0 < \delta < 1$。那我们称σ为Γ的一个δ-**粘性均衡**（δ-viscous equilibrium），当且仅当σ是在$\sigma = (\sigma_1, \sigma_1)$的意义上的一个对称随机策略组合，其中$\sigma_1 \in \Delta(C_1)$，并且，对$C_1$中每个纯策略$c_1$

$$若\ \sigma_1(c_1) > 0, \quad 则 \quad c_1 \in \underset{e_1 \in C_1}{\operatorname{argmax}}\, u_1\{[e_1], (1-\delta)\sigma_1 + \delta[e_1]\}$$

也就是说，总体σ_1中以正概率被使用的纯策略只能是这样的：每当亚种的一

个个体进行这个博弈时，如果它的对手是从同一亚种随机抽取的概率为 δ，而从整个种群的其他亚种中随机抽取的概率为 $(1-\delta)$，那么这些纯策略对这个亚种将是最优的。例如，对于支付如表 3-12 所示的对称博弈，当 $\delta>7/9$ 时，有唯一的一个 δ-粘性均衡，它给出帕累托有效的结果 (9, 9)。

随着粘性系数 δ 趋于零，则 δ-粘性均衡一定趋近于纳什均衡。然而，对于 122
某些对称的二人博弈，存在不能由这样的 δ—粘性均衡序列趋近的对称纳什均衡。[参见迈尔森、波洛克和斯温克尔斯 (Swinkels)，1991。]

进化稳定策略的概念是生物学的博弈理论中一个重要的解概念（参见梅纳德·史密斯，1982)。对于前面描述的对称二人博弈 Γ，一个随机策略 σ_1 被称为一个**进化稳定策略** (evolutionary stable strategy) 的充要条件是，(σ_1, σ_1) 是这个博弈对称的纳什均衡，并且对于每个随机策略 τ_1，如果 $\tau_1 \neq \sigma_1$，则存在 0 与 1 之间的某个数 δ 使得

$$u_1(\tau_1, (1-\delta)\ \sigma_1+\delta\tau_1) < u_1(\sigma_1, (1-\delta)\ \sigma_1+\delta\tau_1)$$

也就是说，当存在小的正概率会遇到一个正使用策略 τ_i 的个体时，均衡策略 σ_1 严格地好于 τ_1。

有些对称的二人博弈没有进化稳定策略。例如，考虑一个对称的二人博弈，其中 $C_1=C_2=\{x, y, z\}$，

$$u_1(x, x)=u_1(y, y)=u_1(z, z)=1$$
$$u_1(x, y)=u_1(y, z)=u_1(z, x)=3$$
$$u_1(y, x)=u_1(z, y)=u_1(x, z)=-3$$

以及对 C_1 中任意两个 c_1 和 c_2，均有 $u_2(c_1, c_2)=u_1(c_2, c_1)$。这个博弈具有唯一的一个纳什均衡 (σ_1, σ_1)，且 $\sigma_1=(1/3)[x]+(1/3)[y]+(1/3)[z]$，但这个均衡不满足进化稳定性的定义，例如令 $\tau_1=[x]$ 就可以看出这一点。这个博弈或许表示了一个具有内在不稳定性的局势，这一点曾被我们提到过。然而，值得注意的是，这个博弈的纳什均衡对任一正数 δ 都是 δ-粘性均衡。

3.8　两人零和博弈

博弈论的很多早期著作都是关于两人零和博弈方面的。一个策略型**两人零和博弈** (two-person zero-sum game) 是形如 $\Gamma=(\{1, 2\}, C_1, C_2, u_1, u_2)$ 的任一博弈，但必须满足

$$u_2(c_1, c_2)=-u_1(c_1, c_2), \quad \forall c_1 \in C_1, \forall c_2 \in C_2$$

123 两人零和博弈所描述的局势中，两个参与人处于彼此完全对立的地位，其中一人之所得正是另一人之所失。在这些博弈中，因为 $u_2 = -u_1$，我们也可以等价地说，局中人 2 的目标是最小化局中人 1 的期望支付。在表 3－3 中所示的摊牌博弈就是一个两人零和博弈的例子。下述定理概括了这类博弈的某些重要数学性质。

定理3.2 (σ_1, σ_2) 是一个有限两人零和博弈 $(\{1, 2\}, C_1, C_2, u_1, -u_1)$ 的一个均衡，当且仅当

$$\sigma_1 \in \underset{\tau_1 \in \Delta(C_1)}{\operatorname{argmax}} \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} u_1(\tau_1, \tau_2)$$

和

$$\sigma_2 \in \underset{\tau_2 \in \Delta(C_2)}{\operatorname{argmin}} \max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} u_1(\tau_1, \tau_2)$$

除此之外，如果 (σ_1, σ_2) 是这个博弈的一个均衡，那么

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} u_1(\tau_1, \tau_2) = \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} \max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} u_1(\tau_1, \tau_2)$$

证明 首先假设 (σ_1, σ_2) 是一个均衡，则有

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} u_1(\tau_1, \sigma_2) \geqslant \max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} u_1(\tau_1, \tau_2)$$

和

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} u_1(\sigma_1, \tau_2) \leqslant \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} \max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} u_i(\tau_1, \tau_2)$$

（在上面两个关系式的每一个中，等号都是因均衡的定义而取得；不等号则因以下事实而取得：如果对任何 x 都有 $f(x) \geqslant g(x)$，则有 $\max f \geqslant \max g$ 和 $\min g \leqslant \min f$。）但是

$$\max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} u_1(\tau_1, \tau_2) \geqslant \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} u_1(\sigma_1, \tau_2)$$

且

$$\min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} \max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} u_1(\tau_1, \tau_2) \leqslant \max_{\tau_1 \in (C_1)} u_1(\tau_1, \sigma_2)$$

124 因此，所有这些表达式都是等式，这就得到定理中最后一行的 3 个等式。而定理中的两个包含关系是由下述事实推导出来的：

$$\min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} u_1(\sigma_1, \tau_2) = \max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} u_1(\tau_1, \tau_2)$$

及

$$\max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} u_1(\tau_1, \sigma_2) = \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} \max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} u_1(\tau_1, \tau_2)$$

相反地，现在假设 σ_1 和 σ_2 满足定理中的两个包含关系。因为我们知道这

个博弈存在一个均衡，由定理 3.1 知，定理中的最后一个等式（即 max－min 与 min－max 之间相等）仍然成立。于是，

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) \geqslant \min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} u_1(\sigma_1, \tau_2) = \max_{\tau_1 \in \Delta(C_1)} u_1(\tau_1, \sigma_2) \geqslant u_1(\sigma_1, \sigma_2)$$

故这所有的表达式都是相等的，从而 (σ_1, σ_2) 是这个两人零和博弈的均衡。■

如此一来，一个两人零和博弈的所有均衡都给局中人 1 相同的期望支付。也就是说，尽管这种博弈可能有不止一个均衡，但两个局中人在所有这些均衡之间都是无差异的。

为了理解定理 3.2 中所述的 max－min 与 min－max 之间相等的意义，须注意这个结论的证明依赖于一个均衡的存在。如果不用随机策略，则均衡的存在性是不能保证的，而这个等式也就可能不成立。例如，若在摊牌博弈（表 3－3）中只许我们使用纯策略，则有

$$\max_{c_1 \in C_1} \left(\min_{c_2 \in C_2} u_1(c_1, c_2) \right) = \max\{0, 0, -0.5, 0\} = 0$$

$$\min_{c_2 \in C_2} \left(\max_{c_1 \in C_1} u_1(c_1, c_2) \right) = \min\{0.5, 1\} = 0.5 \neq 0$$

贯穿本章，我们假定了在一个策略型博弈中，局中人都同时而又独立地选择他们的策略，所以一个局中人改变其计划不会影响另一局中人所选择的策 125
略。然而，暂且假定，局中人 1 担心，无论他选择什么随机策略，2 将能发现他的选择并将以最不利于 1 的方式做出反应。在这个假定之下，如果局中人 1 在 $\Delta(C_1)$ 中选择随机策略 τ_1，那么他的期望支付将是 $\min_{\tau_2 \in \Delta(C_2)} u_1(\tau_1, \tau_2)$。定理 3.2 断言，在一个两人零和博弈中，局中人 1 在这个悲观假设之下的均衡策略还是最大化自己的期望支付。由于这个均衡策略最大化了局中人 1 的最小期望支付，所以在这个两人零和博弈中，局中人 1 的均衡策略可被称为 1 的**最大化最小**（maximin）策略。类似地，在一个两人零和博弈中，局中人 2 的任何一个均衡策略都是对付局中人 1 的**最小化最大**（minimax）策略。

两人零和博弈理论与最优化理论中的对偶概念之间有着密切的关系。为了看出究竟，考虑最优化问题

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x),$$

约束为　$g_k(x) \geqslant 0, \forall k \in \{1, 2, \cdots, m\}$　(3.10)

其中 $f(\cdot)$，$g_1(\cdot)$，…，$g_m(\cdot)$ 都是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数。这个问题等价于问题

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \left(\max_{y \in \mathbf{R}_+^m} \left\{ f(x) - \sum_{k=1}^{m} y_k g_k(x) \right\} \right) \tag{3.11}$$

[这里 $\mathbf{R}_+^m$ 是满足 $y_1 \geqslant 0$，…，$y_m \geqslant 0$ 的所有向量 $(y_1, \cdots, y_m)$ 所组成的集。]

为看出这两个问题是等价的，须注意在（3.11）式中被最小化的目标函数在 x 满足（3.10）式的约束条件时等于 $f(x)$［在 $y=(0,\cdots,0)$ 处实现最大值］，而在任何一个约束不被满足时，则这个目标函数会等于 $+\infty$。通过颠倒最大化与最小化的顺序，我们可以构造这个优化问题的**对偶**（dual），它是

$$\max_{y\in R_+^m}\left(\min_{x\in R^n}\left(f(x)-\sum_{k=1}^{m}y_k g_k(x)\right)\right) \tag{3.12}$$

最优化理论的经典结论指出，借助于某些附加的假设，一个最优化问题与它的对偶问题具有相等的最优值［参见杰弗里翁（Geoffrion，1971）］。这些结论可以被理解为定理 3.2 中最大化最小与最小化最大之间等值性的推广。对偶理论最重要的特例就是线性规划问题的情形。

126 **线性规划**（Linear programming）问题是具有线性目标函数且所有约束都是仿射（即线性函数加上一个常数）函数的最优化问题。也就是说，为了让（3.10）成为一个线性规划问题，我们令

$$f(x)=\sum_{l=1}^{n}c_l x_l \quad \text{和}$$

$$g_k(x)=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}x_l-b_k,\ \forall k\in\{1,\cdots,n\}$$

其中系数 a_{kl}，b_k 及 c_l 都是给定的参数。于是最优化问题（3.10）变成

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n}\sum_{l=1}^{n}c_l x_l \tag{3.13}$$

约束为 $\sum_{l=1}^{n}a_{kl}x_l\geqslant b_k,\forall k\in\{1,\cdots,n\}$

其对偶问题（3.12）也可相应写作

$$\max_{y\in\mathbf{R}_+^m}\left(\min_{x\in\mathbf{R}^n}\sum_{l=1}^{n}\left(c_l-\sum_{k=1}^{m}y_k a_{kl}\right)x_l+\sum_{k=1}^{m}y_k b_k\right) \tag{3.14}$$

而这又等价于下一问题

$$\max_{y\in\mathbf{R}_+^m}\sum_{k=1}^{m}y_k b_k \tag{3.15}$$

约束为 $\sum_{k=1}^{m}y_k a_{kl}=c_l,\forall l\in\{1,\cdots,n\}$

［因为（3.14）中 x 的分量可正可负，所以只要（3.15）式中有一个约束条件不满足，则（3.14）式中要最大化的目标函数就会等于 $-\infty$。］值得注意的是，对（3.13）式中的每一个约束条件，（3.15）式中都有一个决策变量（y_k），而对（3.13）式中的每一个决策变量（x_l），（3.15）式中都有一个约束条件；在

(3.13) 式中，所有的约束都是不等式，变量可以是任意实数，而在 (3.15) 式中，所有的约束都是等式，变量被要求为非负实数。

对偶定理的下述形式的证明可以在任何一本线性规划方面的书中找到（例如，参见切沃托，1983）。

线性规划的对偶定理　假设 $\mathbf{R}^n$ 中至少存在一个向量 $\hat{x}$ 使得　127

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\hat{x}l \geqslant b_k, \quad \forall k \in \{1,\cdots,m\}$$

以及至少在 $\mathbf{R}_+^m$ 中存在一个非负向量 $\hat{y}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{m} \hat{y}_k a_{kl} = c_l, \quad \forall l \in \{1,\cdots,n\}$$

则最优化问题(3.13)和(3.15)都有最优解，且目标函数 $\sum_{l=1}^{n} c_l x_l$ 和 $\sum_{k=1}^{m} y_k b_k$ 在最优解处的值是相等的。

3.9　贝叶斯均衡

对于一个具有不完全信息的贝叶斯博弈，哈森伊（1967～1968）将**贝叶斯均衡**（Bayesian equilibrium）定义为其策略型类型代理人表示的任何一个纳什均衡。也就是说，一个贝叶斯均衡为每个局中人的每个类型都确定了一个行动或随机策略，使得每个局中人的每个类型在知道自己的给定类型而不知道其他人的类型的情况下，都将最大化他自己的期望效用。值得指出的是，在一个贝叶斯均衡中，一个局中人的行动会依赖于他自己的类型，但不会依赖于其他局中人的类型。（根据定义，在一个局中人的类型选择他的行动时，假设类型包含了在博弈开始时他的全部私人信息。）从而我们必须规定每个局中人的每个可能类型会做什么，而不仅仅是实际的类型，否则，我们就不能为一个不知道其他局中人实际类型的局中人定义其期望效用支付。

为了规范地叙述贝叶斯均衡的定义，令 Γ^b 是一个如同 2.8 节中所定义的贝叶斯博弈，即

$$\Gamma^b = \{N, (C_i)_{i\in N}, (T_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\}$$

贝叶斯博弈 Γ^b 的一个**随机策略组合**（randomized-strategy profile）就是集 $\times_{i\in N}\times_{t_i\in T_i}\Delta(C_i)$ 中任何一个 σ，即任一 σ 使得

$$\sigma = \left((\sigma_i(c_i \mid t_i))_{c_i\in C_i} \right)_{t_i\in T_i, i\in N}$$

$$\sigma_i(c_i|t_i) \geqslant 0, \quad \forall c_i \in C_i, \ \forall t_i \in T_i, \ \forall i \in N, \text{ 和}$$

$$\sum_{c_i \in C_i} \sigma_i(c_i \mid t_i) = 1, \quad \forall t_i \in T_i, \ \forall i \in N$$

128 在这样一个随机策略组合 σ 中，数 $\sigma_i\ (c_i|t_i)$ 表示如果局中人 i 的类型是 t_i，他将会使用行动 c_i 的条件概率；并且在随机策略组合 σ 中，局中人 i 的类型 t_i 的随机策略是

$$\sigma_i(\cdot|t_i) = (\sigma_i\ (c_i|t_i))_{c_i \in C_i}$$

贝叶斯博弈 Γ^b 的一个贝叶斯均衡是任一随机策略组合 σ 使得对于 N 中每个局中人 i 和 T_i 中每个类型 t_i，均有

$$\sigma_i(\cdot \mid t_i) \in \underset{\sigma_i \in \Delta(C_i)}{\operatorname{argmax}} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i} \mid t_i) \sum_{c \in C} \left(\prod_{j \in N-i} \sigma_j(c_j \mid t_j) \right) \tau_i(c_i) u_i(c, t)$$

作为一个简单的二人博弈的例子，假设 $C_1 = \{x_1, y_1\}$，$C_2 = \{x_2, y_2\}$，$T_1 = \{1.0\}$（故局中人 1 只有一个可能类型，且没有私人信息），$T_2 = \{2.1, 2.2\}$，$p_1(2.1|1.0) = .6$，$p_1(2.2|1.0) = .4$，而依赖于行动和局中人 2 的类型的效用支付 (u_1, u_2) 如表 3－13 所示。

表 3－13　　一个贝叶斯博弈所有类型与行动组合的期望支付

$t_2 = 2.1$

	C_2	
C_1	x_2	y_2
x_1	1, 2	0, 1
y_1	0, 4	1, 3

$t_2 = 2.2$

	C_2	
C_1	x_2	y_2
x_1	1, 3	0, 4
y_1	0, 1	1, 2

在这个博弈中，对类型 2.1 来说 y_2 是一个强劣的行动，而对类型 2.2 来说 x_2 是一个强劣的行动，因此在一个贝叶斯均衡中，2.1 一定选择 x_2，而 2.2 一定选择 y_2。局中人 1 希望 (x_1, x_2) 或者 (y_1, y_2) 成为这个博弈的结果，并且又考虑到 2.1 比 2.2 有更大的可能，于是该博弈唯一的贝叶斯均衡是

$$\sigma_1\ (\cdot|1.0) = [x_1],\ \sigma_2\ [\cdot|2.1] = [x_2],\ \sigma_2\ [\cdot|2.2] = [y_2]$$

这个例子说明，如果像分析一个具有完全信息的博弈那样去单独分析本例
129 中的每个矩阵，这是危险的。如果局中人 2 的类型为 2.1 是共同知识，那么局中人将具有表 3－13 左边的那个支付矩阵，此时唯一的均衡是 (x_1, x_2)。如果局中人 2 的类型为 2.2 是共同知识，那么局中人将具有表 3－13 右边的那个支付矩阵，此时唯一的均衡是 (y_1, y_2)。因而，如果我们只看这两个矩阵的

完全信息纳什均衡，那我们或许能做出这样的预测："如果 2 的类型是 2.1，则这个博弈的结果将是 (x_1, x_2)；而如果 2 的类型是 2.2，则这个博弈的结果将是 (y_1, y_2)。"

不过，对于这个实际的贝叶斯博弈来说，因为其中局中人 1 起先并不知道局中人 2 的类型，所以这个预测将是荒谬的。首先注意到，这个预测依据 2 的不同类型，为局中人 1 指出了两个不同的行动（若为 2.1 则 x_1；而若为 2.2 则 y_1）。因此，除非局中人 1 从局中人 2 那里收到某种信息，否则局中人 1 不能像我们预测的那样去行动。也就是说，除非对这个博弈的结构添加两个局中人之间的某种通信，否则这个预测将不可能实现。现在再注意到局中人 2 在她的类型是 2.1 时偏好 (y_1, y_2) 胜于 (x_1, x_2)，而在她的类型是 2.2 时又偏好 (x_1, x_2) 胜于 (y_1, y_2)。因而，即使两个局中人之间的通信被允许，但由于这种通信将总是给出局中人 2 她不喜欢的结果，所以她将不愿意进行这种实现预测所必不可少的通信。她将更喜欢巧妙地使用通信以得到这样的结果，即如果她的类型是 2.1，结果便是 (y_1, y_2)；而如果她的类型是 2.2，结果便是 (x_1, x_2)。具有通信的博弈将在第 6 章详尽地讨论。

3.10　均衡中随机策略的纯化

随机策略均衡有时看来是难以解释的。再次考虑表 3－7 中的例子，这个博弈唯一的均衡是（.75 [T] + .25 [B], .5 [L] + .5 [R]）。但是，局中人 1 分别以概率 .75 和 .25 随机地选择 T 和 B 的必要性，似乎与人们在实际生活中所经历的任何一种强制都不相符合。如果局中人 1 认为局中人 2 在同等可能地选择 L 或 R，那么局中人 1 当然愿意以任何一种方式在 T 与 B 之间随机化。但究竟是什么原因让局中人 1 实际上想在他的随机决策中恰如其分地使用概率 .75 和 .25 呢？

哈森伊（1973）指出，涉及随机策略的纳什均衡可以被理解为其中每个局中人都（几乎）总是选择其唯一最优行动的贝叶斯均衡之极限（也可参见米尔格龙和韦伯，1985）。哈森伊的思想就是对原博弈稍微做些修改，使得每个局中 130
人关于他自己的支付有少量的私人信息。例如，假设把表 3－7 的博弈稍加修改，得到一个具有不完全信息的博弈（表 3－14）。这里，ε 是某个满足 $0<\varepsilon<1$ 的给定数字，而 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 是独立同分布的随机变量，每个都是从 0 到 1 区间上的均匀分布中抽取的。在这个博弈进行时，局中人 1 知道 $\tilde{\alpha}$ 但不知道 $\tilde{\beta}$ 的值，而局中人 2 知道 $\tilde{\beta}$ 的值但不知道 $\tilde{\alpha}$ 的值。若 $\varepsilon=0$，则表 3－14 就与表 3－7 相同，故让我们将 ε 视作某个非常小的正数（譬如说 .0001），从而当 T 或 L 被选择时，$\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 表示对局中人的支付只有很小影响的次要因素。

表 3-14 所有策略组合的支付

C_1	C_2	
	L	R
T	$\varepsilon\tilde{\alpha}$, $\varepsilon\tilde{\beta}$	$\varepsilon\tilde{\alpha}$, 1
B	1, $\varepsilon\tilde{\beta}$	-1, 3

给定 ε，这个博弈存在一个实质上唯一的贝叶斯均衡。如果局中人 1 观察到 $\tilde{\alpha}$ 大于 $(2+\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$，他就选择 T；否则他就选择 B。如果局中人 2 观察到 $\tilde{\beta}$ 大于 $(4-\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$，她就选择 L；否则她就选择 R。也就是说，这个贝叶斯均衡 σ 满足

$$\sigma_1(\cdot|\tilde{\alpha}) = [T] \quad 若 \quad \tilde{\alpha} > (2+\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$$
$$\sigma_1(\cdot|\tilde{\alpha}) = [B] \quad 若 \quad \tilde{\alpha} < (2+\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$$

和

$$\sigma_2(\cdot|\tilde{\beta}) = [L] \quad 若 \quad \tilde{\beta} > (4-\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$$
$$\sigma_2(\cdot|\tilde{\beta}) = [R] \quad 若 \quad \tilde{\beta} < (4-\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$$

[在 $\tilde{\alpha}=(2+\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$ 或 $\tilde{\beta}=(4-\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$ 的零概率事件下，$\sigma_1(\cdot|\tilde{\alpha})$ 和 $\sigma_2(\cdot|\tilde{\beta})$ 相应地可以被任意选取。] 当局中人 2 在这个博弈中使用均衡策略 σ_2 时，局中人 1 只在 $\tilde{\alpha}=(2+\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$ 时才在 T 与 B 之间无差异；否则，他的期望效用由使用 $\sigma_1(\cdot|\tilde{\alpha})$ 为他确定的那个行动而唯一地被最大化。类似
131 地，当局中人 1 在这个博弈中使用均衡策略 σ_1 时，局中人 2 只有在 $\tilde{\beta}=(4-\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$ 时才在 L 与 R 之间无差异；否则，她的期望效用由使用 $\sigma_2(\cdot|\tilde{\beta})$ 为她确定的行动而被唯一地最大化。因此，每个局中人的预期行为让另一个局中人在他的两个行动之间几乎无差异，所以他独立地观察到的次要因素可以为他确定唯一的最优行动。再注意到，随着 ε 趋近于 0，这个均衡收敛于表 3-7 所示博弈唯一的均衡，其中局中人 1 以 .75 的概率选择 T，而局中人 2 以 .50 的概率选择 L。

为了看出表 3-14 的贝叶斯均衡是如何计算的，首先注意到随着 $\tilde{\alpha}$ 的增加，T 对局中人 1 来说是越来越好的选择，而随着 $\tilde{\beta}$ 的增加，L 也是局中人 2 越来越好的选择。因而，应该存在某两个数 p 和 q，使得局中人 1 在 $\tilde{\alpha}$ 大于 p 时选择 T 而在 $\tilde{\alpha}$ 小于 p 时选择 B，局中人 2 则在 $\tilde{\beta}$ 大于 q 时选择 L 而在 $\tilde{\beta}$ 小于 q 时选择 R。那么，从 1 的角度来看，2 将选择 L 的概率是 $1-q$。为了让局中人 1 在临界值 $\tilde{\alpha}=p$ 处感觉 T 和 B 之间是无差异的，我们需要

$$\varepsilon p = (1)(1-q) + (-1)q$$

类似地，为了让局中人 2 在临界值 $\tilde{\beta}=q$ 处无差异于 L 和 R，我们需要

$$\varepsilon q = (\quad 1)(1-p) + (3)\ p$$

这两个等式的解是 $p=(2+\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$ 和 $q=(4-\varepsilon)/(8+\varepsilon^2)$

一般地，当我们研究一个涉及到随机策略的均衡时，我们可以将每个局中人的策略随机化解释为依赖于那些已从博弈的描述中忽略掉的次要因素。当一个博弈没有纯策略均衡时，我们应该预期到，一个局中人的策略可能被某些他独立于其余局中人而观察到的次要因素所决定。

将这个结论与焦点效应相比较或许是有意义的。在具有多重均衡的博弈中，那些对支付只有很小或没有影响但能被所有局中人明显地观察到的因素，可能通过决定焦点均衡而对博弈的结果产生重大影响。因此，随机均衡理论可以识别那些其中次要私人信息可能起决定性作用的局势，而焦点效应则可以识别那些其中次要公共信息可能起决定性作用的局势。

3.11　拍卖

贝叶斯均衡的概念在对拍卖的分析中是很重要的［例如，参见米尔格龙 132
(1985, 1987)；米尔格龙和韦伯 (1982)；麦卡菲和麦克米伦 (McAfee and McMillan, 1987)；以及威尔逊 (1987)］。我们在这里只考虑一些简单的入门性例子。

首先考虑一个拍卖单个不可分物品的例子，其中的局中人是 n 个投标人。每个局中人私下都知道，如果他赢得这个拍卖，这个拍卖品对他的价值将是多少。假设存在某个正数 M 和某个递增的可微函数 $F(\cdot)$，使得每个局中人认为这个拍卖品对其余 $n-1$ 个局中人的价值是相互独立的随机变量，它们都是从区间［0，M］抽取，且累积分布为 F。［从而任一给定的局中人认为这个物品对他的价值小于 v 的概率为 $F(v)$。］在这个拍卖中，每个局中人 i 都同时提交一个密封出价 b_i，b_i 必须是一个非负数，出价最高的局中人在付出他的出价后将得到这个拍卖品，而其余局中人则不需付出其出价。因此，令 $b=(b_1, \cdots, b_n)$ 表示出价组合，而令 $v=(v_1, \cdots, v_n)$ 表示这个拍卖品对 n 个局中人来说的价值组合，则局中人 i 的期望支付是

$$u_i(b, v) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{若} \quad i = \underset{j\in\{1,\cdots,n\}}{\operatorname{argmax}}\ b_j \\ 0 & \text{若} \quad i \notin \underset{j\in\{1,\cdots,n\}}{\operatorname{argmax}}\ b_j \end{cases}$$

这是一个贝叶斯博弈，其中每个局中人的类型是他对这个物品所认定的价值。现在我们来说明如何找到这个博弈的一个贝叶斯均衡，在这个均衡中，每个局中人都按照某个可微的增函数 β 选择其出价。

在均衡中，局中人 i 预期到其余局中人所选择的出价在 0 与 $\beta(M)$ 之

间，故局中人 i 决不会提交高于 $\beta(M)$ 的出价。假设这物品对 i 的价值实际上是 v_i 时，他所提交的出价为 $\beta(w_i)$。当且仅当这物品对 j 的价值 $\tilde{v}_j$ 满足 $\beta(\tilde{v}_j)<\beta(w_i)$，由于 β 是增函数，也就是当且仅当 $\tilde{v}_j<w_i$ 时，另一局中人 j 才会提交小于 $\beta(w_i)$ 的出价。因为其余 $n-1$ 个局中人的类型是按照 F 独立分布的，所以出价 $\beta(w_i)$ 将赢得这个拍卖的概率是 $F(w_i)^{n-1}$。因此，局中人 i 因拍卖品对他的价值为 v_i 而出价 $\beta(w_i)$ 所得到的期望支付将会是

$$(v_i-\beta(w_i))F(w_i)^{n-1}$$

133 然而，根据均衡的定义，局中人 i 在认定拍卖品的价值为 v_i 时的最优出价应该是 $\beta(v_i)$，故这个期望支付对 w_i 的导数在 w_i 等于 v_i 时应该为 0，即

$$0=(v_i-\beta(v_i))F'(v_i)(n-1)F(v_i)^{n-2}-\beta'(v_i)F(v_i)^{n-1}$$

这个微分方程蕴含着，对 $[0, M]$ 中的任一 x，

$$\beta(x)F(x)^{n-1}=\int_0^x y(n-1)F(y)^{n-2}F'(y)dy$$

这个结果与其他有关的结果已经出维克瑞（Vickrey，1961）和奥特加－赖克特（Ortega-Reichert，1968）导出了。在类型都是均匀分布的情形下，由于对 $[0, M]$ 中任一 y 都有 $F(y)=y/M$，故上述公式意味着

$$\beta(v_i)=(1-\frac{1}{n})v_i,\quad \forall v_i\in[0, M]$$

值得一提的是，每个局中人在他的出价中所容许自己得到的边际利润随着投标人数的增加而减少。

这个博弈是**独立个人价值**（independent private values）拍卖的一个例子，这种拍卖的意义是，每个投标人私下都知道拍卖品对自己的实际价值，并且认为其余投标人对拍卖品的个人价值是相互独立的随机变量。不过，在许多拍卖中，拍卖品的价值对所有投标人都是相同的，尽管可能因为他们对拍卖品的质量拥有不同私人信息而对这个价值可能有不同的估计。这样的拍卖被称为**共同价值**（common value）拍卖。例如，一片陆地的石油钻探权拍卖可能就是共同价值拍卖，其中共同价值是这片陆地下面石油的价值，而投标人关于它可以有不同的信息和不同的估计。

现在来考虑一个简单的例子，两个投标人对一个共同价值未知的拍卖品竞标。这个拍卖品的货币价值依赖于三个独立随机变量 $\tilde{x}_0$，$\tilde{x}_1$ 和 $\tilde{x}_2$，并且这三个随机变量中的每一个都是从 0 到 1 区间上的均匀分布中抽取的。得到这个拍卖品的投标人最终能因拥有它而受益，其受益值为 $A_0\tilde{x}_0+A_1\tilde{x}_1+A_2\tilde{x}_2$，其中 A_0、A_1 和 A_2 都是给定的非负常数，且为两个投标人所共知。在拍卖时，局中人 1 已经观察到了 $\tilde{x}_0$ 和 $\tilde{x}_1$，但不知道 $\tilde{x}_2$，而局中人 2 已经观察到了 $\tilde{x}_0$ 和 $\tilde{x}_2$，但不知道 $\tilde{x}_1$。所以局中人 1 的类型是 $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$，而局中人 2 的类型

是 $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_2)$。

在拍卖中，两个局中人同时提交各自非负的密封出价 c_1 和 c_2。出价较高的投标人付出他的出价并赢得拍卖品，出价较低的投标人不需要任何付出。在 134
出价相同的情形下，每个局中人都有 .5 的概率以自己的出价换得拍卖品。我们假定两个局中人对货币都有风险中性的效用。于是，局中人 i 的效用支付函数是（令 j 表示不同于 i 的另一局中人）

$$\begin{aligned} u_i\{c_1, c_2, (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1), (\tilde{x}_0, \tilde{x}_2)\} &= A_0\tilde{x}_0 + A_1\tilde{x}_1 + A_2\tilde{x}_2 - c_i \quad \text{若 } c_i > c_j \\ &= (A_0\tilde{x}_0 + A_1\tilde{x}_1 + A_2\tilde{x}_2 - c_i)/2 \text{若 } c_i = c_j \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{若 } c_i < c_j \end{aligned}$$

这个博弈存在唯一的一个线性贝叶斯均衡，其中局中人 1 的出价为

$$A_0\tilde{x}_0 + 0.5(A_1 + A_2)\,\tilde{x}_1$$

而局中人 2 的出价为

$$A_0\tilde{x}_0 + 0.5(A_1 + A_2)\,\tilde{x}_2$$

为了证明这个策略组合是一个均衡，假设局中人 1 预期 2 会使用这个策略，而 1 在已观察到 $\tilde{x}_0 = x_0$ 和 $\tilde{x}_1 = x_1$ 的情况下，正考虑某个另外的出价 b。这样的一个出价将为 1 赢得拍卖品的条件是

$$b > A_0x_0 + 0.5\,(A_1 + A_2)\,\tilde{x}_2$$

亦即

$$2\,(b - A_0\tilde{x}_0)\,/\,(A_1 + A_2) > \tilde{x}_2$$

因此，给定 1 的信息，出价 b 将使 1 以概率 $Y\,(b)$ 赢得这个物品，其中

$$Y(b) = 2\,(b - A_0x_0)\,/\,(A_1 + A_2)$$

只要 $Y(b)$ 这个数在 0 与 1 之间。局中人 1 应该不会采用任何一个使 $Y(b)$ 大于 1 的出价 b，因为这样的出价将大于确定能赢得这个拍卖品所必须的出价；他也不应该会采用任何一个使 $Y(b)$ 小于 0 的出价 b，因为这样的一个出价定输无疑。那么，给定 1 的类型 $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$，当局中人 1 提交的出价为 b 且局中人 2 实施她的均衡策略时，局中人 1 的条件期望支付为

135

$$\begin{aligned} &\int_0^{Y(b)} (A_0x_0 + A_1x_1 + A_2y_2 - b)\,dy_2 \\ &\qquad = Y(b)\{A_0x_0 + A_1x_1 + A_2Y(b)/2 - b\} \end{aligned}$$

为了解释这个公式，注意到，给定局中人 1 的类型是 (x_0, x_1) 和局中人 1 可能通过出价 b 而赢得这个拍卖品，$A_0x_0 + A_1x_1 + A_2Y(b)\,/2$ 将是这个拍卖品的条件期望值。将 $Y(b)$ 的定义代入上式，并选取 b 使 1 的期望支付最

大化，我们得到

$$b = A_0 x_0 + 0.5(A_1 + A_2)\, x_1$$

再将 b 的这个值代回 $Y(b)$ 的定义中，我们得到 $Y(b) = x_1$；因此，对0与1之间的每一个 x_0 和每一个 x_1，这个出价满足我们的要求 $0 \leqslant Y(b) \leqslant 1$。

一个类似的论证可以证明，给定局中人1会预期遵循其均衡策略，则局中人2的最优出价也正如她的均衡策略所规定的那样。

举例来说，假设 $A_0 = A_1 = A_2 = 100$，$\tilde{x}_0 = 0$ 及 $\tilde{x}_1 = 0.01$。那么，1的均衡策略告诉他提交的出价应为1。这个出价看起来似乎不可思议地低，毕竟，$\tilde{x}_2$ 的期望值是0.5，所以给定1目前的信息，拍卖品对他来说期望货币值是 $100 \times 0 + 100 \times 0.01 + 100 \times 0.5 = 51$。为什么局中人1所提交的出价会低于拍卖品的期望价值的2%呢？为了明白为什么局中人1如此保守地出价，须注意到，如果他代之以提交50的出价，将会出现什么情况。由于他的出价低于他对拍卖品的期望价值，而且又足够地高以致于具有可观的获胜概率，所以看起来这个出价好像会带给他正的期望利润。但是，按照我们上面的公式，1从这个出价得到的期望效用支付是 -12 [因为 $Y(50) = .5$]。投标人1应该预期到一个50的出价会导致这种重大损失，这是因为，如果1出价50就能中标的话，那么2的均衡出价 $100\tilde{x}_2$ 将不会大于50，所以 $\tilde{x}_2$ 将只能在0与0.5之间取值。因而，给定1在拍卖时的信息和出价50将会中标的附加信息下，拍卖品的条件期望价值是 $100 \times 0.01 + 100 \times 0.5/2 = 26$。所以，出价50将让局中人1有0.5的概率以50去买一个期望价值为26的物品，当他着手以这个价格去买时，1的期望利润实际上是 $0.5\,(26 - 50) = -12 < 0$。

136 因而，在计算从拍卖时一个特定的出价中得到的期望利润时，重要的一点在于，给定投标人目前的信息和由**若其出价能中标所能推断出的附加信息**，他要通过拍卖品的条件期望价值去估计其价值。与给定投标人在提交出价时的信息所计算的期望价值相比，这个条件期望价值通常要显著地低一些，这一事实被称为**赢者的诅咒**（winner's curse）。

现在考虑 $A_0 = A_1 = \varepsilon$ 及 $A_2 = 100 - \varepsilon$ 的情形，其中 ε 是某个非常小的正数。在这种情形下，局中人1的均衡策略是出价 $\varepsilon\tilde{x}_0 + 50\tilde{x}_1$，而局中人2的均衡策略是出价 $\varepsilon\tilde{x}_0 + 50\tilde{x}_2$。因而，尽管 $\tilde{x}_0$ 和 $\tilde{x}_1$ 对拍卖品的价值具有同样小的影响，但 $\tilde{x}_1$ 对1的最优出价有着大得多的影响，因为 $\tilde{x}_1$ 是1独立于2所知道的任何信息的私人信息，而 $\tilde{x}_0$ 却是公共信息。随着 ε 趋于0，这个博弈收敛于这样的博弈：局中人2知道拍卖品的价值，而局中人1只知道拍卖品的价值是从0到100区间上的均匀分布中抽取的。随着 ε 趋于0，这个贝叶斯博弈的极限（在米尔格龙和韦伯的意义上，1985）是一个随机均衡，其中知情的局中人2只提交拍卖品价值的一半作为其出价，而局中人1所提交的出价是从0到50区间上的均匀分布中抽取的，并且依赖于一些次要因素，这些因素独立于2在拍卖时所能观察到的任何信息的因素。

3.12　均衡存在性的证明

对于证明博弈论中包括纳什均衡在内的许多解概念的存在性来说，角谷静夫（Kakutani，1941）的不动点定理是一个有用的数学工具。为了论述这个不动点定理，我们必须首先给出一些术语。［关于这些数学概念更详尽的介绍，可参看德布鲁（Debreu），1959，p.1—27。］

对于任一有限集 M，用 $\mathbf{R}^M$ 表示形如 $x=(x_m)_{m\in M}$ 的所有向量组成的集，其中对 M 中每个 m，第 m 个分量 x_m 是 $\mathbf{R}$ 中的实数。在方便之需时，我们也可以把 $\mathbf{R}^M$ 等价地解释为 M 到实数集 R 的所有函数组成的集，这时 $\mathbf{R}^M$ 中 x 的 m－分量 x_m 也可以被记作 $x(m)$。$\mathbf{R}^M$ 是一个有限维向量空间。

令 S 是有限维向量空间 $\mathbf{R}^M$ 的一个子集，S 是**凸的**（convex），当且仅当，对任意两个向量 x 和 y 以及每个满足 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 的 λ，只要 $x\in S$ 和 $y\in S$，便有 137
$\lambda x+(1-\lambda)y\in S$。［这里，$x=(x_m)_{m\in M}$，$y=(y_m)_{m\in M}$，$\lambda x+(1-\lambda)y=\{\lambda x_m+(1-\lambda)y_m\}_{m\in M}$。］$S$ 是**闭的**（closed），当且仅当，对每个收敛的向量序列 $\{x(j)\}_{j=1}^{\infty}$，如果对每个 j 都有 $x(j)\in S$，那么 $\lim_{j\to\infty}x(j)\in S$。［$\mathbf{R}^M$ 的一个子集是**开的**（open），当且仅当它的补集是闭的。］S 是**有界的**（bounded），当且仅当存在某个正数 K 使得对 S 中的每个向量都有 $\sum_{m\in M}|x_m|\leqslant K$。

一个点到集合的**对应**（correspondence）$G:X\twoheadrightarrow Y$ 是任何一个规定了对 X 中的每个点 x，所对应的集合 $G(x)$ 都是 Y 的一个子集的映射。假设 X 和 Y 是任意的度量空间，那么**收敛**（convergence）和**极限**（limit）的概念已经对 X 和 Y 中的点序列定义了。一个对应 $G:X\twoheadrightarrow Y$ 是**上半连续的**（upper-hemi-continuous），当且仅当，对每个序列 $\{x(j),\ y(j)\}_{j=1}^{\infty}$，如果对于每个 j 有 $x(j)\in x$ 和 $y(j)\in G\{x(j)\}$，而且序列 $\{(x)(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛于某个点 $\bar{x}$，又序列 $\{y(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛于某个点 $\bar{y}$，则有 $\bar{y}\in G(\bar{x})$。因而，$G:X\twoheadrightarrow Y$ 是上半连续的，当且仅当集合 $\{(x,\ y)\mid x\in X,\ y\in G(x)\}$ 是 $X\times Y$ 的一个闭子集。

值得一提的是，上半连续的定义之所以冗长，主要缘于其 3 个假设，这些假设具有限定那些要求结论 $\{\bar{y}\in G(\bar{x})\}$ 成立的情形的作用。因此，这个定义实际上是相当弱的。特别地，如果 $g:X\to Y$ 是一个从 X 到 Y 的连续函数，且对 X 中的每一个 x 都有 $G(x)=\{g(x)\}$，那么 $G:X\twoheadrightarrow Y$ 是一个点到集的上半连续对应。所以，上半连续对应可被视为连续函数的一种推广。

一个对应 $F:S\twoheadrightarrow S$ 的一个**不动点**（fixed point）是 S 中任一满足 $x\in F(x)$ 的 x。

角谷不动点定理 令 S 是一个有限维向量空间中任一非空有界闭凸子集。设 F：$S \to\to S$ 是任一上半连续的点到集对应，且对 S 中每个 x，$F(x)$ 都是 S 的一个非空凸子集。那么，S 中一定存在某个 $\bar{x}$ 使得 $\bar{x} \in F(\bar{x})$。

角谷不动点定理及其它相关定理的证明可从下述文献中找到：伯格（Burger，1963），富兰克林（Franklin，1980），及博德（Border，1985）。斯卡夫（1973）通过研制一种计算不动点的算法而提供了一个构造性的证明，其中不动点的存在性是由这个定理所保证的。[至于角谷不动点定理的推广，参见格利克斯伯格（Glicksberg，1952）。]

138 为了理解角谷不动点定理中各个假设的作用，令

$$S=[0,\ 1]=\{x \in \mathbf{R}\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

并令 $F_1: S \to\to S$ 为

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \{1\} \quad \text{若} \quad 0 \leqslant x \leqslant 0.5 \\ &= \{0\} \quad \text{若} \quad 0.5 < x \leqslant 1 \end{aligned}$$

那么 F_1 没有不动点，但这个对应满足了除上半连续性之外的全部假设，不满足上半连续性是因为集 $\{(x,\ y)\ |x \in S,\ y \in F_1(x)\}$ 在 $(0.5,\ 0)$ 处不是闭的。为了满足上半连续性，必须把这个对应扩大为 $F_2: S \to\to S$，其中

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \{1\} \quad \text{若} \quad 0 \leqslant x < 0.5 \\ &= \{0,\ 1\} \quad \text{若} \quad x = 0.5 \\ &= \{0\} \quad \text{若} \quad 0.5 < x \leqslant 1 \end{aligned}$$

F_2 也没有不动点，而它满足了角谷不动点定理除**凸值性**（convex-valuedness）之外的全部假设，不满足凸值性条件是由于 $F_2(0.5)$ 不是一个凸集。为了满足凸值性条件，我们必须把这个对应扩大为 $F_3: S \to\to S$，其中

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \{1\} \quad \text{若} \quad 0 \leqslant x < 0.5 \\ &= [0,\ 1] \quad \text{若} \quad x = 0.5 \\ &= \{0\} \quad \text{若} \quad 0.5 < x \leqslant 1 \end{aligned}$$

这个对应 F_3 满足了角谷不动点定理的全部假设，因而具有一个不动点。由于 $0.5 \in F_3(0.5)$，故 $x=0.5$ 就是一个不动点。

现在我们可以证明有限博弈纳什均衡的一般存在性定理了。

定理 3.1 的证明 令 Γ 是任一有限策略型博弈，其中

$$\Gamma=(N,\ (C_i)_{i \in N},\ (u_i)_{i \in N})$$

随机策略组合集 $\times_{i \in N}\Delta(C_i)$ 是一个有限维向量空间的一个非空有界闭凸子集。
139 （这个集满足上述有界性定义，这里 $K=|N|$，而且它是 $\mathbf{R}^M$ 的一个子集，其中 $M=\cup_{i \in N} C_i$。）

对于$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$中任一$\sigma$和$N$中任一局中人$j$，令

$$R_j(\sigma_{-j}) = \underset{\tau_{ij}\in\Delta(C_j)}{\operatorname{argmax}}\, u_j(\sigma_{-j},\ \tau_j).$$

即$R_j(\sigma_{-j})$是局中人j在$\Delta(C_j)$中对其余局中人独立随机策略组合σ_{-j}的最佳反应集。根据3.2节的引理3.1，$R_j(\sigma_{-j})$是C_j上所有的概率分布ρ_j组成的集，且使得

对每一个满足$c_j\notin\operatorname{argmax}_{d_j\in C_j} u_j(\sigma_{-j},\ [d_j])$的$c_j$有$\rho_j(c_j)=0$。

由于$R_j(\sigma_{-j})$是$\Delta(C_j)$的由一组线性方程所定义的一个子集，所以它是凸的。此外，$R_j(\sigma_{-j})$是非空的，因为对$\operatorname{argmax}_{d_j\in C_j} u_j(\sigma_{-j},\ [d_j])$中的每一个$c_j$，$R_j(\sigma_{-j})$都包括了$[c_j]$，而$\operatorname{argmax}_{d_j\in C_j} u_j(\sigma_{-j},\ [d_j])$是非空的。

令$R:\times_{i\in N}\Delta(C_i)\twoheadrightarrow\times_{i\in N}\Delta(C_i)$是满足下式的点到集对应

$$R(\sigma) = \bigtimes_{j\in N} R_j(\sigma_{-j}),\quad \forall\sigma\in\bigtimes_{i\in N}\Delta(C_i)$$

即当且仅当对N中每一个j都有$\tau_j\in R_j(\sigma_{-j})$时，才有$\tau\in R(\sigma)$。由于$R(\sigma)$是一些非空凸集的笛卡尔积，所以它是非空凸集。

为了证明R是上半连续的，假设$\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty}$和$\{\tau^k\}_{k=1}^{\infty}$都是收敛序列，

$$\sigma^k\in\bigtimes_{i\in N}\Delta(C_i),\quad \forall k\in\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\}$$

$$\tau^k\in R(\sigma^k),\quad \forall k\in\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

$$\bar{\sigma}=\lim_{k\to\infty}\sigma^k,$$

及

$$\bar{\tau}=\lim_{k\to\infty}\tau^k$$

为了证明上半连续性，我们需要说明这些条件蕴含着$\bar{\tau}$在$R(\bar{\sigma})$中。这些条件意味着，对N中每一个局中人j和$\Delta(C_j)$中每一个ρ_j，都有

$$u_j(\sigma^k_{-j},\ \tau^k_j)\geqslant u_j(\sigma^k_{-j},\ \rho_j),\quad \forall k\in\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$ 140

再根据期望效用函数u_j在$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$上的连续性，这又转而意味着，对于$N$中的每个局中人$j$和$\Delta(C_j)$中每个$\rho_j$，

$$u_j(\bar{\sigma}_{-j},\ \bar{\tau}_j)\geqslant u_j(\bar{\sigma}_{-j},\ \rho_j)$$

因此，对于N中每个j，$\bar{\tau}_j\in R_j(\bar{\sigma}_{-j})$；故$\bar{\tau}\in R(\bar{\sigma})$。从而得出$R:\times_{i\in N}\Delta(C_i)\twoheadrightarrow\times_{i\in N}\Delta(C_i)$是一个上半连续的对应。

由角谷不动点定理，存在$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$中的某个随机策略组合$\sigma$使得$\sigma\in R(\sigma)$，亦即对于$N$中每个$j$，$\sigma_j\in R_j(\sigma_{-j})$，因此$\sigma$就是$\Gamma$的一个纳什均衡。

■

3.13 无限策略集

当我们探索博弈论分析的基本原理时，为了使数学上的困难达到最小，我们主要着重于有限博弈。不过，在本节中，我们拓宽视野，以考虑博弈的一个更为一般的种类，即其中局中人可以有无限多个策略。特别是，我们要包括这种可能性，其中局中人的纯策略是实数轴上的一个有界区间，譬如 $[0, 1]$。(这个集包括了 0 与 1 之间所有的有理数和无理数，故它是一个不可数无限集。)

为了阐述更为一般性的结论，本节的所有结论都只是基于这样的假定，即每个局中人 i 的策略集 C_i 都是一个**紧度量空间** (compact metric space)。紧度量空间是用以表示可用很大的有限集充分逼近的无限集的一个一般数学结构。很重要的一点是，在紧度量空间中，任何一个无限序列都有收敛的子序列。不熟悉度量空间的读者可以参考实分析方面的任何一本教科书，例如，罗伊登 (1968) 或者柯尔莫哥洛夫和福明 (1970)。一个有限维向量空间的任何一个有界闭子集都是一个紧度量空间的例子。更特殊一点，实数的任何一个有界闭区间都是一个紧度量空间的例子，其中两点 x 与 y 之间的距离为 $|x-y|$。我们不必举出比这两个例子更复杂的例子了。

为了完整起见，我们在这里概述一下基本概念。一个**度量空间** (metric space) 是一个集 M 和一个函数 δ：$M \times M \to \mathbf{R}$ 联合构成的一个数学对象，这个函数 δ 定义了 M 中任意两点 x 与 y 之间的**距离** (distance) $\delta(x, y)$，而且满足下列性质：对于 M 中任意的 x、y 及 z，

141

$$\delta(x, y) = \delta(y, x) \geqslant 0$$
$$\delta(x, y) = 0 \quad \text{当且仅当} \quad x = y$$
$$\delta(x, y) + \delta(y, z) \geqslant \delta(x, z)$$

在一个度量空间中，点 y 是点序列 $\{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限，当且仅当随着 k 趋于无穷大，距离 $\delta\{x(k), y\}$ 趋于 0。记 $B(x, \varepsilon)$ 为点 x 的一个半径为 ε 的**开球** (open ball)，它表示这个度量空间中与 x 的距离小于 ε 的所有点组成的集，即

$$B(x, \varepsilon) = \{y | \delta(x, y) < \varepsilon\}。$$

度量空间 M 的一个开子集 S 是指，对于 S 中每个 x，都存在某个正数 ε (可能与 x 有关) 使得 $B(x, \varepsilon) \subseteq S$。一个度量空间 M 是**紧的** (compact)，当且仅当对于由 M 的开集所组成的每个开集族，若这些开集的并集包含整个 M

(称这个开集族为 M 的一个覆盖)，则必存在这个开集族的一个有限子族仍覆盖 M。]

令 N 表示有限的局中人集，

$$N=\{1, 2, \cdots, n\}$$

对于 N 中每个局中人 i，令 C_i 表示由局中人 i 可使用的所有纯策略组成的集，设它是一个紧度量空间。依常规，令 $C=\times_{i\in N}C_i=C_1\times\cdots\times C_n$，作为紧度量空间的一个有限笛卡尔积，$C$ 也是一个紧度量空间 [其中 $\delta(c, \hat{c})=\sum_{i\in N}\delta(c_i, \hat{c}_i)$]。

当集 C_i 中有无穷多个行动时，局中人 i 的随机策略不能再用只对每个行动列出概率来描述了。例如，假设 $C_i=[0, 1]$，若局中人 i 从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布中选择他的行动，则 $[0, 1]$ 中每个行动将有零概率；但若他从 0.5 到 1 这个区间上的均匀分布中选择他的行动，这同样也是正确的。为了描述 C_i 上的概率分布，我们必须列出 C_i 之子集的概率。不幸的是，由于技术性原因，数学上不可能对一个无限集的所有子集都指定相容的概率。所以为使概率能被合理地定义，我们必须对子集类加某些弱限制。这些子集就是所谓的**可测集** (measurable sets)。这里，我们设 C 及每个 C_i 的可测集族皆是这样一些子集所形成的最小子集族，它们包括所有的开子集，所有的闭子集、以及这族中有限个和可数无限个子集所构成的全部并集和交集。这些子集都是**波雷尔子集** (Borel subsets，并且实际上，它们包括可用不太复杂的数学定义的所有子集。) 令 $\mathscr{B}_i$ 表示 C_i 的这种可测子集或波雷尔子集组成的集，$\mathscr{B}_i$ 也称为波雷尔域。 142

用 $\Delta(C_i)$ 表示 C_i 上的概率分布集，即 $\sigma_i\in\Delta(C_i)$，当且仅当对于 C_i 的每个波雷尔子集 Q，σ_i 对 Q 指定一个非负数 $\sigma_i(Q)$，且满足 $\sigma_i(C_i)=1$，以及对 C_i 两两不相交的波雷尔子集构成的任一可数族 $(Q_k)_{k=1}^{\infty}$，均有

$$\sigma_i\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_i(Q_k)$$

我们通过对 $\Delta(C_i)$ 规定一个**弱拓扑** (weak topology) 来定义随机策略的收敛性。这个拓扑是这样的，$\Delta(C_i)$ 中一个随机分布序列 $\{\sigma_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于概率分布 σ_i，当且仅当对于每个有界连续函数 $f: C_i\to\mathbf{R}$，

$$\lim_{k\to\infty}\int_{c_i\in C_i}f(c_i)d\sigma_i^k(c_i)=\int_{c_i\in C_i}f(c_i)d\sigma_i(c_i)$$

这个方程断言，如果 $\tilde{c}_i^k$ 是按照 σ_i^k 分布从 C_i 中抽取的随机策略，$\tilde{c}_i$ 是按照 σ_i 分布从 C_i 中抽取的随机策略，那么当 k 趋于无穷大时，$f(\tilde{c}_i^k)$ 的期望值一定收敛于 $f(\tilde{c}_i)$ 的期望值。借助于这个拓扑，$\Delta(C_i)$ 中概率分布所组成的集自身是一个紧度量空间 [具有适当定义的距离函数，称为**普罗霍洛夫度量** (Pro-

horov metric)；参见比林斯利，1968]。

一个函数 $g:C\to\mathbf{R}$ 是**〔波雷尔〕可测的**［(Borel) measurable］，当且仅当，对于 $\mathbf{R}$ 中每个数 x，集合 $\{c\in C\mid g(c)\geqslant x\}$ 是 C 的波雷尔子集。函数 $g:C\to\mathbf{R}$ 是有界的，当且仅当存在某个数 K，使得对于 C 中每个 c 都有 $|g(c)|\leqslant K$。为了能够定义期望效用，我们必须要求局中人的效用函数在上述意义上是可测的和有界的。

设 $u=(u_1,\cdots u_n)$ 和 $\hat{u}=(\hat{u}_1,\cdots,\hat{u}_n)$ 是定义在 C 上的任意两个效用函数组合，使得对于 N 中每个 i，$u_i:C\to\mathbf{R}$ 和 $\hat{u}_i:C\to\mathbf{R}$ 都是有界可测函数，并将它们解释为对局中人 i 的可能支付函数，我们定义效用函数组合 u 与 $\hat{u}$ 之间的距离（distance）为

$$\max_{i\in N}\sup_{c\in C}|u_i(c)-\hat{u}_i(c)|$$

［数集或一个函数的值域的**上确界**（supremum 或 sup）是这个集或值域的
143 最小上界。若在这个集或值域中存在最大值，则上确界与最大值是相同的。］依常规，我们可以把任一效用函数延拓到所有随机策略组合所组成的集 $\times_{j\in N}\Delta(C_j)$ 上，使得

$$u_i(\sigma)=\int_{c_n\in C_n}\cdots\int_{c_1\in C_1}u_i(c)d\sigma_1(c_1)\cdots d\sigma_n(c_n),\quad\forall\sigma\in\times_{j\in N}\Delta(C_j),$$

其中 $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$，$C=(c_1,\cdots,c_n)$。

效用函数组合 u 与 $\hat{u}$ 中任何一个和前述的局中人集 N 及每个局中人 i 的纯策略集 C_i 一起定义了一个策略型博弈，分别用 Γ 和 $\hat{\Gamma}$ 表示，即

$$\Gamma=(N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}),\quad\hat{\Gamma}=(N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$$

若 $\sigma=(\sigma_i)_{i\in N}$ 是 Γ 的一个均衡，当然，σ 未必是 $\hat{\Gamma}$ 的一个均衡；即使 u 和 $\hat{u}$ 非常接近，Γ 的均衡与 $\hat{\Gamma}$ 的均衡也可能相去甚远。例如，在只有一个局中人的情况下，$C_1=[0,1]$，$u_1(c_1)=\varepsilon c_1$ 及 $\hat{u}_1(c_1)=-\varepsilon c_1$，其中 ε 是任意小的正数，那么，Γ 的唯一均衡是 1，而 $\hat{\Gamma}$ 的唯一均衡是 0，尽管 u 与 $\hat{u}$ 之间的距离只有 2ε.

不过，如果 u 与 $\hat{u}$ 非常接近，则在某种意义下，Γ 的均衡“几乎”是 $\hat{\Gamma}$ 的均衡。对于任一非负数 ε，拉德纳（Radner，1980）定义任一策略型博弈的 **ε-均衡**（或 **ε-近似均衡**）为一个随机策略组合，它使得没有一个局中人可以通过不采用为他确定的随机策略，而是使用其任一可行策略从而可能得到大于 ε 的增益。也就是说，σ 是 Γ 的一个 ε-均衡，当且仅当

$$u_i(\sigma_{-i},[c_i])-u_i(\sigma)\leqslant\varepsilon,\quad\forall i\in N,\ \forall c_i\in C_i$$

显然，当 $\varepsilon=0$ 时，一个 ε-均衡就是一个通常意义上的纳什均衡。如下结论，源于富登伯格和莱文（Fudenberg and Levine，1986）。证明了这样的 ε-均衡

具有一种跨接博弈的连续性。

定理3.3　设 Γ 和 $\hat{\Gamma}$ 是如前所述的两个博弈。令 α 为效用函数组合 u 与 $\hat{u}$ 之间的距离。若 σ 是 $\hat{\Gamma}$ 的一个 ε-均衡，则 σ 是 Γ 的一个 $(\varepsilon+2\alpha)$-均衡。

证明　对任一局中人 i 和任一行动 c_i，　144

$$\begin{aligned}
&u_i(\sigma_{-i}, [c_i]) - u_i(\sigma) \\
&\quad = \{u_i(\sigma_{-i}, [c_i]) - \hat{u}_i(\sigma_{-i}, [c_i])\} + \{\hat{u}_i(\sigma_{-i}, [c_i]) \\
&\quad - \hat{u}_i(\sigma)\} + \{\hat{u}_i(\sigma) - u_i(\sigma)\} \\
&\quad \leqslant \alpha + \varepsilon + \alpha = 2\alpha + \varepsilon \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

对于具有连续效用函数的任一博弈来说，ε-均衡概念还满足如下定理所述的一种相关的连续性形式。

定理3.4　设对 N 中每个局中人 i，$u_i: C \to \mathbf{R}$ 是连续的，令 $\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\times_{(i\in N)}\Delta(C_i)$ 中一个收敛的随机策略组合序列，而 $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是这样的一个收敛的非负数列，使得对于每个 k，σ^k 是 Γ 的 ε_k-均衡；又设 $\bar{\sigma} = \lim_{k\to\infty}\sigma^k$ 和 $\bar{\varepsilon} = \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k$，则 $\bar{\sigma}$ 是 Γ 的一个 $\bar{\varepsilon}$-均衡。特别地，若 $\bar{\varepsilon}$ 等于0，则 $\bar{\sigma}$ 是 Γ 的一个均衡。

证明　对任一局中人 i 和 C_i 中任一 c_i，

$$\begin{aligned}
u_i(\bar{\sigma}_{-i}, [c_i]) - u_i(\bar{\sigma}) &= \lim_{k\to\infty}\{u_i(\sigma^k_{-i}, [c_i]) - u_i(\sigma^k)\} \\
&\leqslant \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = \bar{\varepsilon} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

将一些无限博弈与概念上比较简单的有限博弈类联系起来，这是很重要的。C_i 到有限集 D_i 的函数 f_i 是**（波雷尔）可测的**，当且仅当，对于 D_i 中每个 b_i，$\{c_i \in C_i \mid f_i(c_i) = b_i\}$ 是波雷尔可测集。我们称博弈 $\hat{\Gamma}$ 是**本质上有限的** (essentially finite)，当且仅当存在某个有限的策略型博弈 $\Gamma^* = (N, (D_i)_{i\in N}, (v_i)_{i\in N})$ 和可测函数组合 $(f_i: C_i \to D_i)_{i\in N}$，使得

$$\hat{u}_i(c) = v_i(f_1(c_1), \cdots, f_n(c_n)), \quad \forall i \in N, \forall c \in C$$

利用策略集都是紧的这一事实，不难证明下述有限逼近定理。

定理3.5　设 α 是任一严格正的实数，且对于每个局中人 i，效用函数 $u_i: C \to \mathbf{R}$ 是紧定义域 C 上的连续函数，则存在一个本质上有限的博弈 $\hat{\Gamma} = (N, (C_i)_{i\in N}, (\hat{u}_i)_{i\in N})$，使得 u 与 $\hat{u}$ 之间的距离小于 α。　145

这些结论使我们能够证明，只要效用函数 $(u_i)_{i\in N}$ 都是连续的，则存在 Γ 的一个随机策略均衡。事实上，有限博弈的均衡存在性定理直接蕴含着任何一个本质

上有限的博弈都存在随机均衡。而定理3.5和3.3又蕴含着，对任一正数 α，存在 Γ 的 2α－均衡。再由 $\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 的紧性，任一随机策略组合序列都具有一个收敛子序列。因此，取 $\alpha-\varepsilon_k/2$ 并令 $\varepsilon_k\to 0$，则我们构造了满足定理3.4条件的一个收敛随机策略组合序列，且 $\bar{\varepsilon}=0$。从而极限 $\bar{\sigma}$ 是 Γ 的一个随机策略纳什均衡。

西蒙和赞姆（Simon and Zame，1990）对于效用函数或许不连续的博弈，应用类似的论证方法证明了更一般的均衡存在性定理［也可参阅达斯古肯塔和马斯金（Dasgupta and Maskin，1986）］。不过，西蒙和赞姆的阐述利用了较弱的博弈概念，其中对某些行动组合容许有一个可能的支付配置范围。对博弈概念做这样一个修改是必要的，因为对于常规定义的策略型博弈来说，在支付函数不连续时均衡不一定存在。作为一个简单的例子，设 $N=\{1\}$，$C_1=[0,1]$，若 $c_1<0.5$ 则 $u_1(c_1)=c_1$，若 $c_1\geqslant 0.5$ 则 $u_1(c_1)=0$，则局中人所要选择的是严格小于0.5的最大数，但这样的数不存在。在某种意义上说，这个问题是由于在间断点处用错误的方式定义支付而引起的。如果在该点只是改变一下支付，即令 $u_1(0.5)=0.5$，那就将有一个均衡存在。

遵循西蒙和赞姆（1990），定义一个**具有内源共享规则的博弈**（game with an endogenous-sharing rule）或**内源共享博弈**（endogenous-sharing game）为任何一个这样的博弈

$$\Gamma^s=(N,(C_i)_{i\in N},U)$$

其中 N 与 $(C_i)_{i\in N}$ 依然如前，而 $U:C\to\to\mathbf{R}^N$ 是一个对应，它在 $\mathbf{R}^N$ 中对局中人的每一个策略组合都确定了一个效用支付配置集。也就是说，对于 C 中任一 c，若 $w\in U(c)$，则 $w=(w_i)_{i\in N}$ 是对局中人的一个可能的效用配置，而且只要他们选择这个策略组合 c，w 是可能发生的。假设 N 是有限的，且每个 C_i 是度量空间的一个紧子集，以及 U 是有界的（即存在某个数 K 使得，对于 C 中每个 c、$U(c)$ 中每个 w 及 N 中每个 i，都有 $|w_i|\leqslant K$）；再假设
146 $U:C\to\to\mathbf{R}^N$ 是上半连续的，且对于 C 中每个 c，$U(c)$ 都是 $\mathbf{R}^N$ 的一个非空凸子集。利用这些假设，西蒙和赞姆（1990）证明了下述一般存在性定理。

定理3.6 设 Γ^s 是如上所定义的一个内源共享博弈，则存在某个效用函数组合 $(\hat{u}_i)_{i\in N}$ 使得，每个 $\hat{u}_i:C\to\mathbf{R}$ 都是可测函数，且对 C 中每个 c 都有 $(\hat{u}_1(c),\cdots,\hat{u}_n(c))\in U(c)$，并且所得到的策略型博弈 $(N,(C_i)_{i\in N},(\hat{u}_i)_{i\in N})$ 在 $\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 中至少具有一个纳什均衡。

如果每个函数 $u_i:C\to\mathbf{R}$ 是连续的，则令

$$U(c)=|(u_1(c),\cdots,u_n(c))|,\quad \forall c\in C$$

便定义了一个对应 $U(\cdot)$，它满足我们所假设的全部性质。

更一般地，对于任一有界的效用函数组合 $u=(u_i)_{i\in N}$，这里 $u_i:C\to\mathbf{R}$

可以是不连续的，一定存在唯一的最小对应 $U: C \to\to \mathbf{R}^N$ 使得 U 是上半连续的，并且对于 C 中每个 c，$U(c)$ 是包含向量 $(u_i(c))_{i\in N}$ 的一个凸集。当 U 是这个最小对应时，$U(c)$ 是所有这样的期望效用配置的极限所组成的集，这些极限是可以通过在任意接近 c 的策略组合上的随机化而达到的。为了更准确起见，令 $B(c, \varepsilon)$ 表示所有策略组合 e 所组成的集，且使得对于每个局中人 i，e_i 与 c_i 之间的距离都小于 ε。于是，对于 C 中任一 c，支付向量 w 在 $U(c)$ 中，当且仅当对于每个正数 ε，存在集 $B(c, \varepsilon)$ 上某个概率分布 μ 使得对每个局中人 i，均有

$$\left| w_i - \int_{e\in B(c,\varepsilon)} u_i(e)\, d\mu(e) \right| \leqslant \varepsilon$$

将定理 3.6 应用于这个最小对应 U，我们得出如下结论：对于任一不连续的效用函数组合 u，存在某个效用函数组合 $\hat{u}$，使得 $\hat{u}$ 与 u 仅在间断点处不同，且所得到的博弈 Γ 存在一个均衡。

例如，考虑一个两人博弈，其中 $C_1 = [0, 1]$，$C_2 = [0, 1/4]$

$$\begin{aligned} u_1(c_1, c_2) &= 1 - u_2(c_1, c_2) = (c_1 + c_2)/2 && \text{若} \quad c_1 < c_2 \\ &= 1/2 && \text{若} \quad c_1 = c_2 \\ &= 1 - (c_1 + c_2)/2 && \text{若} \quad c_1 > c_2 \end{aligned} \qquad 147$$

[这个博弈是对霍特林（Hotelling）一个经典例子（1929）的变形。]遵循西蒙和赞姆，我们可以把这个博弈做如下解释，即假设局中人是两个精神病医生，他们正在一条很长的公路上选择设置他们办公室的地方，这条公路用从 0 到 1 的区间表示。公路上用 0 到 1/4 这个区间表示的部分在俄勒冈州，而用 1/4 到 1 这个区间表示的部分在加利福尼亚州。局中人 1 同时有加利福尼亚州和俄勒冈州批准的行医执照，而局中人 2 只有俄勒冈州批准的行医执照。假设病人是沿着这条公路均匀分布的，每个病人都就近看病，每个精神病医生的支付就是到他那里就诊的病人比例。

当两个局中人在区间 $[0, 1/4]$ 中选择同一点（即他们在俄勒冈州公路两边对门营业）设置他们的办公室时，这个博弈的支付函数是不连续的。在这种情况下，我们很自然地假设他们同等地分摊病人。不过，当我们以这种方式在间断点处定义支付时，这个博弈就不存在均衡。为了看出为什么，请注意，局中人 1 可以通过选择稍大于 1/4 的 c_1 来保证自己获得一个任意接近 3/4 的支付，而局中人 2 也可以通过选择等于 1/4 的 c_2 以保证自己得到一个至少为 1/4 的支付。然而，当 c_1 与 c_2 都等于 1/4 时，局中人 1 的支付在这个模型中下降到 1/2。

包含给定效用函数组合 u 的最小上半连续的凸值内源共享规则 U 是

$$\begin{aligned} U(c_1, c_2) &= \{(c_1 + c_2)/2, 1 - (c_1 + c_2)/2\} && \text{若} \quad c_1 < c_2 \\ U(c_1, c_2) &= \{(\alpha, 1-\alpha) \mid c_1 \leqslant \alpha \leqslant 1 - c_1\} && \text{若} \quad c_1 = c_2 \end{aligned}$$

$$U(c_1, c_2) = |(1-(c_1+c_2)/2, (c_1+c_2)/2)| \quad 若 \quad c_1 > c_2$$

为了得到一个均衡，可以利用任一选择 $\hat{u}$ 使得

$$\hat{u}_1(1/4, 1/4) = 3/4, \ \hat{u}_2(1/4, 1/4) = 1/4$$

这样所得到的博弈 $\hat{\Gamma}$ 在 $(c_1, c_2) = (1/4, 1/4)$ 处具有一个（纯策略）均衡，且支付为 (3/4, 1/4)。也就是说，为了得到一个均衡，我们必须在间断点处调整支付函数，使得当两个局中人都在加利福尼亚与俄勒冈西州交界处设置办公室时，局中人 1 得到加利福尼亚的全部病人，而局中人 2 得到俄勒冈州的全部病人。

148 如果我们用这样一个有限博弈逼近原博弈，使得在这个有限博弈中，c_1 和 c_2 要求为 $1/K$ 的整数倍，其中 K 是可被 4 整除的任意大的正整数，那么它有一个纯策略均衡 $(1/4 + 1/K, 1/4)$，且支付为 $\{3/4 - 1/(2K), 1/4 + 1/(2K)\}$。当 K 趋于无穷大时，这个均衡和支付配置收敛于对 $\hat{\Gamma}$ 所得到的均衡和支付配置。

习 题

3.1 设 Γ^1 是通过剔除 Γ 中的强劣纯策略后由 Γ 导出的，证明 σ 为 Γ 的一个均衡当且仅当 σ 是 Γ^1 的一个均衡。（注意，若 $\hat{C}_i$ 是 C_i 的一个子集，则 $\Delta(\hat{C}_i)$ 中任一分布 ρ_i 可以等同于 $\Delta(C_i)$ 中这样一个概率分布，其对 $\hat{C}_i$ 中的纯策略给出与 ρ_i 相同的概率，而对在 C_i 中又不在 $\hat{C}_i$ 中的纯策略给出的概率为 0。）

3.2 设 Γ^2 是通过剔除 Γ 中弱劣纯策略后由 Γ 导出的，证明若 σ 是 Γ^2 的一个均衡，那么 σ 也是 Γ 的一个均衡。

3.3 对下列两人博弈的每一个，都找出其所有的均衡。依常规，局中人 1 选择用不同的行所表示的策略，而局中人 2 则选择用不同的列所表示的策略。（提示：这里的每个博弈都具有奇数个均衡。）

a.

	x_2	y_2
x_1	2, 1	1, 2
y_1	1, 5	2, 1

b.

	x_2	y_2
x_1	3, 7	6, 6

	y_1	2，2	7，3

c.

	x_2	y_2
x_1	7，3	6，6
y_1	2，2	3，7

d.

	x_2	y_2	z_2
x_1	0，4	5，6	8，7
y_1	2，9	6，5	5，1

e.

	x_2	y_2	z_2
x_1	0，0	5，4	4，5
y_1	4，5	0，0	5，4
z_1	5，4	4，5	0，0

149

3.4　找出如表 3－15 所示的三人博弈［源于 B. 奥尼尔（B.O' Neill）］的所有均衡，其中对 $\{1, 2, 3\}$ 中每个 i，$C_i = \{x_i, y_i\}$。也就是说，除非恰好有一个局中人 i 选择了策略 y_i，否则，每个局中人获得支付 0。选择 y_i 的局中人 i 获得支付为 5，在局中人编号形成的循环 1→2→3→1 中，编号处于 i 前面的那个局中人获得支付 6，编号处于 i 后面的那个局中人获得支付为 4。（提示：注意这个博弈的循环对称性，其均衡个数是偶数，且相当不同寻常。）

表 3－15　　**一个三人策略型博弈**

	C_2 和 C_3			
	x_3		y_3	
C_1	x_2	y_2	x_2	y_2
x_1	0，0，0	6，5，4	4，6，5	0，0，0
y_1	5，4，6	0，0，0	0，0，0	0，0，0

3.5

a. 考虑一个具有不完全信息的贝叶斯博弈，其中局中人 1 可能有类型 α 或类型 β，（由局中人 2 所确定的）类型 α 具有概率 .9，类型 β 具有概率 .1。局中人 2 没有私人信息。根据局中人 1 的类型，表 3－16 给出了这两个局中人的支付对其在策略集 $C_1 = \{x_1, y_1\}$ 和 $C_2 = \{x_2, y_2\}$ 中行动之间的依赖关系。证明这个博弈存在一个贝叶斯均衡，其中局中人 2 选择 x_2。

150 表 3-16 一个贝叶斯博弈的所有类型与作用组合的期望支付

$t_1=\alpha$		
	C_2	
C_1	x_2	y_2
x_1	2, 2	−2, 0
y_1	0, −2	0, 0
$t_1=\beta$		
	C_2	
C_1	x_2	y_2
x_1	0, 2	1, 0
y_1	1, 2	2, 0

b.［鲁宾斯坦（Rubinstein, 1989）的**电子邮件**（electronic mail）博弈的一个变形。］现在假设 a 中的信息结构通过下述的局前通信过程而改变。若局中人 1 是类型 β，则他不发信件给局中人 2，否则局中人 1 给 2 发一个信件，上面写道："我不是类型 β。"此后，每次一个局中人收到另一个局中人的信息后，都回复道："收到了你最近的一封来信，特此确认。"假设每封信在邮件中丢失的概率为 1/10，而且双方持续交换信件直至某个信件丢失。因而，当局中人 1 在 $\{x_1, y_1\}$ 中选择他的行动时，他知道自己是 β 还是 α；并且若他是类型 α，他还知道自己从局中人 2 那里收到了多少信件。当局中人 2 在 $\{x_2, y_2\}$ 中选择她的行动时，她知道她从局中人 1 那里收到了多少信件。

在两个局中人已经停止发信件之后，局中人 2 对事件局中人 1 所发出的一封信件在邮件中丢失（因此 1 和 2 所发出的信件总数是奇数）所赋予的概率是多少？

若局中人 1 不是类型 β，则局中人 1 对他所发的一封信件在邮件中丢失的事件所赋予的概率是多少？

证明这个博弈不存在局中人 2 总是选择 x_2 的贝叶斯均衡。

3.6 考虑表 3-17 所示的性别之战博弈的扰动变形。这里 $0<\varepsilon<1$，而 t_1 和 t_2 都是从区间 [0, 1] 上的均匀分布中抽取的相互独立的随机变量。每个局中人 i 在 $C_i=\{f_i, s_i\}$ 中选择其行动前只能观察 t_i。找出这个博弈的三个贝叶斯均衡。（提示：存在一个均衡，其中每个局中人都具有某些选择 s_i 的类型和另外某些选择 f_i 的类型。）

151 表 3-17 性别之战博弈的一个扰动变形

	C_2	
C_1	f_2	s_2
f_1	$3+\varepsilon t_1$, 1	εt_1, εt_2
s_1	0, 0	1, $3+\varepsilon t_2$

3.7　考虑两个投标人之间的一个第一价格密封出价拍卖问题，其中各人对拍卖品具有独立的**个人价值**（private values）。在这个拍卖前，每个投标人 i（$i=1, 2$）观察一个随机变量 t_i，t_i 是从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布中独立抽取的。这时，拍卖品对投标人 i 来说，其价值是 $v_i = t_i + 0.5$。每个投标人 i 提交一个密封出价 b_i，b_i 可以是任一非负实数，则 i 的支付是

$$
\begin{aligned}
u_i(b_1, b_2, t_1, t_2) &= (t_i + 0.5) - b_i && \text{若} \quad b_i > b_{-i} \\
&= 0 && \text{若} \quad b_i < b_{-i} \\
&= ((t_i + 0.5) - b_i)/2 && \text{若} \quad b_1 = b_2
\end{aligned}
$$

找出每个局中人 i 使用形如 $b_i = \alpha t_i + \beta$ 的均衡。在这个均衡中，给定投标人 i 的类型 t_i，他的条件期望支付是什么？

3.8　现在考虑两个投标人之间的一个第一价格密封出价拍卖问题，其中两个局中人对拍卖品认可了一个**共同价值**（common value）。正如习题 3.7，在这个拍卖前，每个投标人 i（$i=1, 2$）观察一个随机变量 t_i，t_i 是从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布中独立抽取的，但在这种情况下，拍卖品对每个投标人 i 的价值是 $v_i = t_1 + t_2$。因而，只给定投标人 i 自己的信息 t_i 下，拍卖品对投标人 i 的期望价值是 $t_i + 0.5$，如习题 3.7 中一样。在拍卖中，每个局中人 i 提交一个密封的出价 b_i，b_i 可以是任一非负数，则他的支付是

$$
\begin{aligned}
u_i(b_1, b_2, t_1, t_2) &= (t_1 + t_2) - b_i && \text{若} \quad b_i > b_{-i} \\
&= 0 && \text{若} \quad b_i < b_{-i} \\
&= ((t_1 + t_2) - b_i)/2 && \text{若} \quad b_1 = b_2
\end{aligned}
$$

找出每个局中人 i 使用形如 $b_i = \alpha t_i + \beta$ 的均衡。在这个均衡中，给定投标人 i 的类型 t_i，他的条件期望支付是什么？证明：对每个 t_i 值，此拍卖的均衡出价低于习题 3.7 中具有个人价值的例子中相应的均衡出价。

3.9

a. 验证 3.6 节所描述的扰动博弈的均衡。　152

b. 如果局中人 1 是一个智能的理性决策者，而局中人 2 有 .1 的概率被一个质朴的代理人代做决策，且这个质朴代理人只会在区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布中选择一个出价，这些都是共同知识，那么这个均衡会如何变动呢？

3.10　令 $N = \{1, \cdots, n\}$ 是一个固定的局中人集，$C_1, \cdots, C_n$ 是这 n 个局中人的固定的有限策略集。对于任一博弈序列 $\{\Gamma^k\}_{k=1}^{\infty}$，其中 $\Gamma^k = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i^k)_{i\in N})$，及对于任一 $\Gamma = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$，我们说 $\lim_{k\to\infty}\Gamma^k = \Gamma$ 当且仅当，对于 N 中每个 i 和 C 中每个 c，都有 $\lim_{k\to\infty} u_i^k(c)$

$=u_i(c)$。对于任一这样的博弈 Γ，令 $E(\Gamma)$ 表示 Γ 所有的纳什均衡组成的集，又令 $D(\Gamma)$ 表示 Γ 所有的满足如下要求的纳什均衡组成的集，即这种均衡对所有的弱劣纯策略都赋予零概率。

a. $E(\cdot)$ 是上半连续的吗？通过证明或给出反例证实你的回答。

b. $D(\cdot)$ 是上半连续的吗？通过证明或给出反例证实你的回答。

3.11 设 Γ 是一个策略型两人零和博弈，证明集 $\{\sigma_1 \mid \sigma$ 是 Γ 的一个均衡$\}$ 是局中人 1 的随机策略集的一个凸子集。

3.12 设 Y 和 Z 都是有限维向量空间的非空紧（即闭的和有界的）凸子集。令 $g: Y \times Z \to \mathbf{R}$ 是一个连续函数使得，对于 Z 中每个 z，$g(\cdot, z)$ 都是 Y 上的一个仿射函数，即对 Z 中任一 z 和 Y 中任意的 x 和 y，以及 0 与 1 之间的任一 λ，均有

$$g\{\lambda x + (1-\lambda)y, z\} = \lambda g(x, z) + (1-\lambda) g(y, z)$$

对于 Z 中任一 z，令 $F(z) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} g(y, z)$，证明 $F: Z \twoheadrightarrow Y$ 是上半连续的，且是非空凸值的。（提示：紧集在连续函数下的像集是紧集；实数轴的紧子集是有界闭集。）

153 **3.13** 设 Γ 是两人博弈，其中纯策略集是 $C_1 = C_2 = [0, 1]$，每个局中人 i 的效用函数是 $u_i(c_1, c_2) = c_1 c_2 - 0.1 (c_i)^2$。对任一满足 $0 < \varepsilon < 1/2$ 的 ε，令 $\hat{\Gamma}$ 的策略集与 Γ 的相同，但每个局中人 i 的效用函数是 $\hat{u}_i(c_1, c_2) = u_i(\max\{\varepsilon, c_1\}, \max\{\varepsilon, c_2\})$。（事实上，0 与 ε 之间的所有策略都聚拢到 ε 上。）

a. 证明 (0, 0) 和 (1, 1) 是 Γ 仅有的两人均衡。

b. 证明 (1, 1) 是 $\hat{\Gamma}_\varepsilon$ 唯一的均衡。

c. 证明 (0, 0) 是 $\hat{\Gamma}_\varepsilon$ 的一个 ε-均衡。

d. 证明效用函数组合 (u_1, u_2) 与 $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ 之间如 3.13 节所定义的距离小于 ε。

3.14 一个**强纳什均衡**（strong Nash equilibrium）就是这样的一个纳什均衡，其中不存在局中人的一个非空集，能在预期到其余局中人都保持他们的均衡策略时，通过一起背离均衡策略而使用他们另外某个可行的策略组合而人人获得增益。[参见奥曼，1959；伯恩海姆、皮莱格（Peleg）及惠斯顿（Whinston），1987。] 这里，为了用公式说明这个定义，我们说一个随机策略组合 σ 是一个强纳什均衡当且仅当，对于每个不同于 σ 的随机策略组合 τ，存在某个局中人 i 使得 $\tau_i \neq \sigma_i$ 且 $u_i(\tau) \leqslant u_i(\sigma)$。

a. 给出一个具有强纳什均衡的博弈例子，并给出另外一个不具有强纳什

均衡的博弈例子。(提示：只需考虑3.2节中的某些例子足矣。)

b. 回顾习题3.4中的博弈，证明：对于这个博弈的每个均衡，存在一个由两人或三人组成的集合，他们可以通过把他们的策略换成仍是均衡的另一新的策略组合(如果这个集合只有两个人，则包括另一局中人的原均衡策略)，从而使他们的境况都有所改善。

4

展开型博弈的序贯均衡

4.1 混合策略与行为策略

自从塞尔滕（1975）及克雷普斯和威尔逊（1982）的开创性工作以来，研 154
究展开型而不只是策略型博弈均衡的重要性已日益受到重视。对展开型博弈的**行为策略均衡**（equilibria in behavioral strategies）和**序贯均衡**（sequential equilibria）的分析所能提供的洞察力，远超过对策略型博弈之任一表示的均衡所做的分析而产生的见解。不过，在对展开型博弈定义这两个解概念之前，我们需要对展开型博弈的更为基本的随机策略概念进行系统地阐述。

让我们从回顾第2章中所提出的某些记号开始。贯穿本章，我们用 Γ^e 表示如2.1节中所定义的一个展开型博弈，Γ^e 的局中人集是 N，对于 N 中任一局中人 i，我们用 S_i 表示局中人 i 在 Γ^e 中所有可能的信息状态所组成的集，假定我们在标记局中人的信息状态时，只要 $i \neq j$，S_i 和 S_j 就是不相交的两个集；并用 S^* 表示所有这些信息状态集的并集，即

$$S^* = \bigcup_{i \in N} S_i$$

对于任一局中人 i 和 S_i 中任一信息状态 S，我们令 Y_s 表示属于局中人 i 的信息状态为 s 的所有结点组成的集，并且用 D_s 表示 i 在信息状态 s 处所有可利用的行动组成的集。也就是说，D_s 是由所有跟随 Y_s 中任一结点的选择枝上的行动标号所组成的集。在 Γ^e 中，一个局中人的一个（纯）策略就是为此局中人在 Γ^e 中每一个可能的信息状态都规定一个行动的一个函数。我们用 C_i 表示 Γ^e 155
任一局中人 i 之此种纯策略所组成的集，故

$$C_i = \underset{s \in S_i}{X} D_s$$

在第3章中，我们定义了策略型博弈的随机策略组合和均衡。而在第2章中，我们又定义了用策略型博弈表示展开型博弈的两种不同方式：正规表示和多代理人表示。这两种表示给了我们两种不同的方法去对任一给定展开型博弈 Γ^e 定义随机策略组合。Γ^e 的一个**混合策略组合**（mixed-strategy profile）被定义为 Γ^e 之正规表示的任一随机策略组合，即 Γ^e 的混合策略组合集是

$$\bigtimes_{i\in N}\Delta(C_i)$$

而 Γ^e 的一个行为策略组合（behavioral-strategy profile）则被定义为 Γ^e 之多代理人表示的任一随机策略组合，因此，Γ^e 的行为策略组合集是

$$\bigtimes_{s\in S^*}\Delta(D_s)=\bigtimes_{i\in N}\bigtimes_{s\in S_i}\Delta(D_s)$$

用2.1节的语言来说就是，对于每个局中人，一个混合策略组合都为他在其进行博弈时的整个策略集上确定了一个概率分布；而一个行为策略组合则为他在其每个可能信息状态下确定了其可能行动集上的一个概率分布。由于一个行为策略组合为博弈树中每个决策结点处的每个选择枝都确定了一个概率，所以，一个行为策略组合也可被称为这个博弈的一个**局方案**（scenario）。

通常，如果是 σ 是 $\times_{i\in N}\times_{s\in S_i}\Delta(D_s)$ 中一个行为策略组合，那么我们可以写成

$$\sigma=(\sigma_i)_{i\in N}=(\sigma_{i,s})_{s\in S_i,i\in N}$$

156 其中 $\sigma_i=(\sigma_{i,s})_{s\in S_i}\in\bigtimes_{s\in S_i}\Delta(D_s)$

及 $\sigma_{i,s}=\{\sigma_{i,s}(d_s)\}_{d_s\in D_s}\in\Delta(D_s)$

这里，$\sigma_{i,s}(d_s)$ 之所以被称为**行动概率**（move probability），是因为它表示了（在局方案 σ 下）局路径到达由局中人 i 所控制的信息状态为 s 的一个结点时 i 将会选择行动 d_s 的条件概率。$\times_{s\in S_i}\Delta(D_s)$ 中的任一 σ_i 都被称为局中人 i 的一个行为策略（behavioral stratgey），它为局中人 i 在每个可能的信息状态下的每个可能行动都确定了一个概率。

另一方面，局中人 i 的一个**混合策略**（mixed strategy）则是 $\Delta(C_i)$ 中任一 τ_i，它为局中人 i 能用以决定其在每一信息状态处之行动的每个（非随机）计划 c_i 确定了一个概率 $\tau_i(c_i)$。

为了理解混合策略与行为策略之间的区别，考虑图4·1所示的展开型博弈，此博弈的正规表示（由于没有多余的策略，所以它也是简约的正规表示）如表4－1所示。

表4 1 一个策略型博弈：图4·1的正规表示

C_1	C_2			
	w_2y_2	w_2z_2	x_2y_2	x_2z_2
w_1y_1	3，1	2，2	2，2	1，3
w_1z_1	2，2	3，1	1，3	2，2
x_1y_1	2，2	1，3	3，1	2，2
x_1z_1	1，3	2，2	2，2	3，1

157

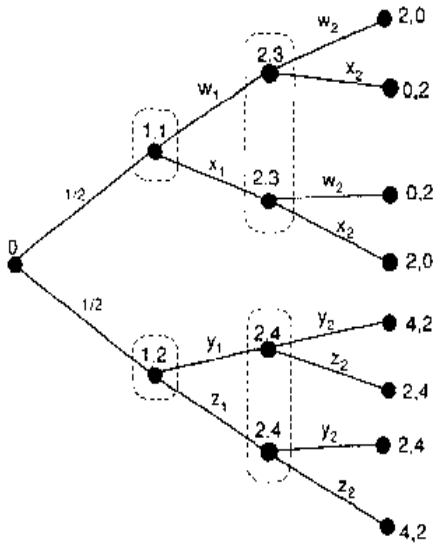

图 4·1

对于 0 与 1/2 之间的任意两个数 α 和 β，混合策略组合

$$(\alpha\,[w_1y_1]+\alpha\,[x_1z_1]+(.5-\alpha)\,[w_1z_1]+(.5-\alpha)\,[x_1y_1],$$
$$\beta\,[w_2y_2]+\beta\,[x_2z_2]+(.5\ \ \beta)\,[w_2z_2]+(.5-\beta)\,[x_2y_2])$$

是这个策略型博弈之正规表示的一个均衡。不过，从原展开型博弈的角度而言，所有这些混合策略组合都应该被认为是相互等价的。在所有这些混合策略组合中，每个局中人在其每个信息状态处都计划以概率 .5 使用每个可能行动。这些均衡之间唯一的区别在于，局中人能以不同方式将其在不同信息状态处的计划行动相关联。但当博弈进行时，因为每个局中人实际上只在他的两个信息状态之一处行动，所以把他在一个信息状态处所要选择的行动与另一信息状态处所已选择的行动相关联是没有意义的。所有的问题在于随机策略在不同的信息状态处所生成的行动集上的边缘分布。进一步而言，这些边缘分布正是描述展开型博弈的一个行为策略组合所必需的一切。也就是说，所有这些混合策略组合都对应于行为策略组合

$$(.5\,[w_1]+.5\,[x_1],\ .5\,[y_1]+.5\,[z_1],\ .5\,[w_2]+.5\,[x_2],$$
$$.5\,[y_2]+.5\,[z_2])$$

正式定义混合策略组合与行为策略组合之间的等价关系需要某种技术上的小心。例如，考虑图 4·2 中的博弈及局中人 1 的混合策略 $.5\,[a_1y_1]+.5\,[b_1z_1]$。初看起来，这个混合策略似乎应该对应于局中人 1 的行为策略 $(.5\,[a_1]+.5\,[b_1],\ .5\,[y_1]+.5\,[z_1])$，但这是错误的。在混合策略 $.5\,[a_1y_1]+.5\,[b_1z_1]$ 之下，局中人 1 在结点 1.3 处将计划使用 z_1 的唯一可能是 158
选择了纯策略 b_1z_1，而在这种情况下，局路径又不可能到达结点 1.3。事实上，在混合策略 $.5\,[a_1y_1]+.5\,[b_1z_1]$ 之下，由于 a_1y_1 是唯一既有正概率又与局中人 1 的信息状态 3 相容的策略，所以若局路径到达结点 1.3，则局中

人1会以概率1选择 y_1，从而，局中人1对应于 $.5\,[a_1y_1]+.5\,[b_1z_1]$ 的行为策略是 $(.5\,[a_1]+.5\,[b_1],\ [y_1])$。

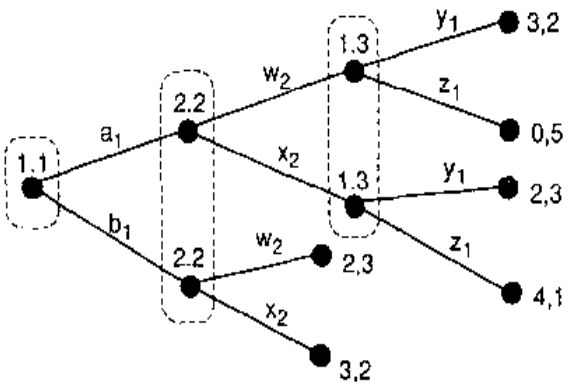

图 4·2

一般地，对于任一局中人 i、C_i 中任一纯策略 c_i 及 S_i 中任一信息状态 s，我们称 s 与 c_i **是相容的**（compatible），当且仅当至少存在其余所有局中人的一个纯策略组合，使得局中人 i 执行策略 c_i 时，局中人 i 在一个信息状态为 s 的结点行动有正概率发生的可能。换句话说，即 s 与 c_i 是相容的，当且仅当，$C_{-i}=\times_{j\in N-i}C_j$ 中存在某个 $c_{-i}=(c_j)_{j\in N-i}$ 使得

$$\sum_{x\in V_s} P(x\mid c)>0$$

其中 $c=(c_{-i},\ c_i)$，$P(\cdot\mid\cdot)$ 如2.2节中所定义的那样。我们令 $C_i^*(s)$ 表示 C_i 中与局中人 i 的信息状态 s 相容的所有纯策略组成的集，对于 $\Delta(C_i)$ 中任一 τ_i 和 S_i 中任一 s，我们称 s 与 τ_i **是相容的**，当且仅当，$C_i^*(s)$ 中存在某个 c_i 使得 $\tau_i(c_i)>0$。

对于 S 中任一 s 和 D_s 中任一 d_s，令 $C_i^{**}(d_s,\ s)$ 表示所有与 s 相容且指定 d_s 为 i 在信息状态 s 下的行动的纯策略所组成的集，即

$$C_i^{**}(d_s,\ s)=\{c_i\in C_i^*(s)\mid c_i(s)=d_s\}$$

159 例如，在图 4·2 的博弈中，$C_1^*(3)=\{a_1y_1,\ a_1z_1\}$，而 $C_1^{**}(y_1,\ 3)=\{a_1y_1\}$。

局中人 i 的一个行为策略 $\sigma_i=(\sigma_{i,s})_{s\in S_i}$ 是 $\Delta(C_i)$ 中混合策略 τ_i 的一个**行为表示**（behavioral representation），当且仅当，对于 s_i 中的每个 s 和 D_S 中的每个 d_s，

$$\sigma_{i,s}(ds)\Big(\sum_{c_i\in C_i^*(s)}\tau_i(c_i)\Big)=\sum_{c_i\in C_i^{**}(d_s,s)}\tau_i(c_i) \tag{4.1}$$

也就是说，σ_i 是 τ_i 的一个行为表示，当且仅当对于在 S_i 中与 τ_i 相容的每个信息状态 s 下的每个行动 d_s，$\sigma_{i,s}(d_s)$ 是在给定局中人 i 选择与 s 相容的纯策略下，i 在 s 处计划选择 d_s 的条件概率。容易验证，$\Delta(C_i)$ 中的任一随机策略 τ_i 在 $\times_{s\in S_i}\Delta(D_s)$ 中至少有一个行为表示。如果 S_i 中某个信息状态 s 与 τ_i 是不

相容的，则 $\Delta(D_s)$ 中任何一个概率分布 $\sigma_{i,s}(\cdot)$ 都能满足条设（4.1），因为此时它的两边都是0，于是，τ_i 可以有多于一个的行为表示。一个行为策略组合 $\sigma=(\sigma_i)_{i\in N}$是$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 中混合策略组幌 τ 的一个行为表示，当且仅当对每个局中人 i，σ_i 都是 τ_i 的一个行为表示。

给定$\times_{s\in S_i}\Delta(D_s)$ 中任一行为策略 $\sigma_i=(\sigma_{i,s})_{s\in S_i}$，$\sigma_i$ 的**混合表示**（mixed representation）被定义为 $\Delta(C_i)$ 中的 τ_i，使得

$$\tau_i(c_i)=\prod_{s\in S_i}\sigma_{i,s}\ (c_i(s)),\qquad \forall c_i\in C_i$$

也就是说，一个行为策略 σ_i 的混合表示就是$\Delta(C_i)$ 中这样的混合策略，其中局中人 i 在每个信息状态 s 处的计划行动具有边缘概率分布 $\sigma_{i,s}$，且其确定独立于他在所有其余信息状态处的行动。一个行为策略组合 $\sigma=(\sigma_i)_{i\in N}$的混合表示是混合策略组合 τ，使得对于每个局中人 i，τ_i 都是 σ_i 的混合表示。不难证明，若 τ_i 是局中人 i 的一个行为策略 σ_i 的混合表示，则 σ_i 是 τ_i 的一个行为表示。

$\Delta(C_i)$ 中的两个混合策略是**行为上等价**（behaviorally equivalent）的，当且仅当共享一个共同的行为表示。因而，在图4·1的例子中，局中人1的混合策略 $.5[w_1y_1]+.5[x_1z_1]$ 和 $.5[w_1z_1]+.5[x_1y_1]$，是行为上等价的，因为它们共有行为表示（$.5[w_1]+.5[x_1]$，$.5[y_1]+.5[z_1]$），而这个行为策略的混合表示又是 $.25[w_1y_1]+.25[x_1z_1]+.25[w_1z_1]+.25[x_1y_1]$。类似地，在图4·2的博弈中，$.5[a_1y_1]+.5[b_1z_1]$ 与 $.5[a_1y_1]+.5[b_1y_1]$ 是行为上等价的，因为它们共有行为表示（$.5[a_1]+.5[b_1]$，$[y_1]$），而对这个行为策略而言，$.5[a_1y_1]+.5[b_1y_1]$ 是它的混合表示。$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 中的两个混合策略组合 τ 与 $\hat{\tau}$ 是行为上等价的，当且仅当对每个局中人 i，τ_i 与 $\hat{\tau}_i$ 都是行为上等价的。 160

我们称 $\Delta(C_i)$ 中的两个混合策略 τ_i 与 ρ_i 是**支付等价的**（payoff equivalent），当且仅当对于每个局中人 j 和$\times_{l\in N-i}\Delta(C_l)$ 中的每一个 τ_{-i}，都有

$$u_j(\tau_{-i},\tau_i)=u_j(\tau_{-i},\rho_i),$$

其中 $u_j(\cdot)$ 是 Γ^e 之正规表示中局中人 j 的效用函数。也就是说，如果没有一个局中人的期望效用会依赖于局中人 i 所使用的随机策略是 τ_i 还是 ρ_i，则 τ_i 与 ρ_i 就是支付等价的。

下述源于库恩（1953）的定理将在4.11节中加以证明。

定理4.1　若 Γ^e 是一个具有完美记忆的博弈（参见2.1节），则 $\Delta(C_i)$ 中任意两个行为上等价的混合策略也必定是支付等价的。

---

* 原文误为（.5 [w1] + .5 [x1], [y1]）——译者注。

图 4·3 表明，具有完美记忆这一技术假定对于证明库恩定理是必要的。在这个博弈中，由于局中人 1 在信息状态 3 不能回忆起他在信息状态 1 处所选择的是 x_1 还是 y_1，所以此博弈不具有完美记忆。局中人 1 的两个混合策略 $.5[x_1x_3]+.5[y_1y_3]$ 与 $.5[x_1y_3]+.5[y_1x_3]$ 是行为上等价的，因为它们具有相同的行为表示

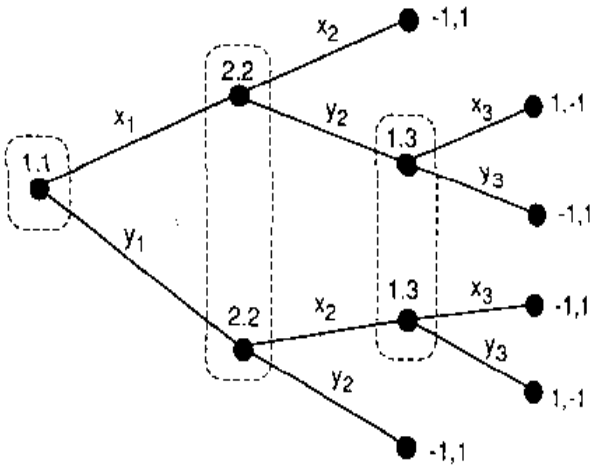

图 4·3

161 $(.5[x_1]+.5[y_1],\ .5[x_3]+.5[y_3])$。然而，$.5[x_1x_3]+.5[y_1y_3]$ 与 $.5[x_1y_3]+.5[y_1x_3]$ 却不是支付等价的；例如，对付 $[x_2]$，$.5[x_1x_3]+.5[y_1y_3]$ 给局中人 1 的期望支付为 0，而 $.5[x_1y_3]+.5[y_1x_3]$ 给予局中人 1 的期望支付却为 -1。

4.2 行为策略均衡

如果我们将展开型博弈的均衡定义为其策略型正规表示的均衡，那么，像图 4·1 那样的博弈将会具有巨大的均衡多重性，且这些均衡全都是行为上等价的。

为了避免这个问题，我们或许会考虑将展开型博弈的均衡定义为其多代理人表示的均衡，但这样一个定义会产生无谓均衡这一更为严重的问题，即在均衡中，局中人在无法跨接不同的信息状态时协调其行动。例如，$([b_1],[w_2],[z_2])$ 是图 4·2 的多代理人表示的一个均衡。在这个均衡中，给定预期局中人 2 选择 w_2，作为局中人 1 的前一个信息状态的代理人会预计，由于 1 后一信息状态的代理人计划做 z_1，所以若他把他所选择的 b_1 转换成 a_1，那他的支付将从 2 降至 0。再则，给定对局中人 1 的前一个代理人选择的 b_1 的预期，那 1 的后一个代理人会想像他的计划行动永远也不可能被执行，而因此计划选择 z_1 与计划选择 y_1 一样好。然而，如果局中人 1 真能预期到局中人 2 选择 w_2，那么，局中人 1 的实际最佳反应将是在自己的前一个信息状态选择 a_1，并在后一个信息状态选择 y_1。多代理人表示中之所以会出现这种无谓的均衡，是因为在涉及到不止一个信息状态时，对协调变动的可能性未予以考虑。

为了避免这两个问题，展开型博弈的一个**（纳什）均衡**［（Nash）equilibrium］或**行为策略均衡**（equilibrium in behavioral strategies）被定义为其多代理人表示的任一均衡 σ，使得 σ 的混合表示同时也是其正规表示的一个均衡。也就是说，Γ^e 的一个均衡被定义为同时兼为多代理人表示之均衡与相应正规表示之均衡的一个行为策略组合。因而，作为两个例子，图 4·1 中展开型博弈的唯一行为策略均衡是 162

$$(.5\,[w_1] + .5\,[x_1],\ .5\,[y_1] + .5\,[z_1],\ .5\,[w_2] + .5\,[x_2],\ .5\,[y_2] + .5\,[z_2]),$$

而图 4·2 中展开型博弈唯一的均衡是

$$(.5\,[a_1] + .5\,[b_1],\ .5\,[w_2] + .5\,[x_2],\ [y_1])$$

令 Γ^e 为一个具有完美记忆的展开型博弈，而 Γ 是它的策略正规表示。由库恩定理，如果 τ 是 Γ 的一个纳什均衡，而 $\hat{\tau}$ 是行为上等价于 τ 的任一其它混合策略组合，那么，$\hat{\tau}$ 也是 Γ 的一个纳什均衡（因为把均衡中任一局中人的策略换成一个支付等价的策略不会改变其作为均衡的性质）。所以，对于任一行为策略组合 σ 来说，σ 的混合表示为 Γ 的一个均衡的充分必要条件是，以 σ 为其行为表示的每一个混合策略组合都是 Γ 的一个均衡。

下面的定理告诉我们，为了找到 Γ^e 的一个均衡，只需找到 Γ^e 之正规表示的一个均衡，因为正规表示的任何一个均衡都对应于多代理人表示的一个均衡。这个定理的证明将在 4.11 节给出。

定理4.2　*若 Γ^e 是一个具有完美记忆的展开型博弈，且 τ 是 Γ^e 之正规表示的一个均衡，那么，τ 的任一行为表示都是 Γ^e 之多代理人表示的一个均衡。*

定理 4.2 与策略型博弈的均衡存在性定理（定理 3.1）一起，直接得出了如下展开型博弈的一般（均衡）存在性定理。

定理4.3　*对于任一具有完美记忆的展开型博弈，都必然存在一个行为策略纳什均衡。*

具有完美记忆的假定对这个存在性定理仍是必要的。例如，图 4·3 中那个不具有完美记忆的博弈就不存在任何行为策略的均衡。事实上，这个博弈之策略型正规表示的唯一均衡是 $(.5\,[x_1x_3] + .5\,[y_1y_3],\ .5\,[x_2] + .5\,[y_2])$，它给每个局中人的期望支付都是 0，但这不是多代理人表示之任一均衡的混合表示。这个混合策略组合的行为表示是 $(.5\,[x_1] + .5\,[y_1],\ .5\,[x_2] + .5\,[y_2],\ .5\,[x_3] + .5\,[y_3])$，这个行为表示碰巧是多代理人表示的一个均衡，但它给局中人 1 的期望支付是 $-1/2$，而不是 0。这种不具有完美记忆的博弈是极为违反直觉的，并且（如果有的话）几乎没有实际的应用， 163

所以，这种博弈不存在行为策略的均衡是不会成为问题的。这里讨论这个例子主要是为了说明具有完美记忆之假定的重要性。

4.3 正概率信息状态处的序贯理性

如果当信息状态 s 实际发生时局中人 i 将确实会按照某个策略为他在 s 处确定的行动去做，那我们就说局中人 i 的这个策略对他来说是在 S_i 中的信息状态 s 处**序贯理性**的（sequentially rational）。

在 2.2 节中，通过假定在博弈开始时，每个局中人都选择一个在每个可能信息状态都告诉了他做什么的期望效用最大化策略，并在此后的博弈过程中机械地应用这个策略，我们证明了用策略型正规表示来研究展开型博弈的方法是正确的。这个先验计划的假定在理论上自有其方便之处，但在大多数情况下，它是人为造作而又脱离现实的。所以，现在让我们去掉这个先验计划的假定，并探讨均衡策略是否是序贯理性的问题。

对于任一展开型博弈 Γ^e，这个博弈所给出的结构对直接跟随机会结点的每个枝都规定了一个**机会概率**（chance probability）。而一个行为策略组合 σ 对直接跟随决策结点的每个枝都规定了一**行动概率**（move probability），其中 $\sigma_{i,s}(m)$ 是具有行动标号 m 的一个枝的行动概率，而且这个枝是直接跟随由局中人 i 以信息状态 s 所控制的一个结点的。

对于任一行为策略组合 σ 及任意两个结点 x 和 y，如果 y 跟随于 x，那么令 $\bar{P}(y|\sigma, x)$ 表示从 x 到 y 路径上各枝由 σ 规定的所有机会概率与行动概率之乘积。如果 y 不跟随于 x，则令 $\bar{P}(y|\sigma, x)=0$。所以，如果所有局中人都按照局方案 σ 选择他们的行动，而且博弈是从 x 开始的，则 $\bar{P}(y|\sigma, x)$ 表示博弈路径在 x 之后将通过 y 的条件概率。

令 Ω 表示博弈 Γ^e 中所有的终结点构成的集，并令

164
$$U_i(\sigma \mid x)=\sum_{y\in\Omega}\bar{P}(y\mid\sigma,x)w_i(y)$$

其中 $w_i(y)$ 表示终结点 y 处对局中人 i 的支付。也就是说，如果这个博弈是在结点 x（而不是在根）开始的，并且所有局中人随后都选择由 σ 为他们规定的行动，那么，$U_i(\sigma|x)$ 就是对局中人 i 的期望效用支付。值得注意的是，$U_i(\sigma|x)$ 只依赖于 σ 之在博弈树中跟随 x 的那些结点所应用的分量。

假设局中人 i 具有只在结点 x 出现的一个信息状态 s，则 $Y_s=\{x\}$。于是行为策略组合 σ 对局中人 i 在 s 处是序贯理性的，当且仅当

$$\sigma_{i,s}\in\underset{\rho_s\in\Delta(D_s)}{\operatorname{argmax}}\ U_i(\sigma_{i,s},\rho_s|x)$$

[这里 $(\sigma_{-i,s}, \rho_s)$ 是一个行为策略，它与 σ 的差别仅在于局中人 i 在状态 s 处要按照 ρ_s 行动。] 也就是说，σ 对局中人 i 在 s 处是序贯理性的，当仅且当，如果局中人 i 预料在结点 x 之后的所有行动都将按照 σ 来决定，则当结点 x 出现在博弈中时，$\sigma_{i,s}$ 将会最大化局中人 i 的期望效用。

对于那些不止在一个结点出现的信息状态，如何去定义在这种信息状态处的序贯理性多少有点更微妙一些。在这样的一个信息状态处，一个局中人的期望效用将依赖于其关于哪个可能结点会在局路径中实际发生的信念。所以，这些信念在我们的分析中可能有着重要作用。

对于任一局中人 i 的任一信息状态 s，i 在 s 处的一个**信念概率**（belief-probability）分布是标号“$i.s$”的结点集 Y_s 上的一个概率分布。即是说，对 S_i 中的任一 s，i 在 s 处的一个信念概率分布是 $\Delta(Y_s)$ 的一个向量 $\pi_{i,s}$。如果我们断言 $\pi_{i,s}$ 是局中人 i 在状态 s 处的信念概率分布，那就意味着对于 Y_s 中每个结点 x，当 i 知道了他在 Y_s 中某个结点做一个行动，则 $\pi_i.s(x)$ 是他对自己在 x 处采取行动这一事件所赋予的条件概率。

一个**信念向量**（beliefs vector）是集 $\times_{i\in N}\times_{s\in S_i}\Delta(Y_s)=\times_{s\in S}\Delta(Y_s)$ 中任一向量 $\pi=(\pi_i.s)_{i\in N, s\in S_i}$，即一个信念向量对每个局中人的每个信息状态都规定了一个信念概率分布。

给定一个信念向量 π，它确定 $\pi_i.s$ 为局中人 i 在 S_i 中一个信息状态 s 处的信念概率分布，定义一个行为策略组合 σ 是局中人 i 在 s 处以信念 π 序贯理性的，当且仅当

$$\sigma_{i,s}\in \underset{\rho_s\in\Delta(D_s)}{\operatorname{argmax}}\sum_{x\in Y_s}\pi_{i,s}(x)U_i(\sigma_{-i,s},\rho_s\mid x) \tag{4.2}$$

165

即是说，给定局中人 i 在他知道了 Y_s 中某一结点已经发生时，他对 Y_s 中各个不同结点所指定的信念概率，并假定在这个结点之后的所有行动都将按照 σ 来决定，那么，当且仅当 $\sigma_{i,s}$ 在 Y_s 中的一个结点在博弈路径中出现时最大化了局中人 i 的期望支付，σ 对状态 s 处的局中人 i 来说才是序贯理性的。

等价地（由引理 3.1），对处于其信息状态 s 的局中人 i 来说，具有信念 π 的 σ 是序贯理性的，当且仅当对于 D_s 中任一行动 d_s 都有：

$$若\ \sigma_{i,s}(d_s)>0\quad 则\ d_s\in \underset{e_s\in D_s}{\operatorname{argmax}}\sum_{x\in Y_s}\pi_{i,s}(x)U_i(\sigma_{-i,s},[e_s]\mid x)$$

对于 D_s 中任一行动 e_s，其中 $s\in S_i$，局中人 i 的条件期望支付

$$\sum_{x\in Y_s}\pi_{i,s}(x)U_i(\sigma_{-i,s},[e_s]\mid x)$$

是局中人 i 的状态 s 处行动 e_s（关于局方案 σ 和信念 π）的序贯值（sequential value）。因而，如果 σ 不是局中人 i 在 s 处以信念 π 序贯理性的，那么，D_s 中一定存在某个行动 b_s 使得行动概率 $\sigma_{i,s}(b_s)$ 严格为正，但对 s 处的局中人 i 来

说，b_s 的序贯值（涉及到 σ 和 π）严格小于在 s 处同样可供 i 利用的另外某个行动的序贯值。依据信念 π，任何一个这样的行动 b_s 都是局方案 σ 中的一个**非理性行动**（irrational move）。

上述序贯理性之定义回避了问题（由克蕾普斯和威尔逊第一次提出，1982）：一个理性而又智能的局中人应如何决定其信念概率呢？信念概率都是在给定博弈进行中可能为一个局中人所用的信息下的条件概率，从而，这些信念概率一定通过贝叶斯公式而与该局中人在博弈开始所相信的信息相关。

对于任一结点 y 和任一行为策略组合 σ，我们令 $\bar{P}(y|\sigma)$ 表示在所有的局中人都按照局方案 σ 选择他们的行动时，从根出发的局路径到达结点 y 的概率，即 $\bar{P}(y|\sigma)=\bar{P}(y|\sigma, x^0)$，其中 x^0 表示树根或初始结点，所以 $\bar{P}(y|\sigma)$
166 是由 σ 对从根到 y 路径上所有枝所规定的机会概率与行动概率之乘积。我们把 $\bar{P}(y|\sigma)$ 称为在局方案 σ 下结点 y 的**先验概率**（prior probability）。

现在假设 σ 是描述了一个智能人在博弈 Γ^e 中所能预料的行为的一个行为策略组合，那么按照贝叶斯公式，对于任一局中人 i 和 S_i 中任一信状态 s，i 在状态 s 处的信念概率分布 $\pi_{i,s}$ 对 Y_s 中的每个结点 x 都应该满足下述方程：

$$\pi_{i,s}(x)\sum_{y\in Y_s}\bar{P}(y\mid\sigma)=\bar{P}(x\mid\sigma) \tag{4.3}$$

即在局方案 σ 下，给定状态 s 之结点 x 的条件概率乘以所有 i,s 结点的总先验概率必须等于结点 x 的先验概率。我们称一个信念向量 π 与局方案 σ 是**弱一致的**（weakly consistent），当且仅当，对于每个局中人 i、S_i 中的每个信息状态 s 及 Y_s 的每个结点 x，π 都满足条件（4.3）。

如果局路径通过 Y_s 中一个结点的概率严格为正，由此

$$\sum_{y\in Y_s}\bar{P}(y\mid\sigma)>0 \tag{4.4}$$

那么方程（4.3）完全刻划了局中人 i 在 s 处的信念概率，因为这时（4.3）式等价于

$$\pi_{i,s}(x)=\frac{\bar{P}(x\mid\sigma)}{\sum_{y\in Y_s}\bar{P}(y\mid\sigma)},\qquad \forall x\in Y_s \tag{4.5}$$

另一方面，如果条件（4.4）不被满足，则在 σ 下状态 s 有着零概率，或者称 s 在 σ 的**路径外**（off the path）。不幸的是，方程（4.3）不能用来计算局方案 σ 中具有零概率的信息状态 s 处的信息概率，因为无论 $\pi_{i,s}(x)$ 取何值，方程（4.3）的两边都是 0。

在一个均衡中能以正概率出现的信息状态处，其均衡策略总是序贯理性的。

定理4.4 设 σ 是一个具有完美记忆的展开型博弈的一个行为策略均衡，令 s

是 S_i 中在 σ 下以正概率出现的一个信息状态，故条件（4.4）是满足的。令 π 是与 σ 弱一致的一个信念向量，则 σ 是局中人 i 在状态 s 处以信念 π 序贯理性的。

定理 4.4 的证明在 4.11 节给出。对这个定理是不应该感到惊奇的，因为 167
正如我们在第 1 章所看到的那样，贝叶斯公式本身可以由这样一个公理导出：在观察到一个事件之后的最优决策应该与决策者在观察到此事件之前所形成的最优应急行动计划相一致。因此，放弃先验计划的假定，均衡策略在所有具有正概率的信息状态下仍将是理性地执行的。

为了说明这些思想，再次考虑 2.1 节中所讨论的简单摊牌博弈。在 3.2 节中，我们证明了这个博弈唯一的均衡是

$$(\tau_1, \tau_2) = (1/3[\mathrm{Rr}] + 2/3[\mathrm{Rf}], 2/3[\mathrm{M}] + 1/3[\mathrm{P}])$$

用行为策略表示，这个均衡是

$$(\sigma_{1.a}, \sigma_{1.b}, \sigma_{2.0}) = ([\mathrm{R}], 1/3[\mathrm{r}] + 2/3[\mathrm{f}], 2/3[\mathrm{M}] + 1/3[\mathrm{P}])$$

这就是说，当局中人 1 持有一张红色牌时，他在 1.a 处肯定加注，当局中人 1 持有一张黑色牌时，他在 1.b 处应该以概率 1/3 加注，以概率 2/3 摊牌；当局中人 2 看到局中人 1 加注时，她应该以概率 2/3 对抗，以 1/3 的概率放弃。

为了验证序贯理性，我们必须检验每个局中人在没有事先计划好其行动时，是否确实愿意执行这些均衡策略。显而易见，当局中人 1 持有一张红色致胜牌时，因为摊牌不会使他有所增益，所以他应该加注，而当局中人 1 持有一张黑色牌而加注时，若局中人 2 放弃则他获得 +1，若 2 对抗则他获得 −2。因此，在局中人 2 执行她的均衡策略而以 2/3 的概率对抗时，局中人 1 在 1.b 处加注的序贯值是 $-2\times 2/3 + 1\times 1/3 = -1$。另一方面，当局中人 1 持有一张黑色牌而摊牌时，他得到的支付同样是 −1，所以，在 1 持有一张黑色牌时，他应该乐意于在加注与摊牌之间随机化，如同其均衡策略所规定的那样。

局中人 2 在标号为 2.0 的两个结点处的决策问题略显微妙。如果她放弃，那么她在每个结点都是得到 −1。如果他对抗，那她在其上结点（此处局中人 1 持有一张红色牌）获得 −2，但在其下结点（此处局中人 1 持有一张黑色牌）她获得 +2。所以，她的最优行动依赖于她对这两个结点的信念概率。为了计算这两个概率，我们应用贝叶斯公式，令 a_0 表示她的上结点，b_0 表示她的下 168
结点。在行为策略均衡 σ 下，到达上结点的概率是

$$\bar{P}(a_0|\sigma) = .5\times\sigma_{1.a}(\mathrm{R}) = .5\times 1 = .5$$

到达她的下结点的概率是

---

* 原文误为加注——译者注。

$$\bar{P}(b_0|\sigma) = .5 \times \sigma_{1.b}(r) = .5 \times 1/3 = 1/6$$

因此，给定局中人1已经加注，这两个结点的条件概率是

$$\pi_{2.0}(a_0) = \frac{.5}{.5+1/6} = 0.75$$

$$\pi_{2.0}(b_0) = \frac{1/6}{.5+1/6} = 0.25$$

借助于这两个信念概率，在局中人1加注后，局中人2在其状态0处对抗的序贯值是 $.75\times(-2)+.25\times 2=-1$。另一方面，若局中人2在1加注后放弃，则她的序贯值是-1，这个值是她一定会得到的支付。所以，信念 $\pi_{2.0}$ 的确使局中人2乐意在对抗与放弃之间随机化，正如其均衡策略所确定的那样。

当我们用图解法显示展开型博弈的均衡时，我们应该同时标出行为策略组合的行动概率和与这个均衡相一致的信念向量的信念概率。为了便于阅读，让我们做如下约定：把行动概率写在圆括号内，而把信念概率写在角括号内（"⟨·⟩"）。在图4·4中，我们标出了简单摊牌的展开型博弈的均衡和一致信念。在直接跟随决策结点的每个枝上，我们把其行动概率（行为策略组合 σ 的一个分量）标在圆括号内；而在每个决策结点处，我们把信念概率（信念向量 π 的一个分量）标在角括号内。

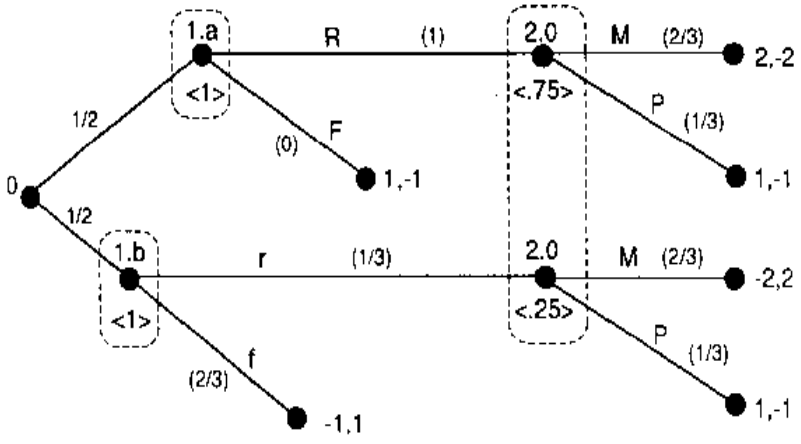

图 4·4

4.4 一致信念和所有信息状态处的序贯理性

定理4.4看起来好像完全解决了序贯理性的问题，但事实上并非如此。它对于均衡中具有零概率的那些信息状态处的行为就只字未提。为了保证包括具
169 有零概率的状态在内的所有信息状态处的序贯理性，我们必须用一种实质而又重要的方式来改善均衡的概念。

首先，初看起来，零概率状态处的理性行为或许是一个无足挂齿的次要技术问题。毕竟，如果某件事几乎肯定不会发生，那又何必要担心它呢？但问题在于，一个信息状态处的概率是由均衡内生地决定的。如果我们允许局中人在一个内生地具有零概率的事件中可以非理性地反应的话，那我们或许会发现，这样的一个事件之所以具有零概率，只是因为局中人煞费苦心以确保他们不去创造一个使某个人如此非理性反应的局势。也就是说，这种非理性行为的可能性能够对局中人在以正概率出现的状态处的行为产生重大影响。因此，如果我们想要研究不束缚于先验计划的理性智能局中人之行为，我们就必须小心地把序贯理性准则应用于所有信息状态处而不仅仅是具有正概率的状态处的行为。

值得注意的是，一个局中人的期望支付，如同在博弈开始时所计算的，完全不受他计划在一个应该在博弈均衡中以零概率出现的信息状态处所使用的行动的影响。因此，只给定在博弈开始时他所知道的情况来确定最大化其期望支付的一个策略时，对一个局中人计划在那些被认为具有零概率的信息状态处会使用什么行动毫无限制。例如，在图 4·5 的博弈中，假设预期局中人 1 会选择 170
y_1，那么不论局中人 2 计划使用什么策略，她都将预期有 9 的支付。因此，对于局中人 2 来说，按照在给定博弈开始时的信息下最大化其期望效用的准则，如果她得到一个行动的机会，则选择 y_2 的策略与选择任一别的策略一样好。由于在 2 计划选择 y_2 时，1 偏好选择 y_1，所以（$[y_1]$，$[y_2]$）是这个博弈的一个纳什均衡。然而，如果局中人 2 实际上有机会行动，则由于策略 y_2 给她的支付为 2，而策略 x_2 给她的支付为 3，故而（$[y_1]$，$[y_2]$）在局中人 2 的结点处不是序贯理性的，尽管它满足这个博弈纳什均衡的定义。[但这个博弈的另一个均衡（$[x_1]$，$[x_2]$））是序贯理性的。]

图 4·5 中的不合理均衡涉及到弱劣策略 y_2，但是，构造一些类似的且其中不含弱劣策略的例子并非难事。例如，考虑图 4.6 中的博弈。在这个博弈中，没有一个弱劣策略，且（$[y_1]$，$[y_2]$，.5 $[x_3]$ + .5 $[y_3]$，$[y_4]$）是一个行为策略均衡，但不存在一致信念向量，使这个均衡对局中人 3 来说是序贯理性的。在这个局方案中，行动 x_3 对局中人 3 来说是非理性的，因为在 3 行动之后，局中人 4 会选择 y_4，从而对局中人 3 而言，x_3 的序贯值小于 y_3 的序贯值（0<2）。

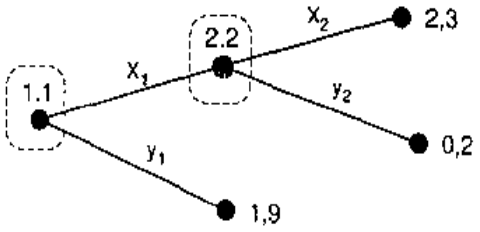

图 4·5

一般地，Γ^e 的一个**弱序贯均衡**（weak sequential equilibrium）是任一（σ，π）使得 σ 是 $\times_{s\in S^*}\Delta(D_s)^*$ 中的一个行为策略组合，π 是 $\times_{s\in S^*}\Delta(Y_s)$ 中的一个信念向量，σ 是每个局中人在每个信息状态处以信念 π 序贯理性的，而 π 与 σ 又是弱一致的［这一术语已被希拉斯（Hillas，1987）使用过］。这就是说，（σ，π）是弱序贯均衡，当且仅当对于每个局中人 i 和每个信息状态 S， 171

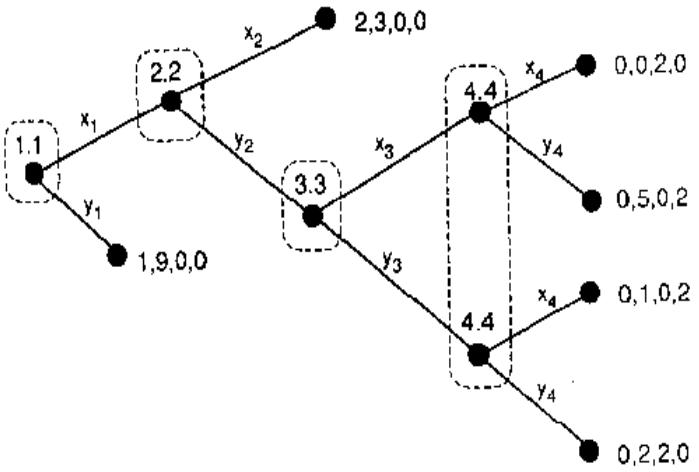

图 4·6

(σ, π) 都满足条件 (4.2) 和 (4.3)。我们说一个行为策略组合 σ 是一个弱序贯均衡的局方案 (weak sequenatial-equilibrium scenario)，当且仅当存在某个信念向量 π 使得 (σ, π) 是一个弱序贯均衡。

于是，弱序贯均衡的概念可以排除某些不合理的均衡。正如我们已经看到的那样，$([y_1], [y_2], .5[x_3] + .5[y_3], [y_4])$ 是图 4·6 中博弈的一个均衡，但它并非一个弱序贯均衡的局方案。然而，也易于构造另外一些博弈，其中同样不合理的均衡却不能用弱序贯均衡的概念予以排除。

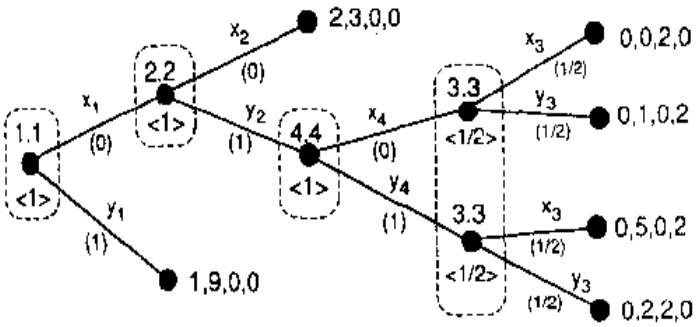

图 4·7

例如，考虑图 4·7，它是由图 4·6 通过交换局中人 3 和 4 的行动顺序而得到的。因为没有一个局中人能观察到对方的行动，所以这个顺序应该是无关紧
172 要的，而且事实上，这两个展开型博弈也具有相同的策略型（正规或多代理人）表示。行为策略组合 $([y_1], [y_2], .5[x_3] + .5[y_3], [y_4])$，是图 4·7中博弈的一个弱序贯均衡的局方案。为使这个局方案成为弱序贯均衡，令局中人 3 的两个决策结点的信念概率都等于 1/2，正如该图所示。这样的信念与这个局方案是弱一致的，这是因为在这个方案下，这两个 3.3 结点都具有先验概率 0（因为两个 3.3 结点都跟随 x_1 枝，而此枝的行动概率为 0）；从而不能应用贝叶斯公式 (4.3) 来确定信念概率 $\pi_{3,3}(x)$。当局中人 3 考虑到他的两个结点是同等可能时，在他只知道某个 3.3 结点已经由局路径到达的情况

下，他将乐意于在 x_3 与 y_3 之间随机化，且这两个结点中的每一个都给予他条件期望支付 $1/2\times2+1/2\times0=1$。因此（通过图 4·7 逆推），若局中人 4 预期 3 以相同的概率去随机地选择 x_3 和 y_3，则 4 在她的 4.4 结点处将乐意选择 y_4；又若局中人 2 预期其后局中人 3 和 4 会遵循这个局方案，则她在她的 2.2 结点处会乐意于选择 y_2，（因为 $1/2\times5+1/2\times3>3$）；再若局中人 1 预期局中人 2 选择 y_2，则他将偏好选择 y_1。

关于这个弱序贯均衡的问题是，对局中人 3 所规定的信念概率是不合理的，如果局中人 3 能智能地理解这个给定的局方案（$[y_1]$，$[y_2]$，$.5[x_3]+.5[y_3]$，$[y_4]$），那么，只要局路径到达 4.4 结点，他会预期局中人 4 选择 y_4；从而假如一个 3.3 决策结点已经出局路径到达的话，则 3 会以信念概率 1 确信局路径所到达的必是下结点 3.3。（依据这样的信念，因为 x_3 对局中人 3 来说是一个非理性行动，所以 $.5[x_3]+.5[y_3]$ 对局中人 3 亦不会是序贯理性的。）为了提出一个更复杂的均衡概念以便排除这些不合理的局方案，对于一个信息状态处的所有结点在给定局方案下都有着零概率的情形，为决定其信念概率，我们需要某种较强的一致性概念。当零先验概率使方程（4.3）的两边都等于 0 时，简单地说任何信念概率 π 都是“一致的”，显然是不够的。

为了阐述信念一致性的一个较强意义，让我们尽量更加系统地考虑一下，对于所有的信息状态，信念应如何定义的问题。我们从对博弈 Γ^e 做一简化假定着手讨论这个问题（在 4.8 节中将被放松）。让我们假定 Γ^e 中直接跟随机会 173
结点的每个枝都被赋予了一个严格正的机会概率。

借助于这一假定，任何一个对每一信息状态处的每个行动都指定了严格正的行动概率的行为策略组合 σ，都将在博弈树中每个结点 y 产生一个严格为正的先验概率 $P(y|\sigma)$。其所有行动概率皆为正的所有行为策略组合组成的集是 $\times_{s\in S^*}\Delta^0(D_s)$［回顾方程（1.6）中 Δ^0 的定义］。于是，若 $\sigma\in\times_{s\in S^*}\Delta^0(D_s)$，则对每个结点 y 均有 $P(y|\sigma)>0$，并且存在唯一的一个信念向量 π 满足贝叶斯公式（4.3）或（4.5），令 Ψ^0 表示所有这样的偶 (σ,π) 所组成的集，其中 $\sigma\in\times_{s\in S^*}\Delta^0(D_s)$，且对于每个局中人 i 与 S_i 中的每个信息状态 s，π 都满足贝叶斯公式（4.5）。

给定展开型博弈 Γ^e，“一致的”信念之任一较强的定义在数学上都可以用集 Ψ 来刻划，使得

$$\Psi\subseteq\left(\underset{s\in S^*}{\times}\Delta(D_s)\right)\times\left(\underset{s\in S^*}{\times}\Delta(Y_s)\right)$$

其中 Ψ 表示所有这样的偶 (σ,π) 组成的集，其信念向量 π 与局方案 σ 是一致的。如果一致性被认为是满足贝叶斯公式所有含义的话，那么，Ψ^0 应该是这个集 Ψ 的一个子集。也就是说，若 (σ,π) 属于 Ψ^0，则在任何较强的意义上，π 都应该被认为与 σ 是相一致的，因为贝叶斯公式不容许有其它的信念向

量与$\times_{s\in S^*}\Delta^0(Ds)$中的局方案$\sigma$配偶。由于一些自然的技术原因。我们还可以假设这个集Ψ应该是$\{\times_{s\in S^*}\Delta(Ds)\}\times\{X_{s\in S^*}\Delta(Y_s)\}$的一个闭子集，使得那些可用一致的局方案——信念偶任意闭逼近的局方案——信念偶本身是一致的。[例如，π与σ是弱一致的所有的偶(σ,π)所组成的集是一个闭集，且Ψ^0作为一个子集被包含于其中。]这样一来，最强而又合理的一致性定义可以考虑为使Ψ是包含Ψ^0的最小闭集。

于是，遵循克雷普斯和威尔逊(1982)，我们称博弈Γ^e中的一个信念向量π与一个行为策略组合σ是**完全一致的**(fully consistent)，当且仅当存在某个序列$\{\hat{\sigma}^k\}_{k=1}^{\infty}$使得

$$\hat{\sigma}^k\in\underset{s\in S^*}{\times}\Delta^0(D_s),\qquad \forall k\in\{1,2,3,\cdots\} \tag{4.6}$$

$$\sigma_{i,s}(d_s)=\lim_{k\to\infty}\hat{\sigma}^k_{i,s}(d_s),\qquad \forall i\in N,\forall s\in S_i,\forall d_s\in D_s \tag{4.7}$$

174
$$\pi_s(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{\bar{P}(x|\hat{\sigma}^k)}{\sum\limits_{y\in Y_s}\bar{P}(y|\hat{\sigma}^k)},\qquad \forall s\in S^*,\ \forall x\in Y_s \tag{4.8}$$

也就是说，π与σ是完全一致的，当且仅当存在任意接近于σ的行为策略组合，对每个行动都指定严格正的概率，使得对于这些严格正的行为策略组合满足贝叶斯公式的信念向量是任意接近于π的。借助于这个完全一致性定义，若用Ψ表示所有使π与σ完全一致的偶(σ,π)的集，则集Ψ恰好就是$\{\times_{s\in S^*}\Delta(D_s)\}\times\{\times_{s\in S^*}\Delta(Y_s)\}$的包含$\Psi^0$的最小闭子集。易于证明，完全一致性包含了弱一致性，即若π与σ是完全一致的，则π与σ也是弱一致的。今后，每当我们提到信念与一个局方案是**一致的**，除非另有说明，否则，我们总是指它们是完全一致的。

回想1.6节所说过的，当可能状态数有限时，所有的贝叶斯条件概率系都可以被表征为其所有事件均具有正概率的概率分布序列所生成的条件概率系的极限，正如条件(4.6)～(4.8)所要求的那样。条件(4.6)～(4.8)中所增加的唯一特点是，要求概率分布序列把不同信息状态处的行动作为相互独立的随机变量来处理，以表达局中人在选择其策略时没有通信这一假设。可以证明，对于$\times_{s\in S^*}\Delta(D_s)$中任一行为策略组合$\sigma$，至少存在一个信念向量与$\sigma$是完全一致的，尽管当$\sigma$不在$\times_{s\in S^*}\Delta^0(D_s)$中时，可能会存在不止一个与其完全一致的信念向量。

为了说明完全一致性的含义，考虑图4·8中的博弈及其局方案$([z_1],[y_2],[y_3])$，它是这个博弈的一个均衡，如果把这个局方案稍加扰动以使所有的行动概率都为正，则得到一个局方案

$$(\varepsilon_0[x_1]+\varepsilon_1[y_1]+(1-\varepsilon_0-\varepsilon_1)[z_1],\ \varepsilon_2[x_2]+(1-\varepsilon_2)[y_2],\ \varepsilon_3[x_3]+(1-\varepsilon_3)[y_3])$$

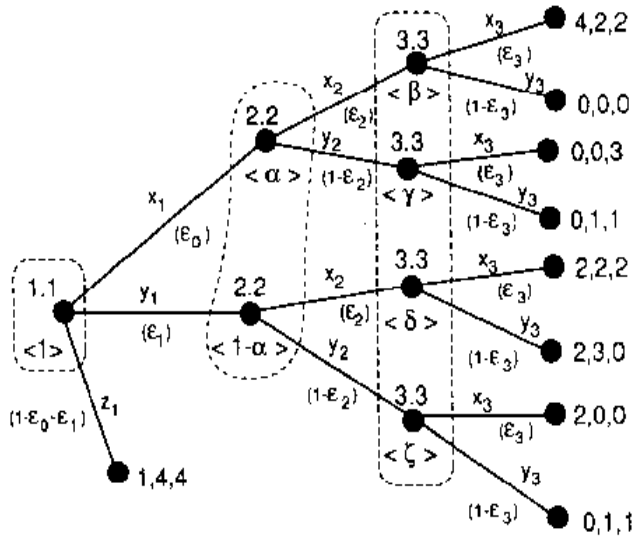

图　4·8

如图 4·8 中用圆括号所指出的那样，其中 ε_0，ε_1，ε_2 及 ε_3 都是非常小的正数。 175
于是贝叶斯公式（4.5）意味着，图 4·8 中所示的信念概率必须满足

$$\alpha=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}$$

$$\beta=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_2}{\varepsilon_0\varepsilon_2+\varepsilon_0(1-\varepsilon_2)+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}=\varepsilon_2\alpha$$

$$\gamma=\frac{\varepsilon_0(1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_0\varepsilon_2+\varepsilon_0(1-\varepsilon_2)+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}$$

$$=(1-\varepsilon_2)\alpha$$

$$\delta=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_0\varepsilon_2+\varepsilon_0(1-\varepsilon_2)+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{\varepsilon_2\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}=\varepsilon_2(1-\alpha)$$

$$\zeta=\frac{\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_0\varepsilon_2+\varepsilon_0(1-\varepsilon_2)+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}$$

$$=(1-\varepsilon_2)(1-\alpha)$$

当这些正数 ε_0，ε_1，ε_2 与 ε_3 趋于 0 时，这些一致的信念必须满足

$$\beta=0,\ \gamma=\alpha,\ \delta=0,\ \zeta=1-\alpha,$$

其中 α 可以是区间 $[0,\ 1]$ 上的任何数。因此存在一个单参数的信念向量族， 176
其中每个信念向量与局方案（$[z_1]$，$[y_2]$，$[y_3]$）是完全一致的。信念概率 α 表示若局路径到达了局中人 2 所控制的一个决策结点（这在这个局方案下是一个零概率事件），局中人 2 对局中人 1 选择 x_1 这一事件所确定的条件概率，故 α 可以是 0 与 1 之间的任一数字。不过，完全一致性意味着，信念概率之和 β

$+\gamma$是局路径到达了局中人3所控制的一个决策结点时，他对局中人1选择x_1这一事件所确定的条件概率，故$\beta+\gamma$必须等于这同一个数α。也就是说，在不选择x_1的条件下，局中人2和3关于x_1的条件概率必须一致。同样地，信念概率之和$\beta+\delta$是局路径到达了局中人3所控制的一个决策结点时，他对局中人2选择x_2这一事件所确定的条件概率，由于在这个局方案中x_2行动概率为0，所以$\beta+\delta$必须等于0。

正如克雷普斯和威尔逊（1982）所定义的，Γ^e的一个**序贯均衡**（sequential equilibrium）[或一个**完全序贯均衡**（full sequential equilibrium）]是$\{\times_{s\in S^*}\Delta(D_s)\}\times\{\times_{s\in S^*}\Delta(Y_s)\}$中任一$(\sigma,\pi)$，使得信念向量$\pi$与$\sigma$是完全一致的，并且相对于信念$\pi$，局方案$\sigma$对每个局中人在每个信息状态处是序贯理性的。我们称一个行为策略组合σ是**序贯均衡局方案**（sequential-equilibrium scenario），或者说σ能够被**扩张**（extended）成一个序贯均衡，当且仅当存在某个π，使得(σ,π)是一个序贯均衡。

我们的简单摊牌博弈唯一的序贯均衡如图4·4所示。对于图4·5中的博弈，唯一的序贯均衡局方案是$([x_1],[x_2])$。对于图4·6和图4·7中的博弈，唯一的序贯均衡局方案是$([x_1],[x_2],.5[x_3]+.5[y_3],.5[x_4]+.5[y_4])$；为了把这个局方案扩张成一个序贯均衡，我们在图4.6中对局中人4的每个结点赋予信念概率1/2，或在图4.7中对局中人3的每个结点都赋予信念概率1/2。对于图4·8的博弈，唯一的序贯均衡局方案是$([x_1],[x_2],[x_3])$。

为了看出均衡$([z_1],[y_2],[y_3])$不能被扩张成图4·8的一个序贯均衡的原因，回想与这个局方案完全一致性要求，即图4·8中所表明的信念概率必须满足$\beta=\delta=0$，$\gamma=\alpha$及$\zeta=1-\alpha$。给定局中人3在信息状态3处选择y_3，则
177 局中人2在信息状态2的期望支付（相对于这些信念概率）是，若她选择x_2则为$0\alpha+3(1-\alpha)$，若她选择y_2则为$1\alpha+1(1-\alpha)=1$。从而选择y_2对局中人2在信息状态2处是序贯理性的，当且仅当$0\alpha+3(1-\alpha)\leqslant 1$，故$\alpha\geqslant 2/3$。另一方面，相对于这些信念概率，局中人3在信息状态3的期望支付是，若他选择x_3则为$2\beta+3\gamma+2\delta+0\zeta=3\alpha$，若他选择$y_3$则为$0\beta+1\gamma+0\delta+1\zeta=1$。从而，选择$y_3$对局中人3在信息状态3处是序贯理性的，当且仅当$1\geqslant 3\alpha$，故$\alpha\leqslant 1/3$。因而（由于$\alpha$不可能既小于1/3又大于2/3），无法指定信念概率使之与$([z_1],[y_2],[y_3])$完全一致，也无法使$([z_1],[y_2],[y_3])$对局中人2和3都是序贯理性的。

现在，我们可以叙述两个基本定理，这对肯定序贯均衡的这个定义的合理性很有必要。

定理4.5 若(σ,π)是一个具有完美记忆的展开型博弈的一个序贯均衡，则σ是一个行为策略均衡。

定理4.6　对于任何一个有限展开型博弈，序贯均衡集是非空的。

定理4.5的证明在4.11节给出，而定理4.6的证明要在提出了完美均衡的概念之后在第5章再给出。

为了说明定理4.5，回顾图4·2所示的例子，局方案($[b_1]$, $[w_2]$, $[z_1]$)是此博弈多代理人表示的一个均衡，但它不是一个行为策略均衡。根据这个局方案，完全一致信念必定对跟随 w_2 的上结点1.3指定信念概率1。不过，根据这样的信念，z_1 对局中人1在信息状态3处是非理性行动。因此，($[b_1]$, $[w_2]$, $[z_1]$)不是一个序贯均衡局方案，故定理4.5是成立的。[值得注意的是，这个论证要求完全一致性。事实上，($[b_1]$, $[w_2]$, $[z_1]$)是一个弱序贯均衡局方案。]

4.5　计算序贯均衡

考虑如图4·9所示的博弈，它改编自罗森塔尔（Rosenthal, 1981）。对这个博弈可做如下解释。在以概率.95发生了上面的一个机会事件后，两个局中人轮流选择慷慨的（g_k, $k=1, 2, 3, 4$）或自私的（f_k）活动直到某人自私 178
或者两人都已经慷慨了两次。每个局中人都在其每次慷慨中损失1美元，但在另一局中人的慷慨中获得5美元。在下面的机会事件以.05的概率发生后，除了局中人2不可能自私（或许因为她是那种本性正直的人对任何慷慨活动都予以慷慨的回报），其余一切与上面那个机会事件出现后的情形相同。局中人1不能直接观察机会事件的结果。

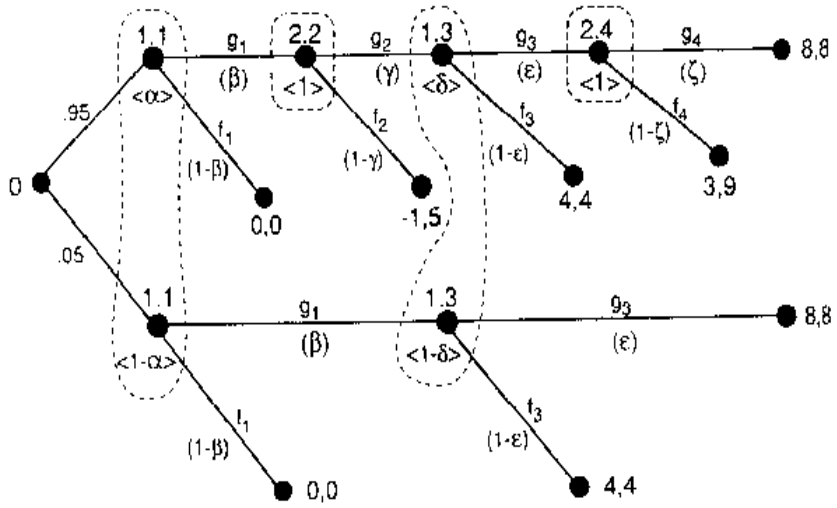

图 4·9

构成此博弈的一个序贯均衡所需的行动概率和信念概率在图 4·9 中分别示于圆括号和角括号内。为了具体刻划这些信念，令 α 表示局中人 1 在博弈开始时对于局中人 2 可以自私这一事件所赋予的概率，令 δ 表示局中人 1 在观察到局中人 2 慷慨过一次后对她可能自私这一事件所赋予的概率。而为了具体刻划行为策略，令 β 为局中人 1 在其第一次行动中慷慨的概率，令 γ 表示局中人 2 在能选择自私的情况下而在其第一次行动中选择慷慨的概率，用 ε 表示 1 在其第二次行动中慷慨的概率，用 ζ 表示 2 在能自私的情况下而在其第二次行动中慷慨的概率。现在，我们说明如何解得这些变量，从而找到此博弈的一个序贯均衡。

这些变量中的两个能轻而易举地决定。显然，$\alpha = .95$，因为它是机会结点
179 处上面一个选择的概率，而机会事件的结果对局中人 1 是不可观测的。同样容易看出 $\zeta = 0$，因为如果局中人 2 能自私，则她在博弈的最后一次行动中不会有慷慨的动机。

为使求解序贯均衡其余分量的工作能有条不紊地进行，我们利用 3.3 节中曾介绍过的**支撑**这个概念。在任一信息状态处，一个序贯均衡的支撑是此信息状态处按照序贯均衡中行为策略组合以正概率所使用的行动集。为此，选择任一信息状态，并设法猜测此信息状态处的序贯均衡支撑可能是怎样的。利用这种猜测，我们要么可以构造一个序贯均衡，要么可以指出不存在以此为支撑的序贯均衡，从而再去试探另外一个猜测。

像这种对博弈进行逆向处理的办法常常是很好的。因为我们已经知道了局中人 2 在信息状态 4 处将做什么，所以现在让我们考虑局中人 1 的信息状态 3，此时他将做出他的第二次行动。现有 3 个可能的支撑可供考虑：$\{g_3\}$，$\{f_3\}$ 及 $\{g_3, f_3\}$。由于 $\zeta = 0$，所以局中人 1 在状态 3 选择 g_3 所得到的期望支付（或序贯值）是 $3\delta + 8(1-\delta)$；而 1 在状态 3 选择 f_3 所得到的期望支付是 $4\delta + 4(1-\delta) = 4$。由贝叶斯公式 (4.5)

$$\delta = \frac{.95\beta\gamma}{.95\beta\gamma + .05\beta} = \frac{19\gamma}{19\gamma + 1}$$

因为上式对任何其中 β 严格为正的扰动行为策略都成立，所以即使 $\beta = 0$，完全一致性也要求 $\delta = 19\gamma/(19\gamma + 1)$。

让我们首先试探在 1 的状态 3 处序贯均衡的支撑为 $\{g_3\}$ 的猜测；故 $\varepsilon = 1$。于是局中人 1 在状态 3 处的序贯理性要求 $3\delta + 8(1-\delta) \geqslant 4$。这个不等式意味着 $0.8 \geqslant \delta = 19\gamma/(19\gamma + 1)$，即 $\gamma \leqslant 4/19$。但 $\varepsilon = 1$ 蕴含了局中人 2 在状态 2 处选择 g_2（她的第一次行动）所得到的期望支付是 9，而她在状态 2 处选择 f_2 所得到的期望支付是 5。因此，当 $\varepsilon = 1$ 时，局中人 2 在状态 2 处的序贯理性要求 $\gamma = 1$。因为 $\gamma = 1$ 与 $\gamma \leqslant 4/19$ 不能同时成立，所以在 1 的状态 3 处不存在支撑为 $\{g_3\}$ 的序贯均衡。

接着试探在1的状态3处序贯均衡的支撑为 $\{f_3\}$ 这一假设；故 $\varepsilon=0$。那么，局中人1在状态3处的序贯理性要求 $3\delta+8(1-\delta)\leqslant 4$。这个不等式意味着 $0.8\leqslant\sigma=19\gamma/(19\gamma+1)$；故 $\gamma\geqslant 4/19$。但 $\varepsilon=0$ 蕴含了局中人2在状态2 180
处选择 g_2 所得到的期望支付是4，而她在状态2处选择 f_2 所得到的期望支付是5。因此，当 $\varepsilon=0$ 时，局中人2在状态2处的序贯理性要求 $\gamma=0$。由于 $\gamma=0$ 与 $\gamma\geqslant 4/19$ 不可能同时成立，所以，在1的状态3处不存在支撑为 $\{f_3\}$ 的序贯均衡。

余下唯一的可能性是，在状态3处序贯均衡的支撑为 $\{g_3, f_3\}$，故 $0<\varepsilon<1$。于是，局中人1在状态3处的序贯理性要求 $3\delta+8(1-\delta)=4$，否则，他将不会乐意于在 g_3 与 f_3 之间随机化。由于一致信念的要求，这意味着 $0.8=\delta=19\gamma/(19\gamma+1)$，故 $\gamma=4/19$。因此，可以预期局中人2在状态2处一定会在 f 与 g 之间随机化（她的第一次行动）。局中人2在状态2处选择 g_2 所得到的期望支付是 $9\varepsilon+4(1-\varepsilon)$，而她在状态2处选择 f_2 所得到的期望支付是5，因此，局中人2在状态2处的序贯理性要求 $5=9\varepsilon+4(1-\varepsilon)$，故 $\varepsilon=0.2$。至此，只留下局中人1在状态1的行动有待确定了。若他选择 f_1*，则他得到0；但若他选择 g_1，则由 $\alpha=.95$，$\gamma=4/19$，$\varepsilon=.2$ 及 $\zeta=0$，他的期望支付相应为

$$.95\times(4/19)\times.2\times3+.95\times(4/19)\times.8\times4+.95\times(15/19)\times(-1)+.05\times.2\times8+.05\times.8\times4=0.25$$

因为 $0.25>0$，故局中人1在状态1处的序贯理性要求 $\beta=1$。也就是说，在这个博弈唯一的序贯均衡中，局中人1在其第一次行动处应该是慷慨的。

现在考虑局方案 $([f_1],[f_2],[f_3],[f_4])$，这时，每个局中人在任一信息状态总是自私的，故 $\beta=\gamma=\varepsilon=\zeta=0$。如果从这个博弈中剔除机会结点及跟随下面0.05-概率枝后的所有结点和所有枝，则此方案是唯一的序贯均衡局方案。也就是说，如果局中人2只以自己的期望支付为依据来选择自私或慷慨是共同知识，那么，在序贯均衡中决不会有人慷慨大度。此外，$([f_1],[f_2],[f_3],[f_4])$ 是图4·9所给定的实际博弈的一个行为策略均衡，并且甚至能被扩张成一个弱序贯均衡；但它不能被扩张成这个博弈的一个（完全）序贯均衡。例如，通过令信念概率 α 和 δ 都为 .95，则能使这个局方案成为在所有信息状态处都满足序贯理性要求的一个弱序贯均衡。不过，这个信念概率 δ 181
$=.95$ 与局方案 $([f_1],[f_2],[f_3],[f_4])$（在完全意义上）是不一致的。这是因为，如果可以预期局中人2在状态2是自私的（$\gamma=0$），那么在局中人1选择了慷慨而又没有得到局中人2的自私反应后，他在状态3会推断2不可能自私，故 δ 必为0。但在 $\delta=0$ 的情况下，由于局中人1在状态3以概率 $1-\delta=$

---

* 原文误为 s_1——译者注。

1 慷慨（g_3）可使他得到支付 8，所以他在状态 3 自私（f_3）是非理性行动。

这个例子说明这样一个事实，即很小的初始怀疑对于多阶段博弈中理性局中人的行为可能会有重大的影响。如果局中人 1 对局中人 2 的自私品性没有任何怀疑，那么，不断自私会是唯一的序贯均衡。但是，当局中人 1 对局中人 2 的那种本性正直的人受任何慷慨活动都予以回报这一事件赋予即使很小的正概率 .05 是博弈开始时的共同知识，则局中人 1 在此博弈的唯一序贯均衡中必定至少有一次以概率 1 慷慨。其本质思想是，即使局中人 2 不具有这种本性正直性，但她仍可能回报慷慨以此鼓励局中人 1 对她未来会继续慷慨这个事件赋予较高的概率。不过，她这样做的动机依赖于局中人 1 关于她的类型这一方面至少有某种初始不确定性这一假设。这样很小的初始不确定性在长期关系中的关键作用已在其他一些重要的经济学例子中研究过［参看克雷普斯、米尔格龙、罗伯茨（Roberts）及威尔逊，1982］。

作为第二个例子，考虑图 4·10 中的博弈。为了刻划此博弈的序贯均衡，令 α 表示在信息状态 3 的局中人 2 对跟随局中人 1 之行动 x_1 的上结点 2.3 所赋予的信念概率。借助于信息状态 3 的这些信念，局中人 2 的条件期望支付是，若她选择 e_3 则为 $8\alpha+0(1-\alpha)$；若她选择 f_3 则为 $7\alpha+7(1-\alpha)=7$；若她选择 g_3 则为 $6\alpha+9(1-\alpha)=9-3\alpha$。从而当 $8\alpha\geqslant 7$ 及 $8\alpha\geqslant 9-3\alpha$，即 $\alpha\geqslant 7/8$ 时，行动 e_3 对处于状态 3 的局中人 2 来说是最优的；当 $9-3\alpha\geqslant 8\alpha$ 且 $9-3\alpha\geqslant 7$，即 $\alpha\leqslant 2/3$ 时，行动 g_3 对于局中人 2 来说是最优的。注意到，对处于状态 3 的局中人 2 来说，不存在 α 的值能使 e_3 和 g_3 同时成为最优。因此，序贯均衡在信息状态 3 处的支撑只可能是 $\{e_3\}$，$\{f_3\}$，$\{g_3\}$，$\{e_3, f_3\}$ 及 $\{f_3, g_3\}$。我们按照这个顺序依次考虑其可能性。

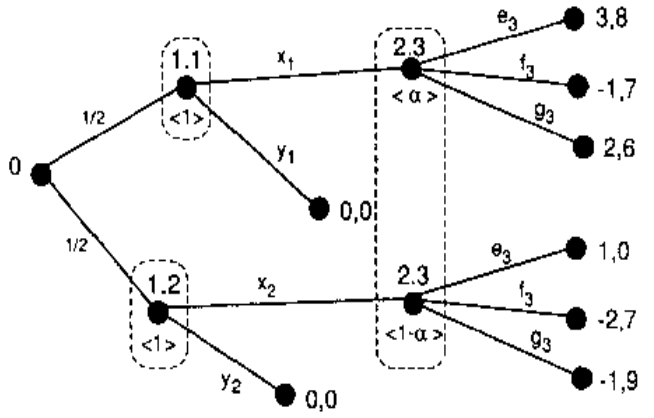

图 4·10

182

如果局中人 2 在状态 3 肯定使用 e_3，那么局中人 1 在状态 1 会选择 x_1，而在状态 2 会选择 x_2。从而与$([x_1], [x_2])$的一致性要求 $\alpha=1/2$；但若 $\alpha=1/2$，则 e_3 对处于状态 3 的局中人来说是非理性的行动（因为 g_3 对她来说更好一些）。因此，在状态 3 处不存在支撑为 $\{e_3\}$ 的序贯均衡。

如果局中人 2 在状态 3 肯定使用 f_3，那么，局中人 1 在状态 1 会选择 y_1，而在状态 2 选择 y_2。由于结点 2.3 的先验概率为 0，所以与$([y_1], [y_2])$的一致性不会对信念概率 α 有什么限制。但是，局中人 2 在信息状态 3 处的序贯理

性要求 $2/3 \leqslant \alpha \leqslant 7/8$，否则她将不会乐意去选择 f_3。因此，行为策略组合 $([y_1], [y_2], [f_3])$ 与任一满足 $2/3 \leqslant \alpha \leqslant 7/8$ 的信念向量一起构成一个序贯均衡。

如果局中人 2 在状态 3 处肯定使用 g_3，那么，局中人 1 在状态 1 会选择 x_1，而在状态 2 选择 y_2，从而与 $([x_1], [y_2])$ 的一致性要求 $\alpha = 1$；但在这种情形下，g_3 对处于状态 3 的局中人 2 来说是一个非理性的行动（e_3 对她来说将会更好）。因此，在状态 3 处不存在支撑为 $\{g_3\}$ 的序贯均衡。

为了使 e_3 与 f_3 之间的一个随机化对处于状态 3 的局中人 2 来说是序贯理性的，信念概率 α 必须等于 7/8（所以 $8\alpha = 7$）。存在两种方法来构造序贯理性的局方案，在这个局方案中，局中人 2 在 e_3 与 f_3 之间随机选择，并且所给 183
信念与此局方案是一致的。一个方法是要局中人 1 在状态 1 选择 y_1 而在状态 2 选择 y_2；于是 2.3 结点有着先验概率 0。为使这样的行动对局中人 1 来说是理性的，e_3 的行动概率就不能大于 1/4，否则，x_1 对处于状态 1 的局中人 1 来说会更好。因此，对于任一满足 $0 \leqslant \beta \leqslant 1/4$ 的 β，行为策略组合 $([y_1], [y_2], \beta [e_3] + (1-\beta) [f_3])$ 与信念概率 $\alpha = 7/8$ 一起构成一个序贯均衡。

另一个使 $\alpha = 7/8$ 与某个局方案一致的方法是让局中人 1 在状态 2 随机行动。在预期局中人 2 在状态 3 处于 e_3 与 f_3 之间随机化时，为了使局中人 1 在状态 2 处乐意在 x_2 与 y_2 之间随化，则 e_3 的行动概率必须恰好等于 2/3。相对于局中人 2 的这一随机策略，局中人 1 在状态 1 肯定选择 x_1。若状态 2 处 x_2 的行动概率是 1/7，则 $\alpha = 1/8$ 与局方案是一致的，因此，行为策略组合 $([x_1], (1/7) [x_2] + (6/7) [y_2], (2/3) [e_3] + (1/3) [f_3])$ 与信念概率 $\alpha = 7/8$ 一起构成一个序贯均衡。

为了使局中人 2 在 f_3 与 g_3 之间随机化，信念概率 α 必须等于 2/3 [故 $7 = 6\alpha + 9(1-\alpha)$]。如果局中人 2 在 f_3 与 g_3 之间随机化，则局中人 1 在状态 2 会选择 y_2。从而唯一能使 $\alpha = 2/3$ 与局方案一致的方法是要局中人 1 在状态 1 也选择 y_1；于是，2.3 结点的先验概率为 0。若局中人 2 使用策略 $(1-\gamma) [f_3] + \gamma [g_3]$，其中 $\gamma \leqslant 1/3$ [故 $0 \geqslant -1 (1-\gamma) + 2\gamma$]，则局中人 1 在状态 1 将乐意选择 y_1。因此，对于任一满足 $0 \leqslant \gamma \leqslant 1/3$ 的 γ，行为策略组合 $([y_1], [y_2], (1-\gamma) [f_3] + \gamma [g_3])$ 与信念概率 $\alpha = 2/3$ 一起构成图 4·10 之博弈的一个序贯均衡。

4.6　子博弈完美均衡

展开型博弈的子博弈完美均衡概念是由塞尔滕（1968，1975，1978）所定义的。这个概念比序贯均衡概念要陈旧些和弱一些，但仍有其重要的应用（特

别是对具有无限纯策略集的一些博弈，它们的序贯均衡之定义至今仍未形成）。

对于 Γ^e 中任一结点 x，令 $F(x)$ 为跟随 x 的所有结点和枝所组成的集，包括 x 本身。如果对 S^* 中的每一个 s，$Y_s \cap F(x) = \emptyset$ 与 $Y_s \subseteq F(x)$ 两者必
184 居其一，则称结点 x 为一个**子根**（subroot）。也就是说，如果 x 是一个子根，那么，在 x 或跟随其后所有结点处行动的任一局中人都知道 x 已经出现了。Γ^e 的一个**子博弈**（subgame）可由 Γ^e 导出，只要剔除不跟随某个子根 x 的所有结点和所有枝，并以结点 x 作为此子博弈的根即可。

令 Γ^e_x 表示在 Γ^e 中从一个子根 x 出发的子博弈，若结点 x 在博弈 Γ^e 的进行中已经发生，则跟随 x 之后行动的局中人都知道他们已身处从 x 出发的子博弈中进行行动了，这是他们中间的共同知识。这就是说，一位博弈论家在结点 x 已发生后要为这个博弈建模的话，那他可以用展开型博弈 Γ^e_x 来描述这个局势之共知结构，并且只要分析这个博弈便可试着去预测局中人的行为。对 Γ^e 中在结点 x 及跟随其后各结点处的局中人来说，其理性行为在子博弈 Γ^e_x 范围内来看也必须是理性的行为。因此，塞尔滕（1965，1975）将 Γ^e 的一个**子博弈完美均衡**（subgame-perfect equilibrium）定义为满足下述条件的 Γ^e 之任一行为策略均衡：对于 Γ^e 的每一个子博弈，将这个行为策略限制在此子博弈中的行为策略也是此子博弈的一个行为策略均衡。

为了理解只考虑子博弈的理由，重温图 2·7（第 2 章）。这个图显示了我们简单摊牌博弈的展开型表示中跟随结点 1.b 的那部分图形，在这个 1.b 结点处局中人 1 持有一张黑色牌而行动。在图 2·7 所示的博弈的任一均衡中，局中人 1 加注的行动概率必定为 0，因为局中人 2 可用对抗这一行动去对付对方的加注而做到更好。另一方面，在简单摊牌博弈唯一的均衡中，局中人 1 在状态 b 加注有着行动概率 1/3，如同图 4·4 所已经指出的那样。然而，简单摊牌博弈的序贯均衡局方案是一个子博弈完美均衡。由于局中人 2 的信息状态 0 在两个结点出现，但只有其中的一个结点包含在图 2·7 中，所以跟随结点 1.b 的那部分博弈树不是一个子博弈。事实上，正如在 2.7 节所讨论过的那样，由于图 2·7 表示局中人 2 知道局中人 1 所持牌是黑色，而 2 关于 1 所持牌之颜色的不确定性，对分析图 4·4 中简单摊牌博弈起关键性作用，所以没有理由要假设图 4·4 的解可应用于图 2·7 所示的博弈。因此，在子博弈完美均衡的定义中，我们只要求一个均衡限制在一个子博弈中的部分应该仍为这个子博弈的一个均衡。该子博弈表示了原博弈的一部分，若它发生了则是共同知识。

不难验证，如果 (σ, π) 是 Γ^e 的任何一个序贯均衡，则 σ 是 Γ^e 的一个子博弈
185 完美均衡。另一方面，子博弈完美均衡集可能比序贯均衡局方案集要大得多。

对于图 4·5 的简单例子，均衡 $([y_1], [y_2])$ 不是子博弈完美的，这是因为，它在局中人 2 的结点出发的子博弈的限制是 $[y_2]$，而 $[y_2]$ 不是这个子博弈的一个均衡。另一方面，考虑图 4·11，它与图 4·5 的差别仅在于其增加了一个虚设的局中人 3，他不具有有价值的信息，也不进行策略抉择。对于这

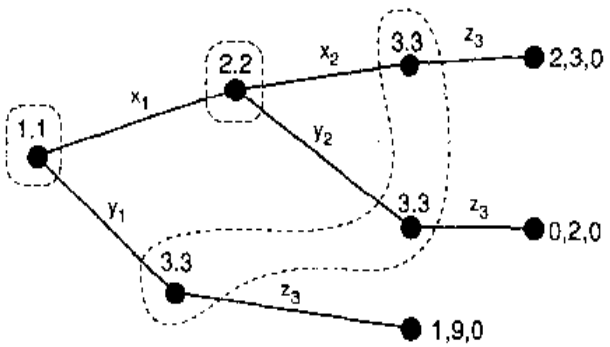

图 4·11

个博弈来说，不存在真正的子博弈（除了这些终结点可被视为单结点的子博弈外，只有原博弈自身），故（$[y_1]$，$[y_2]$，$[z_3]$）是图 4·11 的一个子博弈完美均衡。然而，序贯均衡的概念对于增加这样一个虚拟局中人是不敏感的，从而（$[y_1]$，$[y_2]$ $[z_3]$）不是图 4·11 的一个序贯均衡局方案。

4.7　完美信息博弈

如果在一个展开型博弈中，每个局中人的每个信息状态都恰好只在一个决策结点出现，则这样的展开型博弈是一个**完美信息**（perfect information）博弈。也就是说，Γ^e 是一个完美信息博弈，当且仅当对于每个局中人 i 和 S_i 中每一个信息状态 s，集 Y_s（即 Γ^e 中标号为“$i.s$”的结点集）都恰好只包含一个结点。在这样的完美信息博弈所表示的局势中，每个局中人一次一个行动（从不同时行动），并且每当一个局中人行动时，他知道每个局中人在过去每个决策结点处所观察到及所做的一切。许多娱乐性游戏，诸如国际象棋和跳棋，都是完美信息博弈（另一方面，大多数扑克牌游戏都不具有完美信息）。

如果 Γ^e 是一个完美信息博弈，那么，一个信念向量 π 在 $\times_{s\in S^*}\Delta(Y_s)$ 186
中，当且仅当对于 S^* 中每个 s 和 Y_s 中的每个 x，均有 $\pi_s(x)=1$（由于具有完美信息，$x\in Y_s$ 意味着 $Y_s=\{x\}$）；即唯一可能的信念向量 π 是所有分量皆为 1 的向量。

在完美信息的情况下，博弈中的每个决策结点都是一个子根，故每个子博弈完美均衡是一个序贯均衡局方案。也就是说，对于完美信息博弈来说，子博弈完美均衡的概念与序贯均衡的概念是一致的。

给定任一展开型博弈 Γ^e，我们可以通过在 $\mathbf{R}^{N\times\Omega}$ 中挑选一些支付函数来生成与 Γ^e 只在支付上不同的一个博弈，其中 Ω 是 Γ^e 中所有终结点所组成的集。我们称一个性质**对具有完美信息的所有生成博弈**（for all generic games with perfect information）均成立是指，对每一个展开型完美信息博弈，在 $\mathbf{R}^{N\times\Omega}$ 中总存在一个开的稠密支付函数集，由此生成的与 Γ^e 只在支付上有所不同的所有博弈都满足这个性质。［$\mathbf{R}^{N\times\Omega}$ 中的一个集是**稠密的**（dense），当且仅当 $\mathbf{R}^{N\times\Omega}$ 中的每个向量都是此集中某个向量序列的极限。］

策墨洛（1913）证明了，一个完美信息博弈一定具有纯策略而非随机策略的序贯均衡。进一步而言，正如下述的策墨洛定理之变形所断言的，一个完美信息博弈“几乎总是”具有唯一的一个序贯均衡。（其证明将在 4.11 节中给出。值得注意的是，我们做了一个展开型博弈具有有限个结点的假定。）

定理4.7 若 Γ^e 是一个具有完美信息的展开型博弈，则 Γ^e 至少存在一个纯策略序贯均衡（从而每个行动概率要么是 0 要么是 1）。再则，对具有完美信息的所有生成博弈而言，恰好只有一个序贯均衡。

如果一个博弈具有重复任何一个局势的次数不能超过某个固定次数的规则，则这个博弈可以用展开型有限地描述。国际象棋就是一个具有完美信息的博弈的例子，对它可以应用定理 4.7，故国际象棋存在一个纯策略均衡。又因为国际象棋是一个两人零和博弈，所以应用定理 3.2 可以证明，对它而言，下列 3 个陈述中必恰有一个是正确的：（1）执白棋者存在一个纯策略使得，无论执黑方如何走，白棋保证能胜；（2）执黑棋者存在一个纯策略使得，无论执白
187 方如何走，黑棋保证能胜；（3）无论对方如何走，各方都有一个纯策略来保证己方至少是逼和。从博弈论的角度来说，这只是一个（天文数字般复杂!）通过计算来决定三个陈述中哪一个正确，并刻划这个均衡策略的问题而已。

给定任一策略型博弈 $\hat{\Gamma}=(N,(\hat{C}_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$，$\hat{\Gamma}$ 的一个**斯塔克尔伯格解**（Stackelberg solution）被定义如下：通过将 $\hat{\Gamma}$ 的局中人编排成某个顺序，并且让每个局中人 i 在观察到依这个顺序排在他前面的所有局中人的行动之后在 $\hat{C}_i$ 中选择一个行动，由此而得到一个具有完美信息的展开型博弈，其任一子博弈完美均衡都是一个斯塔克尔伯格解。在这个顺序中第一个行动的局中人被称为**斯塔克尔伯格主导者**（stackelberg leader）。一般地，由于有多种方式对局中人排序，所以对任一给定策略型博弈，总有很多斯塔克尔伯格解，一种排序方式对应一个解，并且定理 4.7 保证了，每种排序方式至少有一个纯策略的斯塔克尔伯格解。

例如，考虑表 4-2 中的两人博弈。在局中人 1 为主导者的斯塔克尔伯克解

表 4-2 **一个策略型博弈**

$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$	
	x_2	y_2
x_1	2，1	3，2
y_1	1，4	4，3

中，局中人 2 的策略是，若 1 选择 x_1 则选择 y_2，而若 1 选择 y_1 则选择 x_2；从而，局中人 1 的策略是要选择 x_1，故期望支付配置是（3，2）。而在局中人 2 为主导者的斯塔克尔伯格解中，局中人 1 的策略是，若 2 选择 x_2 则选择 x_1，

而若 2 选择 y_2 则选择 y_1；从而局中人 2 的策略是要选择 y_2，故期望支付配置是（4，3）。所谓的斯塔克尔伯格主导者并不一定具有优越性。事实上，对于这个博弈来说，局中人 2 是偏好成为斯塔克尔伯格主导者的，但局中人 1 却宁可 2 是斯塔克尔伯格主导者而不是由他自己去主导。

4.8　添加小概率机会事件

再次回顾图 4·5 中的简单例子。在这个博弈中，（[y_1]，[y_2]）是一个均衡，但它不能被扩张成一个序贯均衡。对于通过对支付的小扰动（只要没有一个终结 188
点的支付变动会大于 0.5）而由图 4·5* 所导出的所有博弈来说，这个事实仍然是正确的，在这种意义上，这个事实是稳固的（即具有鲁棒性）。然而，正如富登伯格、克雷普斯及莱文（1988）曾指出的那样，通过添加一些任意小概率的机会事件来扰动或变换博弈，则序贯均衡集可以有非常显著的变化。

例如，设 ε 是任意小的正数并考虑图 4·12，则在这个例子中，（[y_1]，[y_2]）能被扩张一个序贯均衡，其中的信念向量是这样的：若局中人 2 有机会行动，则她对下面那个 2.2 结点赋予概率 1。因此，通过添加对局中人行动无关紧要的小概率事件，我们可以把图 4·5 中的博弈变换为其所有均衡均为序贯均衡的博弈。一般地，这种形式的变换可以用来增大任一博弈的序贯均衡集，使得变换后的博弈包括了原博弈的任一或所有均衡。

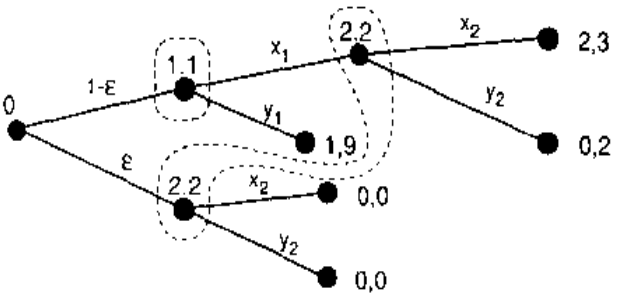

图 4·12

因而，序贯均衡的概念对博弈的结构中引入新的小概率机会事件是非常灵敏的。这种灵敏性之所以出现是因为，序贯均衡要求在零概率事件后的局中人的信念应该被限于与给定博弈结构一致的那些信念。将这些新枝添加到博弈树中，即使它们都是一些概率非常小的机会事件，但这可能显著地扩大了能通过这种一致性检验的信念集。

对此换个方式来讲，当我们把一个冲突局势模型化为一个展开型博弈时，为简单起见，可能会把某些看起来只有非常小概率的可能机会事件排除在博弈模型之外。但若我们真要做这种模型简化时，我们应该清醒地知道，这有可能会对序贯均衡集产生重大的影响。忽略小概率事件（在序贯均衡解概念下）等 189

* 原文误为图 4·3——译者注。

价于做了这样的假设，即只要在保留下来的博弈结构的范围内另有解释其观察的方法（譬如，用推断其余局中人已犯了非理性错误来解释），否则，局中人决不会修改他们对这个事件所指定的显著性概率的信念。

贯穿本章，我们已假定，对每个机会结点处的每个选择都指定严格正的概率。根据上述评注，简略地考虑一下去掉这个假设下应如何定义序贯均衡的问题是有价值的。例如，在图 4·12 中，当 $\varepsilon=0$ 时，是否应该接受（$[y_1]$，$[y_2]$）与下面 2.2 结点处的信念概率 1 一起作为一个序贯均衡呢？如果接受，那我们应把 $\varepsilon=0$ 时的图 4·12 看作是与图 4·5 不同的一个博弈来处理，尽管它们之间的差别只在于一个零概率机会事件。另一方面，如果不接受，那么当 ε 趋近于 0 时，在序贯均衡集中就存在下间断性。

一种把序贯均衡集延拓到在机会结点处具有零概率选择之博弈的自然而然的方式可定义如下。首先，通过虚拟在每个终结点处都得到支付 0 的另一个“机会”局中人来修改博弈，并对各个不同的机会结点指定各不相同的一个信息状态（从而每当这个虚拟局中人行动时，“机会”具有完美信息）。然后，原博弈的一个序贯均衡可被定义为修改后博弈的任何一个这样的序贯均衡，其中机会的行为策略是按照原博弈中每个机会结点处所给定的概率随机化的。借助于这个定义，可以证明，除了其终结点处的支付和机会概率外，当关于展开型博弈的其它一切都已确定时，则这个博弈的序贯均衡集将上半连续地依赖于这些支付和机会概率。

因此，即使 $\varepsilon=0$，（$[y_1]$，$[y_2]$）与下面 2.2 结点处信念概率 1 一起构成图 4·12 所示博弈的一个序贯均衡。$\varepsilon=0$ 时的图 4·12 与图 4·5 之间的差别可以通过区分**不可能**（impossible）事件与**零概率**（zero-probability）事件来判断。如果一个理性参与人可以在某些局中人做出了被设想只有零概率的行动之后而推断这个事件有着正的概率，那这个机会事件就不是不可能事件。在 $\varepsilon=0$ 时的图 4·12 中，局中人 2 可以有机会做与支付无关的行动这一事件是零概率事件，但不是不可能事件；而在图 4·5 所描述的博弈中，它是一个不可能事件。

190 不可能事件与零概率事件之间的这一差别对于整个序贯均衡的概念来说，实际上是根本性的。为了看出其原因，考虑图 4·13 中的简单例子。这个博弈唯一的序贯均衡局方案是（$[y_1]$，$[y_2]$）。在这个博弈中，还有局中人 2 可以使用随机策略（只要 x_2 的行动概率不大于 1/2）的另外一个均衡，但决不会有局中人 1 以正概率使用 x_1 的均衡。因此，如果我们接受序贯均衡或纳什均衡作为上解的概念，那我们必须断定局中人 1 选择 x_1 这个事件有着零概率。但能否进一步断定它是不可能事件呢？亦即能否断言“在此博弈中，局中人 1 选择 x_1”这一陈述肯定是错的呢？如果能，则因为（由基本的逻辑规则）在前提错误下的任何内涵都是正确的，所以“若在此博弈中局中人 1 选择 x_1，则局中人 2 将选择 x_2”这一陈述应该是正确的。但是，如果局中人 1 选择 x_1 蕴含着局中人 2 选择 x_2，那么 1 会理性地选择 x_1 而不是 y_1［至于有关的例子

和哲学讨论，参见比奇尔里（Bicchieri，1989）]。

为了避免这个逻辑上的矛盾，我们必须在局中人 1 选择其行动之前承认，1 将非理性地选择 x_1 这个事件不是不可能的，而只不过是一个零概率的可能事件。一般地，在任一理性的局中人行动之前，我们必须假定他将犯非理性错误这一事件是一个可能的零概率事件。基于这种思想，在第 5 章将展开均衡概念的进一步精炼，其方法是，首先考虑一些被扰动的博弈，其中这种非理性的概率很小但为正，然后令这些错误概率趋于 0 并取极限，从而得到原博弈的均衡。

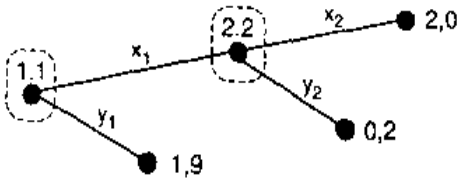

图 4·13

4.9　前向归纳法

序贯理性和子博弈完美性都是分析展开型博弈的**后向归纳**（backward induction）原则，因为它们要求任何有关局中人在博弈结束时的行为的预测，都应该能 191
被局中人在博弈初期事先预料到。相反，科尔伯格和默顿斯（1986）提出了与之不同的**前向归纳**（forward induction）原则，同样可用于对展开型博弈的分析。

前向归纳原则认为，在子博弈中，理性智能局中人的行为可能依赖于子博弈之前的那部分博弈中可为其所用的选择。例如，考虑图 4·14 中的博弈。这个博弈有 3 个序贯均衡局方案：（$[a_1]$，$[y_1]$，$[y_2]$），（$[a_1]$，$.8\,[x_1]+.2\,[y_1]$，$(3/8)\,[x_2]+(5/8)\,[y_2]$）及（$[b_1]$，$[x_1]$，$[x_2]$）。然而，前向归纳法的论点可以剔除这 3 个均衡中的前两个。在从 1.1 结点开始的子博弈中，这三个均衡中只有一个均衡给局中人 1 的支付不小于他在此子博弈之前选择 a_1 所能得到的支付。因此，科尔伯格和默顿斯提出，局中人 2 应该能够推断出，如果局中人 1 希望在这个子博弈中实现（x_1，x_2）均衡，那么他只有选择 b_1 且使这个子博弈发生。于是，局中人 2 在这个子博弈中应该采用 x_2（她

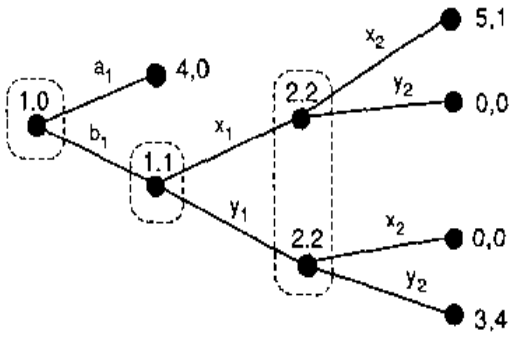

图 4·14

对 x_1 唯一的最佳反应)。如果可以预期局中人 2 是以这种方式推理的话，那局中人 1 应该使用策略 b_1x_1。

这个论证的本质要点在于，其余局中人能从在 x_1 与 y_1 之间做决策的局中人就是刚刚选了 b_1 而放弃 a_1 的那个局中人这一事实，推断出 1.1 结点处的行动。因此，为了一般性地分析论述这种前向归纳论证，我们应该考虑正规表示，而不是多代理人表示。在我们对这个例子这样处理时，我们发现 b_1y_1 是
192 局中人 1 在正规表示中的一个强劣策略，因为它只能给他低于其从 a_1 所能得到的支付。但在这个博弈的多代理人表示中，不存在劣策略。

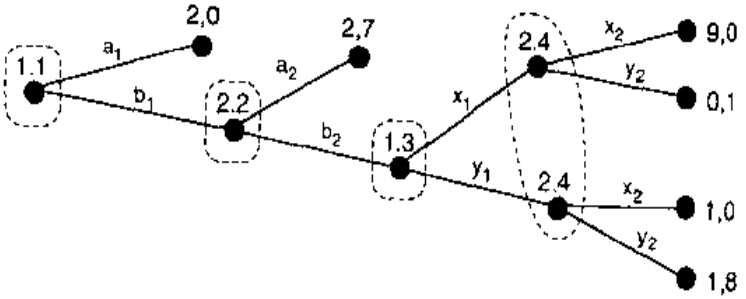

图 4·15

不幸的是，某些自然的前向归纳论证与另外一些自然的后向归纳论证可能是不相容的。例如，考虑图 4·15 中的博弈。局中人 2 在决策结点 2.2 应预期做什么呢？前向归纳论证或许认为，因为 b_1y_1 是局中人 1 的弱劣策略，局中人 2 会预期，若局中人 1 在状态 1 选择 b_1 则他在状态 3 会选择 x_1，所以她应该选择 a_2。但另一方面，后向归纳法确定了唯一的一个子博弈完美均衡 ($[a_1]$, $[b_2]$, $[y_1]$, $[y_2]$)，其中局中人 2 在 2.2 结点处选择 b_2。事实上，这个博弈的简约正规表示（表 4－3）是因重复剔除弱劣策略会依赖于剔除顺序而可能导致不同结果这一类博弈的一个例子。展开型博弈的后向归纳法与正规表示中对应的重复剔除弱劣策略所用的顺序是：首先剔除局中人 2 的策略 b_2x_2，其次剔除局中人 1 的策略 b_1x_1，然后剔除 2 的 a_2·，最后剔除 1 的
193 b_1y_1，留下均衡为 $(a_1\cdot, b_2y_2)$。前向归纳法对应的重复剔除弱劣策略的顺序是：首先剔除局中人 1 的策略 b_1y_1，再剔除局中人 2 的策略 b_2x_2 和 b_2y_2，留下的均衡为 $(a_1\cdot, a_2\cdot)$ 和 $(b_1x_1, a_2\cdot)$。

表 4－3　　一个策略型博弈：图 4·15 的简约正规表示

C_1	C_2		
	a_2·	b_2x_2	b_2y_2
a_1·	2，0	2，0	2，0
b_1x_1	2，7	9，0	0，1
b_1y_1	2，7	1，0	1，8

格拉泽和韦斯（Glazer and Weiss，1990）、范·达米（Van Damme，1989）及本－波拉思和德克尔（Ben-poratl and Dekeel，1987）都已经讨论了大量的因使用前向归纳法而导致引入注目的结论的例子。他们的讨论大多都利用了科尔伯格和默顿斯（1986）所提出的均衡稳定集的概念（参看5.6节），但某些例子可以只用重复剔除弱劣策略的方法进行分析即可。

例如，范·达米（1989）提出了性别之战博弈（表3－5）的下述变形：在每个局中人决定去购物中心还是去看足球比赛之前，局中人1有机会当众烧掉一美元（或者某个对他值一个效用单位的东西）。这个博弈的展开型表示如图4.16所示，其中 b_1 表示烧掉一美元的行动，而 a_1 表示没有烧。于是（删掉局中人1不按照第一阶段中其策略所规定那样去做的无关行动，并且命名局中人2的策略使其第一个字母表示1没有烧一美元时2将使用的行动），这个博弈 194
的纯简约正规表示如表4－4所示。

表4－4　　局中人1具有烧掉一美元选择权的策略型性别之战

	C_2			
C_1	f_2f_2	f_2s_2	s_2f_2	s_2s_2
a_1f_1	3，1	3，1	0，0	0，0
a_1s_1	0，0	0，0	1，3	1，3
b_1f_1	2，1	−1，0	2，1	1，0
b_1s_1	−1，0	0，3	−1，0	0，3

这个博弈有许多展开型和策略型的纳什均衡。然而，重复剔除正规表示中的弱劣策略排除了除（a_1f_1，f_2f_2）之外的所有均衡，且（a_1f_1，f_2f_2）是局中人1的最优均衡。b_1s_1 是局中人1的强劣策略，但一旦剔除了这个策略，则 f_2s_2 和 s_2s_2 又成为局中人2的弱劣策略。只要剔除了这三个策略，则 a_1s_1 又成为局中人1的弱劣策略。随后在 a_1s_1 也被剔除后，s_2f_2 成为局中

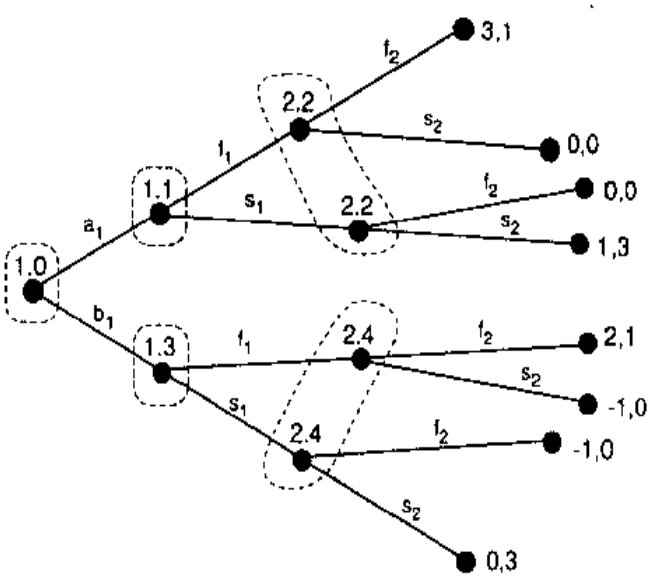

图　4·16

* 原文误为 a_1f_2——译者注。

人2的弱劣策略。再剔除s_2f_2，便只留下局中人2唯一的策略f_2f_2，而$a_1f_1^*$正是局中人1对f_2f_2唯一的最佳反应。

这个重复剔除过程的前两步，对应于下述的前向归纳论证。如果局中人1烧掉了一美元，那么局中人2要对他的这一行动寻找一个合理的解释。对于局中人1来说，烧掉一美元只有在他认为这个行动会引导局中人2去看足球比赛（策略s_2f_2）时，才可能是最优的；而在这时，1只有按照策略b_1f_1去看足球比赛，才使自己受益。从而在剔除策略b_1s_1后，局中人2应该把烧掉一美元视为局中人1将去看足球比赛的一个信号。但是，如果局中人1知道局中人2会根据这个前向归纳论证来解释其烧掉一美元的行动，那么1不烧一美元而去购物中心的行动是非理性的；因此，即使局中人1没有烧掉一美元，局中人2也不应该预期他会去购物中心。

局中人1当众烧掉一美元这个无用的选择能让他得到他最喜欢的结果，这一结论是如此地引人注目，以至可能对重复剔除正规表示中弱劣策略作为一个
195 解概念的正确性产生了怀疑。作为对比，让我们考虑对局中人2来说最好但在这个前向归纳中被剔除的均衡（a_1s_1，s_2s_2）。

在这个展开型博弈之与均衡（a_1s_1，s_2s_2）相对应的序贯均衡中，无论局中人1是否烧掉一美元，局中人2都将去购物中心；因此局中人1不烧一美元而去购物中心，而且即使他烧掉了一美元亦仍然会去购物中心。就这个序贯均衡的角度来看，如果局中人1烧掉一美元，那么这个行动只能被局中人2理解为一个非理性错误，对于预测1的未来行动没有实质的意义或重要性。在任一序贯均衡中，每个局中人都隐含地应用这一保守的假设，即使其余局中人在过去曾犯过错误，但他们在未来都将以概率1理性地行动。因此，在这个序贯均衡中，即使局中人1烧掉一美元，但由于（s_1，s_2）是保留下来的子博弈中的均衡，所以局中人2仍会预期1将与她一起去购物中心。当然，如果局中人2是以这种方式对1烧掉一美元的行动做出反应的，那么对于局中人1来说，烧掉一美元的确是一个非理性且毫无意义的错误，并在此均衡中具有零概率。从而，这个均衡是序贯理性的。

在这个博弈的任一给定结点，前向归纳法规定，如果一个局中人关于其余局中人的策略的信念使得所观察到这些局中人之过去行动都是理性的，则他应该接受这种信念。因此，前向归纳论证不利于（a_1s_1，s_1s_2）的原因在于，如果局中人1烧掉了一美元，则局中人2会力图为所观测到的他这一行动找出某个合理的解释，而且唯一可能的解释是，他努力要她去看足球比赛而烧掉一美元，如同均衡（b_1f_1，s_2f_2）之下所出现的情况。然而，前向归纳法的再一次应用又会剔除这样一个均衡。因为若局中人在（b_1f_1，s_2f_2）这个均衡中犯了不烧一美元的错误，则局中人2只有假设他没有烧一美元是由于他预期她会去看足球比赛而不需要烧，这才能解释他的这个行为，如同（a_1f_1，f_2f_2）均衡的一部分一样。这样一来，我们必须对局中人2应该能在这个博弈的所有部分

解释或理性化局中人 1 的行为这一基本假定表示怀疑。尽管 a_1 和 b_1 各自都可以用这个博弈各种不同的子博弈完美均衡来理性化，但在每个子博弈完美均衡中，至少存在局中人 1 的一个零概率的行动（a_1 或 b_1），在它发生时，局中人 2 应该将其解释为一个非理性的错误。

4.10　投票与二元议程

对序贯投票博弈的分析，是子博弈完美性和重复剔除弱劣策略思想的一个 196
重要应用领域。本节对投票和二元议程分析中的某些基本结论给出简要介绍。由于本节的结论在本书的其他部分不再使用，所以，跳过本节仍不失连续性。

作为一个简单的入门性例子，假设一个由 9 人组成的委员会必须对标号为 1、2、3、4 的四个方案进行选择。其中，有三个人认为 1 是最好方案，2 次之，4 再次之，而 3 是最差方案；另有三个人认为 2 是最好方案，3 次之，4 是第三选择，而 1 是最差方案；其余三人则认为 3 是最好方案，1 次之，4 再次之，而 2 是最差方案。

假设在这个委员会中，任何一个问题必须由多数裁定原则来决定。对任意两个方案 α 和 β，当且仅当委员会中过半数的委员偏好 α 胜于 β 时，我们才说 α **可击败**（canbeat）β，并记作 $\alpha > \beta$。因而，对于本例，我们有

$$1>2,\ 2>3,\ 3>1,\ 1>4,\ 2>4,\ 3>4$$

注意，方案 4 可被其余任一方案所击败，但方案 1、2、3 却形成一个循环，其中每个方案都可以被另外两个方案之一击败。

现在，假设委员会主席计划通过对一系列问题投票来组织委员会的投票决策过程，其中每个问题都只有两个可能的回答。我们将委员会主席提问题的计划称为他的**议程**（agenda），并且假定在会议开始时，议程是委员会成员中间的共同知识。

例如，议程可能是如下所述。第一个问题是，在被考虑的可行方案 1 和 2 中，哪一个方案应该被剔除；然后，若用 α 表示 {1，2} 中在第一阶段未被剔除的方案，那第二个问题将是，剔除这个方案 α 还是剔除方案 3？第 3 个也是最后一个问题是，在方案 4 与另一个保留下来的方案（α 或 3）之间选择哪一个？

让我们假设每个委员的偏好是共同知识。根据这个议程，每个投票人都认识到在第二阶段幸存下来的方案将在第三阶段击败方案 4 并因此而成为最终被 197
选中的方案。于是，如果第二次投票是在方案 2 与 3 之间选择，那么由于 2>3，故方案 3 将被剔除而方案 2 会被选中。但如果第二次投票是在方案 1 与 3 之间选择，则由于 3>1，故方案 1 将被剔除而方案 3 会被选中。这样一来，

如果方案1在第一阶段被剔除，则第二次投票是在2与3之间选择，从而2将被选中。但如果方案2在第一阶段被剔除，则第二次投票是在1与3之间进行，从而3将被选中。由于2>3，所以多数委员在第一阶段应该投票剔除方案1，故最终所选中的方案将是2（而不是方案3）。值得一提的是，尽管实际上大多数委员偏好方案1胜于方案2，这是事实，但多数委员会在第一阶段剔除1而不是2，这是因为，我们假定了投票人都足够地老练或智能，他们知道剔除2将导致3成为最后的选择，而不是1。

委员会将选中方案2这一结果，关键是依赖于这一特定的议程。例如，如果把以上考虑方案的顺序颠倒过来（即第一个问题是剔除4还是3，第二个问题是剔除2还是剔除第一阶段投票后保留下来的方案，第三个问题是选取1还是第二次投票后保留下来的方案），那么，成熟的投票最后所选中的结果将是方案3。也存在其他的议程使得方案1会是最后所选中的结果。不过，就所给定的偏好来说，由于在最后阶段，任何一个方案都将击败4，所以，没有一个议程会导致最终的选择是方案4。

现在，让我们定义一个一般的委员会投票模型，令 K 表示一个非空有限的社会选择方案集，委员会最终必须从中选取一个。$\alpha>\beta$ 是指过半数的委员偏好 α 胜于 β。假设委员会的成员人数是奇数，并且每个委员在社会方案集 K 上有一个严格的偏好顺序，因此，对于 K 中任意一对不同的选择 α 和 β：

要么 $\alpha>\beta$，　要么 $\beta>\alpha$，　但两者不能同时成立。

（注意，这个择多偏好关系>不一定是传递序，正如上述例子中所说明的那样。）我们假定这个大多数规则的偏好关系对委员会的所有成员来说，都是共同知识。

198 K 的一个**二元议程**（binary agenda）可被定义（利用2.1节的图论术语）为由一个有限的根树与函数 G 所构成，G 对这棵树中的每个结点 x 都指定了一个非空集 $G(x)$，且满足如下3个性质：(1) 设 x_0 表示树的根，则 $G(x_0)$ 必须等于 K；(2) 每个非终点 x 必须恰有此树中的两个结点直接限随，并且若 y 和 z 是这两个直接跟随结点 x 的结点，则 $G(x)=G(y)\cup G(z)$ [集 $G(y)$ 与 $G(z)$ 未必不相交]；(3) 对于每个终结点 w，$G(w)$ 都必须是恰好包含 K 中一个选择方案的集合。

委员会的相继投票通过这种议程树将决定从根出发的一条路径。当这条路径到达结点 x 时，$G(x)$ 表示尚有待委员会考虑挑选的方案集。如果 y 和 z 都是直接跟随结点 x 的结点，那么，在结点 x 处，下一个问题就是通过一次投票决定："目前所考虑的方案集是应该被缩减为 $G(y)$ 还是 $G(z)$?" 我们要求 $G(y)$ 与 $G(z)$ 的并集必须等于 $G(x)$，因为这个问题不应该在换一种表达方式时就自动剔除了其中某些选择；只有在大多数委员投票同意时，才能剔除某个选择。相继投票直至终结点为止，这时，只留下一个选择可供考虑。我

们假定委员会主席所计划的议程在投票过程开始时，必须是委员会所有成员中间的共同知识。

这样一个议程的**完善投票解**（sophisticated voting solution）是对议程树上每个结点 x 选择一个方案 $\phi(x)$ 的映射 ϕ，且满足如下 2 个性质：(1) 对任一结点 x，$\phi(x) \in G(x)$；(2) 对任一非终结点 x，若 y 和 z 表示直接跟随 x 的两个结点，且 $\phi(y) > \phi(z)$ 或 $\phi(y) = \phi(z)$，则 $\phi(x) = \phi(y)$。这就是说，完善投票解告诉了我们，当议程从结点 x 处开始投票的，最终会选中哪一个选择 $\phi(x)$。在每一轮投票中，多数委员将通过选出他们偏好的那个选择，而且使议程到达这个直接跟随结点。

给定这个择多偏好关系 $>$，则任何一个这样的二元议程都存在唯一的一个完美投票解。我们可以通过对议程树逆向搜索一遍轻而易举地求出这个完善投票解。事实上，只要从终结点出发［此处 $G(x) = |\phi(x)|$］，并利用如下事实：如果 y 和 z 都直接跟随 x，则 $\phi(x)$ 一定是 $|\phi(y), \phi(z)|$ 中多数委员所偏好的那个选择，并逆向倒推即可。由这个完善投票解在议程树的根处所选 199
出的选择，就是该议程的**完善结果**（sophisticated outcome）。

假设在委员会的各个成员都知道了前面每轮的投票结果之后，他们对摆在面前的问题总是同时而又独立地进行投票。因而，二元议程的每个结点实际上都表示了潜在的一个展开型博弈的整个结点集。在这个博弈中，每个局中人在这个议程树的每个结点 x 都有不同的信息状态，并且在这个信息状态处有两个可能的行动，每个行动是对议程树中直接跟随结点 x 的两个选择之一投赞成票。在议程树中的结点 x 之后，下一个行动将到达过半数投票赞成的那个选择。

根据这种识别方法，不难证明，一个完善投票解对应于这个潜在的展开型博弈的一个子博弈完美（且序贯）均衡。然而，同样还有其它的子博弈完美均衡。在前面的例子中，每个局中人总是都对选择 1 投赞成票也是一个子博弈完美均衡。给定其余 8 个委员预期都会对选择 1 投赞成票时，这个委员是不可能靠自己的票来改变这个结局的，所以，即使选择 1 是这个委员最不喜欢的选择，对选择 1 投赞成票也是他的最优行动。

但是，可以证明［参见法夸尔森（Farquharson），1969；莫林，1979］，除完善投票解之外的所有均衡，不论是正规表示还是多代理人表示，都能够通过重复剔除弱劣策略予以剔除。为了看出其理由，首先假设 x 是一个非终结点，而 y 和 z 是直接跟随 x 的两个终结点，且 $G(y) = |\alpha|$ 和 $G(z) = |\beta|$。考虑严格偏好 α 胜于 β 的一个委员，如果他在 x 处的投票会对结果产生决定性影响的话，那他投票赞成 β 会使结果从 α 变成了 β，从而只能使状况更差。因此，他在 x 处对 β 投赞成票的任一策略都由对 α 投赞成票的策略而为弱劣的策略（保持其余所有行动不变）。在所有这些弱劣策略都被剔除之后，由于每个委员在 x 处都一定是对 $|\alpha, \beta|$ 中他实际喜欢的那个选择投赞成票，所以，结点 x

处的结果一定是 $\{\alpha, \beta\}$ 中多数委员所偏好的选择 $\phi(x)$。但另一方面，就分析留下的博弈的目的来说，我们可以把结点 x 视为选出了选择 $\phi(x)$ 的一个终结点处理，并继续用后向归纳法进行论证。

200 给定 K 上的择多偏好关系 $\succ$，K 的**顶循环**（top cycle）［或**孔多塞集**（Condorcet set）］被定义为 K 的最小非空子集 K^*，使得对于 K^* 中的每个 α 和 $K \setminus K^*$ 中的每个 β，均有 $\alpha \succ \beta$［参见米勒（Miller，1977，1980）］。等价地说，选择 α 属于顶循环 K^*，当且仅当对于 K 中的每个选择 β，若 $\beta \neq \alpha$，则存在某个有限的选择序列 $(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 使得

$$\gamma_m = \beta, \quad \alpha \succ \gamma_1 \quad 及 \quad \gamma_j \succ \gamma_{j+1}, \quad \forall j \in \{1, \cdots, m-1\}$$

我们称 $(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 这样的一个序列为从 α 到 β 的一条**链**（chain）。也就是说，从 α 到 β 的一条链就是 K 中的一个有限选择序列，使得 α 可击败这个序列中的第一个选择，β 是这个序列的最后一个选择，并且这个序列中的每个选择都可以击败其后面的一个选择（若 α 自身可以击败 β，则令 $m=1$ 可使这个定义被满足）。因此，对于本节最初开始所讨论的例子来说，方案 1、2 及 3 都在顶循环中，而方案 4 则不属于顶循环。在这个例子中，方案 1 可直接击败方案 2 和 4，并且有一条长度为 2 的链（2，3）可从方案 1 到方案 3。

一旦一个议程确定之后，完善投票解便是唯一的，但可实现的二元议程却有广泛的可能性。事实上，对所有这些可能的二元议程来说，其完善结果所组成的集恰好就是顶循环。也就是说，我们有米勒（1977）给出的如下定理［也可参见莫林（1986，1988）］。

定理4.8 *给定选择集 K 和择多偏好关系 $\succ$，对于 K 中任一选择 α，存在一个以 α 为完善结果的二元议程的充要条件是 α 属于 K 的顶循环。*

证明 首先，我们证明二元议程的完善结果必然属于顶循环。如果结点 x 的直接跟随结点是 y 和 z，并且 $\phi(y)$ 在顶循环内，那么 $\phi(x)$ 也一定在顶循环内。这是因为，若 $\phi(x)$ 不等于 $\phi(y)$，则 $\phi(x)=\phi(z)\succ\phi(y)$，从而唯一的可能只有 $\phi(z)$ 也属于顶循环（回顾，顶循环中的任一选择都可以击败不在其中的任一选择）。因此，如果 $\phi(y)$ 在顶循环内，则完善投票解在议程树中 y 前面的每个结点处，都一定挑选属于顶循环的一个选择。再则，因为顶循环是 K 的一个非空子集，且 K 是根处所考虑的选择集，所以必须至少存在
201 一个终结点，它被指定为顶循环中的一个结果。于是，这个议程根处的完善结果必定属于顶循环。

现在，我们来对所考虑的集中的选择个数，利用归纳法证明顶循环中的任一选择都是某个二元议程的完善结果。如果只有两个选择，则由于顶循环中只包含多数委员所偏好的那个选择，所以结论显然成立。于是，归纳假设当所考虑的选择个数小于或等于 l 时，定理成立，且令 K 是任一具有 $l+1$ 个选择的

集。令 α 为 K 的顶循环中任一选择，定义从 α 到任一其它选择 β 的**距离**（distance）为从 α 到 β 的一条最短链的长度（若 α 自身可击败 β，则从 α 到 β 的距离为 1）。设 β 表示从 α 到 K 除 α 外所有选择中距离最远的那个选择，且用 $(\gamma_1, \cdots \gamma_m)$ 表示从 α 到 β 的一条长度最短的链，使得

$$\alpha > \gamma_1 > \cdots > \gamma_m = \beta$$

令 x_0 表示议程树的根，而 y_0 和 z_0 表示直接跟随 x_0 的两个结点，则一定有 $K = G(x_0) = G(y_0) \cup G(z_0)$。现令

$$G(y_0) = K \setminus \{\beta\},\ G(z_0) = \{\gamma_1, \cdots \gamma_m\}$$

则由于 $\gamma_m = \beta$，故 $G(y_0) \cup G(z_0)$ 等于 K。选择 α 一定仍在 $K \setminus \{\beta\}$ 的顶循环内，因为 K 中不存在一个选择，使得从 α 到这个选择的最短链包含 β（由于 K 中不存在一个选择，使得从 α 到这个选择的距离大于 β）。因此，利用 $K / \{\beta\}$ 是只有 l 个元素的集这一事实，由归纳假设可知，存在一个议程使得 y_0 处的完善投票解是 $\phi(y_0) = \alpha$。因为 γ_1 是在 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$ 的顶循环内的，且 $m \leqslant l$（由于 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\} \subseteq K \setminus \{\alpha\}$ 这一事实），所以，归纳假设也蕴含了可以选取 z_0 处完善投票解为 $\phi(z_0) = \gamma_1$ 的议程。于是，由于 $\alpha > \gamma_1$，故整个议程的完善结果是 $\phi(x_0) = \alpha$。■

如果我们对二元议程类施加限制，例如限制其中每次至多剔除一个选择，则可能有较小的选择集被产生以作为完善结果集［参见米勒（1980）；谢普斯莱和瓦因加斯特（Shepsle and Weingast，1984）；莫林（1986，1988）］。

4.11　技术性证明

定理4.1 的证明　对 Γ^e 中任一结点 x，令 $p(x)$ 表示从根到结点 x 的路径 202
上每个机会结点处，相应的选择被指定的概率之积（若这条路径上没有机会结点，则令 $p(x) = 1$）。对于每个局中人 i，令 $B_i(x)$ 表示局中人 i 为使博弈到达 x 所计划使用的所有必要行动构成的策略集。也就是说，当且仅当对于 S_i 中任一信息状态 s 和 D_i 中任一行动 d_s，若在从根到结点 x 的路径上存在一个枝，它是局中人 i 在信息状态为 s 的一个决策结点处行动标号为 d_s 的选择，则 $c_i(s)$ 一定等于 d_s，那么，$B_i(x)$ 才是 C_i 的一个子集，且 $c_i \in B_i(x)$。令 $B(x) = \times_{i \in N} B_i(x)$。

根据这些定义，可以证明，对于任一结点 x 和 C 中任一策略组合 c，

$$P(x \mid c) = p(x) \qquad 若 \quad c \in B(x)$$

$$P(x|c)=0 \qquad \text{若} \quad c\notin B(x)$$

(这个结论可以由 2.2 节中 P 的定义用归纳法证明。若 x 是根，则结论显然成立。于是，可以证明，若这个结论对结点 x 成立，则它对直接跟随 x 的所有结点也都成立。)

令 τ 是 $\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 中的一个混合策略组合，而 σ 是 $\times_{i\in N}\times_{s\in S_i}\Delta(D_s)$ 中作为 τ 的一个行为表示的行为策略组合。对于任一结点 x，令 $\hat{P}(x|\tau)$ 表示在所有局中人都按照 τ 随机化而博弈又进行到结点 x 时的概率，即

$$\hat{P}(x\mid\tau)=\sum_{c\in C}\Big(\prod_{i\in N}\tau_i(c_i)\Big)P(x\mid c)=P(x)\prod_{i\in N}\Big(\sum_{c_i\in B_i(x)}\tau_i(c_i)\Big)$$

现在，对任一结点 x，我们都可以证明

$$\hat{P}(x|\tau)=\bar{P}(x|\sigma) \tag{4.9}$$

(回顾在 4.3 节中，$\bar{P}(x|\sigma)$ 表示在从根到结点 x 路径上，由 σ 所规定的所有机会概率与所有行动概率之乘积。)

如果 x 是根，则由于 (4.9) 式两边都等于 1，所以方程 (4.9) 显然成立。现在，归纳假设对结点 y，有 $\hat{P}(y|\tau)=P(y|\sigma)$，而 x 是直接跟随 y 的
203 一个结点。我们需要证明，在这个假设之下，等式 (4.9) 仍成立。

首先，假设 y 是一个机会结点，且从 y 到 x 的选择枝具有概率 q。由 $\bar{P}$ 的定义得 $\bar{P}(x|\sigma)=q\bar{P}(y|\sigma)$。此外，

$$\begin{aligned}\hat{P}(x\mid\tau)&=\sum_{c\in C}\Big(\prod_{i\in N}\tau_i(c_i)\Big)P(x\mid c)\\&=\sum_{c\in C}\Big(\prod_{i\in N}\tau_i(c_i)\Big)qP(y\mid c)=q\hat{P}(y\mid\tau)\end{aligned}$$

因此，在这种情况下，(4.9) 式成立。

现在，假设 y 是局中人 j 在信息状态 r 处的一个结点，而从 y 到 x 的选择枝具有行动标号 d_r。由 P 的定义知 $\bar{P}(x|\sigma)=\sigma_{j,r}(d_r)\,P(y|\sigma)$。注意到 $p(x)=p(y)$，且对除 j 之外的任一局中人 i，都有 $B_i(x)=B_i(y)$；此外，又由于 Γ^e 具有完美记忆，故 $B_j(y)=C_j^*(r)$ 和 $B_j(x)=C_j^{**}(dr,\ r)$。因此，由于

$$\sigma_{j,r}(d_r)\Big(\sum_{c_j\in C_j^*(r)}\tau_j(c_j)\Big)=\sum_{c_j\in C_j^{**}(d_r,r)}\tau_j(c_j)$$

所以

$$\begin{aligned}\hat{P}(x\mid\tau)&=p(x)\prod_{i\in N}\Big(\sum_{c_i\in B_i(x)}\tau_i(c_i)\Big)\\&=p(y)\sigma_{j,r}(d_r)\prod_{i\in N}\Big(\sum_{c_i\in B_i(y)}\tau_i(c_i)\Big)\end{aligned}$$

$$= \sigma_{j,r}(d_r)\hat{P}(y \mid \tau)$$

于是，在这种情况下，(4.9) 式依然成立。

如此一来，由归纳法，(4.9) 式对每个结点 x 都成立。根据 (4.9) 式，博弈结果上的概率分布只依赖于局中人混合策略的行为表示。于是，行为上等价的策略所产生的期望支付一定相同。

对于任一局中人 i 和 $\times_{i\in N}\times_{s\in S_i}\Delta(D_s)$ 中任一行为策略组合 σ，定义 $v_i(\sigma)$ 为局中人 i 在每个局中人 j 都使用行为策略 σ_j 时的期望支付，则有

$$v_i(\sigma) = \sum_{x\in\Omega}\bar{P}(x \mid \sigma)w_i(x)$$

其中 Ω 表示 Γ^e 中的终结点集，$w_i(x)$ 表示 i 在任一终结点 x 的支付。对于 204
$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 中任一混合策略组合 τ，正规表示中的期望支付 $u_i(\tau)$ 满足

$$u_i(\tau) = \sum_{x\in\Omega}\hat{P}(x \mid \tau)w_i(x)$$

因而，我们可以把这个证明的结论表述如下：若 σ 是 τ 的一个行为表示，则 $u_i(\tau) = v_i(\sigma)$。■

定理4.2 的证明　令 τ 是 Γ^e 之正规表示的一个均衡，而 σ 是 τ 的一个行为表示。如果定理不成立，即 σ 不是 Γ^e 多代理人表示的一个均衡，则存在某个局中人 i、S_i 中某个状态 r 及 $\Delta(Dr)$ 中的某个 ρ_r 使得

$$v_i(\sigma_{-i,r}, \rho_r) > v_i(\sigma)$$

其中 $v_i: \times_{s\in S^*}\Delta(D_s) \to \mathbf{R}$ 是 Γ^e 的多代理人表示中局人 i 的每个代理人的效用函数。令 λ_i 为 i 的这样行为策略的混合表示，其不同于 $\sigma_i = (\sigma_{i,s})_{s\in S_i}$ 之处仅在于用 ρ_r 替代了 $\sigma_{i,r}$。那么由定理 4.1 的证明（其使用了具有完美记忆这一假设），有

$$u_i(\tau_{-i}, \lambda_i) = v_i(\sigma_{-i,r}, \rho_r) > v_i(\sigma) = u_i(\tau)$$

这与 τ 是正规表示的一个均衡这一假设相矛盾，因此，σ 必定是多代理人表示的一个均衡。■

定理4.4 的证明　对于 S^* 中的任一 s，令 $X(s)$ 表示不跟随 Y_s 中任何结点的所有终结点组成的集。对于任一局中人 i、S_i 中任一状态 s、$\Delta(D_S)$ 中任一 ρ_s，以及任一行为策略组合 σ，多代理人表示中 i 的效用函数都满足下述方程

$$v_i(\sigma_{-i,s}, \rho_s) - \sum_{y\in Y_s}\bar{P}(y \mid \sigma_{-i,s}, \rho_s)U_i(\sigma_{-i,s}, \rho_s \mid y) + \sum_{x\in X(s)}\bar{P}(x \mid \sigma_{-i,s}, \rho_s)w_i(x)$$

其中 $w_i(x)$ 表示局中人 i 在结点 x 的支付。然而，对 Y_s 中任一 y，因为结点 y 出现的概率只依赖于在 i 的状态 s 出现之前那些信息状态处的行动，所以 $P(y|\sigma_{i,s}, \rho_s) = \bar{P}(y|\sigma)$；因此，这个条件概率不依赖于局中人 i 在状态 s 处
205 的行为。同样，对 $X(s)$ 中任一结点 x，因为在到这样一个结点 x 的路径上，处在状态 s 的局中人 i 无可选择，所以 $\bar{P}(y, \sigma_{-i,s}, \rho_s) = \bar{P}(x|\sigma)$。于是，当 π 与 σ 是弱一致时有

$$\begin{aligned} v_i(\sigma_{-i,s}, \rho_s) &= \sum_{y \in Y_s} \bar{P}(y \mid \sigma) U_i(\sigma_{-i,s}, \rho_s \mid y) + \sum_{x \in X(s)} \bar{P}(x \mid \sigma) w_i(x) \\ &= \left(\sum_{y \in Y_s} \pi_{i,s}(y) U_i(\sigma_{-i,s}, \rho_s \mid y) \right) \left(\sum_{z \in Y_s} \bar{P}(z \mid \sigma) \right) \\ &\quad + \sum_{x \in X(s)} \bar{P}(x \mid \sigma) w_i(x) \end{aligned}$$

因此，如果 $\sum_{z \in Y_s} \bar{P}(z \mid \sigma) > 0$，但 σ 对 s 处的 i 来说不是序贯理性的，则存在某个 ρ_s 使得 $v_i(\sigma_{-i,s}, \rho_s) > v_i(\sigma_{i,s}, \sigma_{i,s}) = v_i(\sigma)$，但当 σ 是一个行为策略均衡时，这是不可能的。■

定理4.5 的证明 假设 (σ, π) 是一个序贯均衡，但 σ 不是行为策略均衡，则存在 $\times_{s \in S_i} \Delta(D_s)$ 中的某个行为策略 θ_i 使得

$$v_i(\sigma_{-i}, \theta_i) > v_i(\sigma)$$

我们选取 θ_i 使得上面的不等式成立，并且使得对于任一其他的行为策略 ϕ_i，若 $v_i(\sigma_{i}, \phi_i) > v_i(\sigma)$，则 $|\{s \in S_i | \phi_{i,s} \neq \sigma_{i,s}\}| \geqslant |\{s \in S_i | \theta_{i,s} \neq \sigma_{i,s}\}|$。

令 r 是局中人 i 的一个信息状态，使得 $\theta_{i,r} \neq \sigma_{i,r}$，并且对于使 Y_s 中所有结点都跟随 Y_r 中的结点的 S_i 中的每个 s，均有 $\theta_{i,s} = \sigma_{i,s}$。（这样一个 r 是可以找到的，因为由完美记忆的假设，S_i 中的状态可以用“后来的”状态决不会在“先来的”状态之前出现的方式排序。）再设 $\hat{\theta}_i$ 是局中人 i 的任一行为策略，使得对于 S_i 中不同于 r 的每个 s 均有 $\hat{\theta}_{i,s} = \sigma_{i,s}$。

因为对于跟随 Y_r 所有结点的那些结点中出现的 S_i 中的每个 s，都有 $\hat{\theta}_{i,s} = \theta_{i,s} = \sigma_{i,s}$，所以对于 Y_r 中的每个 y，均有 $U_i(\sigma_{-i}, \hat{\theta}_i | y) = U_i(\sigma_{-i,r}, \hat{\theta}_{i,r} | y)$。此外，因为在从根到这种结点 x 的路径上，不会有 Y_r 中的结点出现，故对 $X(r)$ 或 Y_r 中的每个结点 x，都有 $\bar{P}(x|\sigma_{-i}, \hat{\theta}_i) = \bar{P}(x|\sigma_{i}, \theta_i)$。（对于 Y_r 中的结点，这个结论取决于完美记忆，完美记忆意味着在从根出发的路径上，没有一个信息状态可以出现两次。）于是，

$$v_i(\sigma_{-i}, \hat{\theta}_i) = \sum_{y \in Y_r} P(y \mid \sigma_{-i}, \theta_i) U_i(\sigma_{-i,r}, \hat{\theta}_{i,r} \mid y) + \sum_{x \in X(r)} \bar{P}(x \mid \sigma_{i}, \theta_i) w_i(x)$$

由完美记忆知，在从根到 y 的路径上所出现的局中人 i 之信息状态和 i 所控制 206
的行动，对 Y_r 中的每个结点 y 都必须是相同的。因此，对于 Y_r 中任一结点 y，比值

$$\frac{\bar{P}(y \mid \rho)}{\sum_{z \in Y_r} \bar{P}(z \mid \rho)}$$

只要分母不为零就不依赖于 i 的行为策略 ρ_i，因为对 Y_r 中其他每个结点 z，ρ_i 贡献给 $\bar{P}(z|\rho)$ 的乘积因子都与其贡献给 $\bar{P}(y|\rho)$ 的乘积因子相同。因此局中人 i 在 Y_r 中结点处的完全一致的信念概率不依赖于 i 的行为策略，故有

$$\bar{P}(y \mid_{-i}, \theta_i) = \pi_{i,r}(y)\Big(\sum_{Z \in Y_r} \bar{P}(z \mid \sigma_{-i}, \theta_i)\Big), \quad \forall y \in Y_r$$

这就意味着

$$v_i(\sigma_{-i}, \hat{\theta}_i) = \Big(\sum_{y \in Y_r} \pi_{i,r}(y) U_i(\sigma_{-i,r}, \hat{\theta}_{i,r} \mid y)\Big)\Big(\sum_{z \in Y_r} \bar{P}(z \mid \sigma_{-i}, \theta_i)\Big) + \sum_{x \in X(r)} \bar{P}(x \mid \sigma_{-i}, \theta_i) w_i(x)$$

根据序贯均衡的定义，这个分公式通过令 $\hat{\theta}_{i,r} = \sigma_{i,r}$ 而得以最大化。但另一方面却有 $v_i(\sigma_{-i}, \hat{\theta}_i) > v_i(\sigma)$ 和 $\big|\{s \in S_i \mid \hat{\theta}_{i,s} \neq \sigma_{i,s}\}\big| < \big|\{s \in S_i \mid \theta_{i,s} \neq \sigma_{i,s}\}\big|$，这与 θ_i 的构造方式相矛盾。于是，不存在这样的 θ_i，故而 σ 是一个行为策略均衡。■

定理4.7 的证明　给定 Γ^e 具有完美信息，一个行为策略组合 σ（与全由 1 组成的信念向量一起）是 Γ^e 的序贯均衡的充要条件是，对于 N 中每个局中人 i 和 S_i 中每个状态 s，均有

$$\sigma_{i,s} \in \underset{\rho_s \in \Delta(D_s)}{\operatorname{argmax}}\ U_i(\sigma_{-i,s}, \rho_s \mid x), \text{ 其中 } |x| = Y_s \tag{4.10}$$

由引理 3.1 知，若有

$$\sigma_{i,s} = \lfloor d_s \rfloor, \quad \text{其中 } d_s \in \underset{e_s \in D_s}{\operatorname{argmax}} U_i(\sigma_{-i,s}, [e_s] \mid x), \quad |x| = Y_s \tag{4.11}$$

则条件（4.10）就会成立。要注意到，在（4.10）和（4.11）式中，U_i 207
$(\sigma_{-i,s}, \rho_s \mid x)$ 和 $U_i(\sigma_{-i,s}, [e_s] \mid x)$ 只依赖于 σ 的用于跟随结点 x 的那些结点处之行动的分量。

对于任一结点 x，令 $\iota(x)$ 表示在 x 开始的子博弈中决策结点的个数。对于 S^* 中任一 s，令 $\iota(s) = \iota(x)$，其中 $Y_s = |x|$。

首先，假设 $\iota(s) = 1$。由于在 x 之后没有决策结点，所以 $U_i(\sigma_{i,s}, \rho_s \mid x)$ 只依赖于 ρ_s。从而 $\operatorname{argmax}_{e_s \in D_s} U_i(\sigma_{-i,s}, [e_s] \mid x)$ 与 σ 无关，故我们可以

通过令 $\sigma_{i,s}$ 满足（4.11）式开始构造非随机均衡 σ。

现在，归纳假设对于某个数 k，$\sigma_{j,r}$ 对所有满足 $r\in S_j$ 和 $\iota(r)<k$ 的 j 和 r 都做了定义，并且假设（4.11）式对所有使得 $\iota(s)<k$ 的 s 都成立，则对任意使 $s\in S_i$、$|x|=Y_s$ 及 $\iota(s)=k$ 同时成立的 (i, s, x)，$U_i(\sigma_{-i,s}, [e_s]\,|\,x)$ 对 D_s 中的每个 e_s 都有明确的定义；所以，我们对这个 (i, s, x) 同样可以构造 $\sigma_{i,s}$ 满足（4.11）式。

于是，由上一段对 k 的归纳论证，我们可以构造 σ 使得（4.11）式对所有满足 $i\in N$ 和 $s\in S_i$ 的 i 和 s 都成立。这样的一个行为策略组合 σ 便是一个纯（非随机）策略序贯均衡。

现在，让我们考虑选取 $\mathbf{R}^{N\times\Omega}$ 中某些支付向量来生成一个博弈 $\tilde{\Gamma}^e$，它与 Γ^e 的差别仅在于支付。对于任一局中人 i、任一结点 x 及 $\times_{s\in S^*}D_s$ 中任一纯策略组合 d，令 $\tilde{U}_i(d\,|\,x)$ 表示博弈 $\tilde{\Gamma}^e$ 对局中人 i 的条件期望支付，只要这个博弈是在结点 x 开始进行的，并且在其后的每个结点上，局中人都是执行由 d 所规定的行动。如果 $|x|=Y_s$、$s\in S_i$、$d\in D=\times_{r\in S^*}D_r$ 及 $d_s\neq e_s\in D_s$，则差值 $\tilde{U}_i(d\,|\,x)-\tilde{U}_i(d_{-i,s}, e_s\,|\,x)$ 是 $\tilde{\Gamma}^e$ 中终结点处支付的一个非常数线性函数。任一非常数线性函数在一个稠密的开集上不等于 0，而有限个稠密开集的交集仍是稠密的开集。因而，在 $\mathbf{R}^{N\times\Omega}$ 中存在支付向量的一个开稠集，使得博弈 $\tilde{\Gamma}^e$ 满足

$$U_i(d\,|\,x)\neq U_i(d_{-i,s}, e_s\,|\,x) \tag{4.12}$$
$$\forall i\in N,\ \forall s\in S_i,\ \forall d\in D,\ \forall e_s\in D_s\backslash\{d_s\}$$

现在，假设条件（4.12）是满足的，则只存在 $\tilde{\Gamma}^e$ 的一个序贯均衡，且一定是纯策略均衡（因为知道至少存在一个纯策略序贯均衡）。为了说明为什么是这样，假设 $\tilde{\Gamma}^e$ 有两个不同的序贯均衡 σ 和 $\hat{\sigma}$。令 x 是局中人 i 在信息状态 s 下
208 行动的一个决策结点，使得要么 $\sigma_{i,s}\neq\hat{\sigma}_{i,s}$，要么 $\sigma_{i,s}$ 对 D_s 中不止一个行动赋予了正概率。另外，我们可这样选择结点 x，在跟随 x 的每个决策结点，σ 和 $\hat{\sigma}$ 都是非随机地选择相同的行动，那么由（4.12）式知，当 σ 或 $\hat{\sigma}$ 在 x 之后被执行时，在 x 处不可能有两个行动带给局中人 i 相同的期望支付。也就是说，对于 D_s 中任意两个行动 d_s 和 e_s，均有

$$\tilde{U}_i(\sigma_{-i,s},[d_s]\,|\,x)=\tilde{U}_i(\hat{\sigma}_{-i,s},[d_s]\,|\,x)\neq\tilde{U}_i(\sigma_{-i,s},[e_s]\,|\,x)=\tilde{U}_i(\hat{\sigma}_{-i,s},[e_s]\,|\,x)$$

这个结果意味着存在某个行动 d_s，使得

$$\underset{e_s\in D_s}{\operatorname{argmax}}\,\tilde{U}_i(\sigma_{-i,s},[e_s]\,|\,x)=\underset{e_s\in D_s}{\operatorname{argmax}}\,\tilde{U}_i(\hat{\sigma}_{-i,s},[e_s]\,|\,x)=\{d_s\}$$

故我们一定有 $\sigma_{i,s}=\hat{\sigma}_{i,s}=[d_s]$。这与 x 所定义的方式相矛盾。因此，当条件（4.12）满足时，$\tilde{\Gamma}^e$ 不可能有两个不同的序贯均衡。■

习　题

4.1　考虑如图 4.17 所示的展开型博弈和局方案。

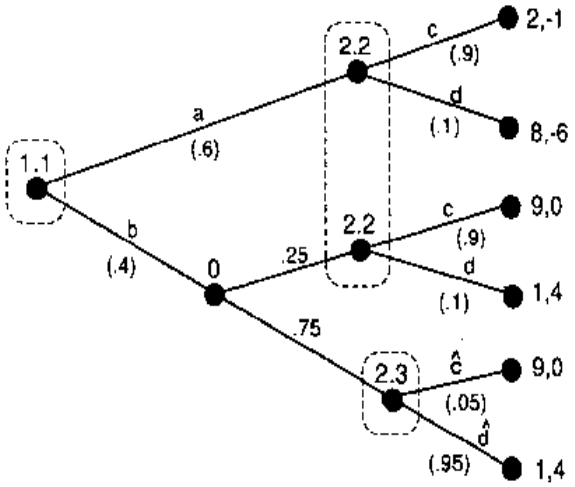

图　4·17

a. 计算与这个局方案上相一致的信念概率。

b. 对每个局中人的每个信息状态，根据这个局方案及一致信念，计算其每个可能行动的序贯值。

c. 依据这些一致信念，找出这个局方案中所有的非理性行动，即对每个局中人的每个信息状态，找出在这个局方案中具有正概率，但在此信息状态下不会使该局中人的序贯值最大的行动。 209

d. 找出这个博弈的一个序贯均衡。

4.2　考虑习题 2.1 中的博弈（在第 2 章中）。

a. 证明这个博弈的正规表示有两个纯策略均衡。并证明这两个纳什均衡中的每一个都对应于展开型博弈的一个序贯均衡。

b. 对你在（a）中所找到的每一个序贯均衡，描述包含这个均衡的所有序贯均衡集的连通分支。这就是说，对你在（a）中所找出的每一个序贯均衡，证明：通过连续地改变行动概率和信念概率所能构造的其他所有序贯均衡都不会离开这个序贯均衡集。

4.3　考虑图 4·18 所示的博弈。

a. 令 $x=1$，找出这个博弈的 3 个纯策略均衡。

b. 假设 π 是与此博弈的某个行为策略向量 σ 是完全一致的一个信念向量，

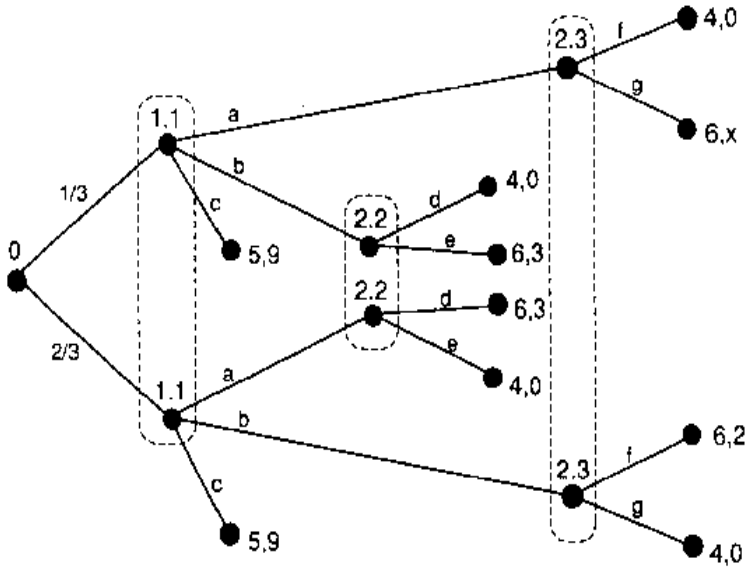

图 4·18

令 α 表示 Y_2 中下面那个结点，此处局中人 2 具有信息状态 2，并且局中人 1 选择了 a。而令 β 表示 Y_3 中下面那个结点，此处局中人 2 具有信息状态 3，
210 并且局中人 1 选择了 b。证明存在一个用 $\pi_{2,2}(\alpha)$ 表示 $\pi_{2,3}(\beta)$ 的公式。

c. 对于 $x=1$，证明（a）中的 3 个纯策略均衡中有 2 个是（完全）序贯均衡局方案，但另一个则不是。描述能使这另一个均衡为序贯理性的所有信念向量，并证明它们与该均衡的局方案是弱一致的，但并不是完全一致的（故这个局方案是弱序贯均衡局方案）。

d. 欲使所有这 3 个纯策略均衡都是（完全）序贯均衡，x 的最小值是多少？对（c）中那个非序贯的均衡，证明；在新的 x 值下，完全一致信念使其成为了一个序贯均衡。

4.4 在习题 2.3（第 2 章）中，我们考虑了简单摊牌博弈的一个修改了的变形，即局中人 1 在看了手中的牌后，可以加注 1 美元、加注 0.75 美元或者放弃。证明：这个博弈具有序贯均衡，其中加注 0.75 美元的概率是 0。在这样的一个序贯均衡中，局中人 2 对局中人 1 在加注 0.75 美元的情况下持有一张红色（赢）牌这一事件所赋予的概率是多少？

4.5 找出图 2·8（第 2 章的习题 2.4）中博弈的所有序贯均衡。并对每个序贯均衡明确给出所有行动概率和信念概率。

4.6 找出图 4·19 所示博弈的所有序贯均衡。[这个博弈与图 2·8 所示博弈的唯一不同之处在于 z_1 枝后的支付从（2，6）变为（7，6）。]

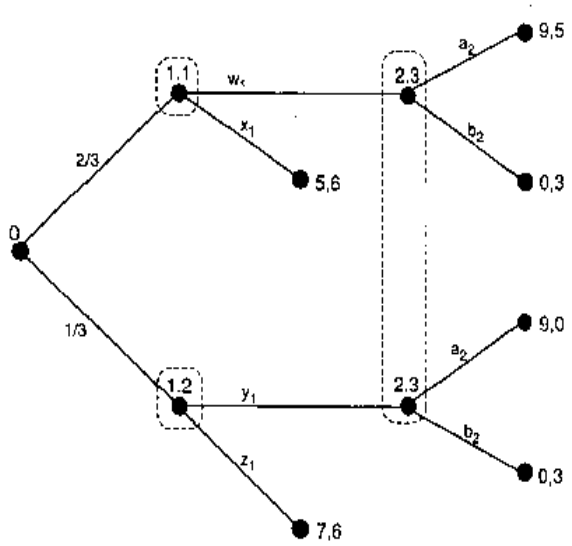

图　4·19

4.7　考虑图 4·20 所示的博弈。　211

a. 找出此博弈唯一的子博弈完美均衡。

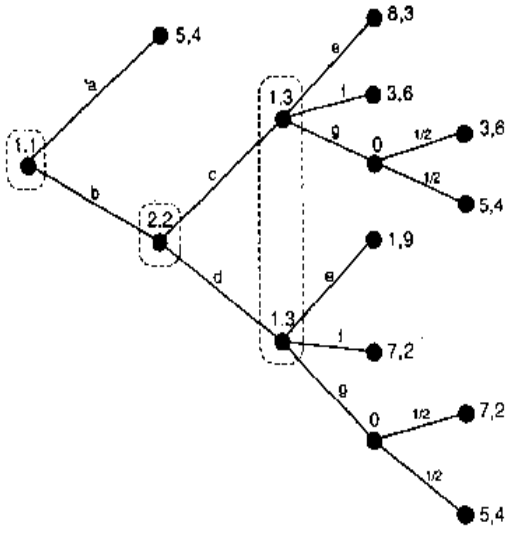

图　4·20

b. 现通过剔除局中人 1 在状态 3 的行动“g”来修改此博弈，找出修改后博弈唯一的子博弈完美均衡。

4.8　回顾习题 2.2 所描述的修改了的摊牌博弈（第 2 章），其中局中人 1 持有的牌是赢牌的充要条件是，它为 10 或更高的牌。找出此博弈唯一的序贯均衡。如果他们是按照这个均衡进行博弈的话，则在抽牌之前，每个局中人的期望支付是多少？　212

4.9　［改编自富登伯格和克雷普斯（1988）的一个博弈］考虑图 4·21 所示的博弈。

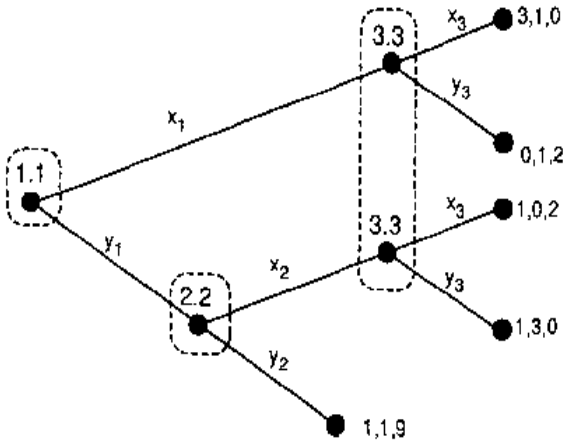

图 4·21

a. 证明这个博弈具有局中人 3 行动（由于局中人 1 选择了 x_1 或局中人 2 选择了 x_2）的概率为 1 的唯一一个行为策略均衡。（提示：即使局中人 3 行动的概率为 0，均衡也要被定义为包含在局中人 3 行动时其将选择 x_3 的条件概率之描述。而其余两个作为智能的局中人应该知道这个条件概率。因此，在均衡中，若局中人 3 行动，则局中人 1 和 2 关于 3 将做什么的意见应该是一致的。）

b. 现在，转而考虑局中人 1 和 2 关于局中人 3 行动时其将做什么的意见不一致而有不同信念的（非均衡）情形。证明：局中人 1 和 2 关于局中人 3 之策略的不同信念可促使他们以 3 行动的概率为 0 的方式理性地行动。

5

策略型均衡的精炼

5.1 引言

我们已经看到，任何一个展开型博弈都可以用策略型来表示，或用正规表示、或用简约的正规表示、或用多代理人表示。这些表示唤起了我们的希望，似乎能在概念上较简单的策略型范围内，对博弈论分析的所有原理都展开论述。然而，轻而易举地就能构造一些展开型博弈，尽管它们具有相同的策略型（在任何一种表示之下），但却有不同的序贯均衡集。例如，$([y_1],[y_2])$ 不是图 4·5 中博弈的一个序贯均衡局方案，但却是图 5·1 中博弈的一个序贯均衡局方案，并且这两个博弈具有相同的策略型正规表示，这个表示也是简约的正规表示和多代理人表示。因此，如果接受序贯均衡作为刻划理性行为的一个精确解，则博弈必须用展开型而不能用策略型去分析。 213

然而，由于图 5·1 中所示的序贯均衡涉及到局中人 2 所用的一个策略 y_2，而 y_2 在策略型博弈中是弱劣的，从而产生了这样一个疑问：$([y_1],[y_2])$ 是否应该被认为是理性而又智能的局中人在此博弈中所选择的一个合理策略偶？尽管这个策略偶满足了序贯均衡的定义。也就是说，序贯均衡或许仍过于弱而不能用作对博弈中理性行为的一个恰当刻划。为了更准确地刻划博弈中的理性行为，我们要对展开型或策略型博弈寻找别的方法来改进均衡概念。

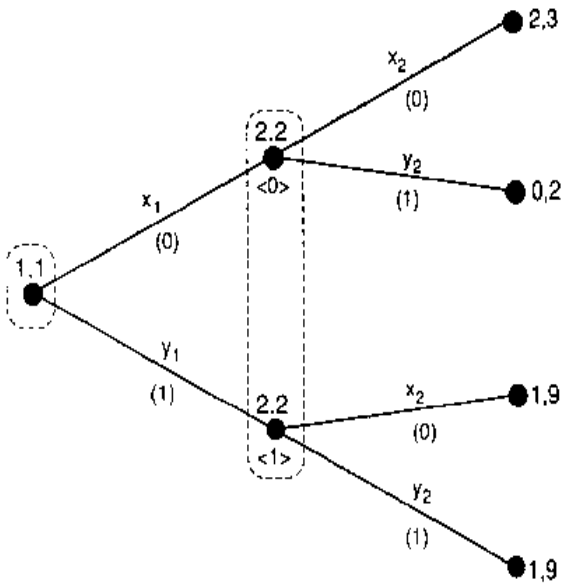

图 5·1

考虑由科尔伯格和默顿斯（1986）所提出的两个博弈，如图 5·2 和 5·3 所示。这两个博弈具有相同的纯简约正规表示（直到策略的重新标号）。图 5·2 214

中的博弈具有局中人 1 以概率 1 使用行动 a_1 的一个序贯均衡，但图 5·3 中的博弈则不存在这样的序贯（甚至子博弈完美）均衡。这两个博弈的差别在于，在图 5·3 中，局中人 2 知道，对局中人 1 来说，只有在 a_1 不再是其可用的选
215 择时，他才能在 x_1 与 y_1 之间做选择。因此，在图 5·3 所示博弈的任一序贯均衡中，如果局中人 1 选择 x_1 或 y_1，则局中人 2 一定确信他会选择对他自己较好的行动，且这个行动必是 x_1。所以在图 5·3 所示博弈的任一序贯均衡中，局中人 2 一定对她的上结点（跟随 x_1）赋予概率 1；故她将选择 x_2，而局中人 1 将选择 b_1 和 x_1。然而，因为这两个博弈具有相同的纯简约正规表示，所以它们应该有相同的解集，这种论点有很大的直觉上的吸引力。

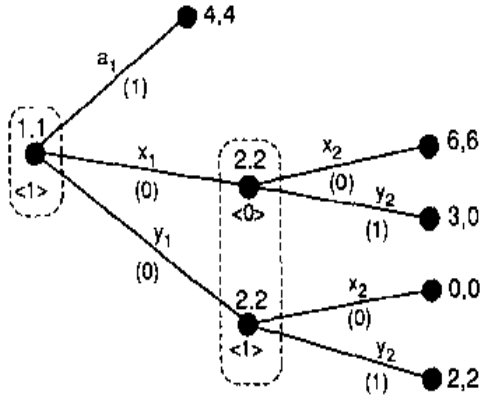

图 5·2

为避免在图 5·2 与图 5·3 或者图 4·5 与图 5·1 那样的博弈之间进行区分，一个自然的办法是，开发可直接应用于策略型的纳什均衡概念的精炼。按照基于这种精炼而建立起来的一种解概念，并通过一种我们曾研究过的表示（正规、纯简约正规、完全简约正规或多代理人的）把这个解理论应用于展开型博弈，我们就能保证，具有相同策略型表示的展开型博弈（在所指明的意义上）将有相同的解。

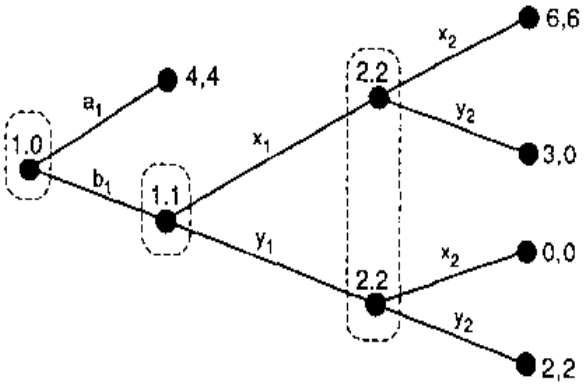

图 5·3

列出对纳什均衡概念的一个精炼在理论上所要求的某些合意性质，或许有所裨益。精炼后的均衡概念，对任何一个有限博弈，都应该为其确定一个非空的均衡集，因为，假如均衡集有时是个空集，则难以真正把它作为一个解概念。（设想在一个没有解的博弈中会发生什么呢?）如果我们的直觉似乎明显地识别出，在某种意义上，博弈的一个
216 均衡是不合理的，此时，精炼后的均衡概念应该能阐述我们的直觉，并排除这个均衡。例如，其中某个局中人以正概率选择某个劣策略的这样一个均衡，自然会被认为是不合理的。在展开型博弈中，一个不能由任何信念向量扩展成一个序贯均衡的均衡，也应被认为是不合理的。当我们分析研究策略型博弈的解概念时，精炼解概念的这个准则要求，一旦我们已经选用了策略型（多代理人、正规，等等）的某种方式表示展开型博弈，那么，对于任一给定的策略型博弈，精炼的解概念应该只挑选对应于给定策略型博弈所表示的全部展开型博

弈之序贯均衡的那些均衡。塞尔滕（1975）定义的完美均衡概念，在我们利用多代理人表示把展开型博弈映射到策略型时，具有上述所有的性质。

5.2　完美均衡

令 $\Gamma=\{N,\ (C_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\}$ 为任一有限策略型博弈。$\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 中的一个随机策略组合 σ 是 Γ 的一个**完美均衡**（perfect equilibrium）的充要条件是，存在一个序列 $\{\hat{\sigma}^k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\hat{\sigma}^k\in\underset{i\in N}{\times}\Delta^0(C_i),\quad \forall k\in\{1,\ 2,\ 3\cdots\} \tag{5.1}$$

$$\lim_{k\to\infty}\hat{\sigma}_i^k(c_i)=\sigma_i(c_i),\quad \forall i\in N,\ \forall c_i\in C_i, \tag{5.2}$$

以及

$$\sigma_i\in\underset{\tau_i\in\Delta(C_i)}{\operatorname{argmax}}\ u_i(\hat{\sigma}^k_{-i},\ \tau_i),\quad \forall i\in N \tag{5.3}$$

[这里 $\sigma=(\sigma_i)_{i\in N}$，$\hat{\sigma}^k=(\hat{\sigma}_i^k)_{i\in N}$，$\hat{\sigma}^k_{-i}=(\hat{\sigma}_j^k)_{i\in N-i}$。] 条件（5.1）断言，在每个 $\hat{\sigma}^k$ 中*每个局中人的每个纯策略取得严格正的概率(回顾 1.6 节中的 $\Delta^0(\cdot)$ 的定义)。条件（5.2）断言，对于充分大的 k，$\hat{\sigma}^k$ 是在所有分量上都非常接近于 σ 的一个随机策略组合。条件（5.3）断言，每个局中人在 σ 中的策略是对其余所有局中人在每个 $\hat{\sigma}^k$ 中策略的最佳反应。

容易证明，Γ 的任一完美均衡实际上都是 Γ 的一个纳什均衡。因为最佳反 217
应对应是上半连续的（正如定理 3.1 的证明所示），故条件（5.2）和（5.3）意味着

$$\sigma_i\in\underset{\tau_i\in\Delta(C_i)}{\operatorname{argmax}}\ u_i(\sigma_{-i},\ \tau_i),\quad \forall i\in N$$

所以上述结论成立。

在一个纳什均衡中，每个局中人的均衡策略都是对其余局中人之均衡策略的一个最佳反应。而在一个完美均衡中，一定存在所有局中人策略的一些任意小的扰动，使得每个纯策略都得到严格正的概率，且使每个局中人的均衡策略对其余局中人的这些扰动策略仍是一个最佳反应。因此，在一个完美均衡中，一个局中人策略选择的最优性并不依赖于均衡中某些纯策略会取得零概率这一假设。

完美均衡与序贯均衡之间密切的逻辑关系，可从条件（5.1）～（5.3）与

---

* 原文误为 σ^k——译者注。

第4章中条件（4.2）及（4.6）～（4.8）的对比中看出来。在这两个解概念中，均衡 σ 都是通过与其中每个行动或纯策略都具有正概率的扰动策略的比较来加以检验的。在序贯均衡的定义中，扰动的策略用于生成零概率事件处的信念（按照条件4.6～4.8），然后又将这些信念用于序贯理性或最优性条件（4.2）。而在完美均衡的定义中，这些扰动的策略直接用于最优性条件（5.3）。事实上，当 Γ 是 Γ^e 的多代理人表示时，条件（5.3）是比条件（4.2）和（4.8）合在一起都要强的要求。因此，正如下述定理所指出，Γ^e 的多代理人表示的每个完美均衡对应于 Γ^e 的一个序贯均衡。

定理5.1 设 Γ^e 是一个具有完美记忆的展开型博弈，且 σ 是 Γ^e 多代理人表示的一个完美均衡，则存在一个信念概率向量 π，使 (σ, π) 是 Γ^e 的一个序贯均衡。

证明 在这个证明中，使用曾在第4章给出的记号。令 i 是 Γ^e 中任一局中人，s 是 S_i 中任一信息状态，用 $X(s)$ 表示不跟随 Y_s 中任何结点的所有终结点所组成的集。再令 $\{\hat{\sigma}^k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\times_{r\in S}\Delta^0(D_r)$ 中的一个行为策略组合序列，这个序列满足使 σ 成为一个完美均衡的条件（5.1）～（5.3）（当 Γ 是 Γ^e 的多
218 代理人表示时）。对于任一 k 和 Y_s 中任一结点 y，令

$$\hat{\pi}_s^k(y)=\frac{\bar{P}(y\mid\hat{\sigma}^k)}{\sum_{z\in Y_s}\bar{P}(z\mid\hat{\sigma}^k)}$$

注意到，对 Y_s 中的每个 y 都有 $P(y\mid\hat{\sigma}^k)>0$，故 $\sum_{z\in Y_s}\bar{P}(z\mid\hat{\sigma}^k)>0$，这是因为，$\hat{\sigma}^k$ 对所有的纯策略组合都指定了正概率，并且在博弈 Γ^e 中，每个机会结点处的每个选择都被假定为有正概率。令

$$\pi_s(y)=\lim_{k\to\infty}\hat{\pi}_s^k(y)$$

则由（5.1）和（5.2）式可知，π 是与 σ 完全一致的一个信念向量。

对于任一终结点，令 $w_i(x)$ 表示 i 在终结点 x 处获得的支付，而用 $v_s(\cdot)$ 表示多代理人表示中 i 在状态 s 处的代理人的效用函数，如2.6节中所定义。在这个代理人使用 $\Delta(D_s)$ 中的随机策略 ρ_s 来对付 $\hat{\sigma}^k$ 为其余所有代理人所规定的策略时，他的期望支付是

$$\begin{aligned}&v_s(\hat{\sigma}^k_{-i,s},\ \rho_s)\\&=\sum_{y\in Y_s}\bar{P}(y\mid\hat{\sigma}^k_{-i,s},\ \rho_s)U_i(\hat{\sigma}^k_{-i,s},\ \rho_s\mid y)+\sum_{x\in X(s)}\bar{P}(x\mid\hat{\sigma}^k_{-i,s},\ \rho_s)w_i(x)\end{aligned}$$

不过，对于 Y_s 中的任一 y，由于结点 y 出现的概率只依赖于在 s 发生之前可能行动的那些代理人的策略，所以 $\bar{P}(y\mid\hat{\sigma}^k_{-i,s},\ \rho_s)=\bar{P}(y\mid\hat{\sigma}^k)$；从而，它不依赖于局中人 i 在状态 s 的行为。因此，

$$
\begin{aligned}
&v_s(\hat{\sigma}^k{}_{i,s},\ \rho_s)\\
&=\sum_{y\in Y_s}\bar{P}(y\mid\hat{\sigma}^k)U_i(\hat{\sigma}^k{}_{i,s},\ \rho_s\mid y)+\sum_{x\in X(s)}\bar{P}(x\mid\hat{\sigma}^k)w_i(x)\\
&=\Big(\sum_{y\in Y_s}\hat{\pi}_s^k(y)U_i(\hat{\sigma}_{i,s},\ \rho_s\mid y)\Big)+\Big(\sum_{z\in XY_s}\bar{P}(z\mid\hat{\sigma}^k)\Big)+\sum_{x\in X(s)}\bar{P}(x\mid\hat{\sigma}^k)w_i(x)
\end{aligned}
$$

$(\hat{\sigma}^k)_{k=1}^{\infty}$支持 σ 作为 Γ^e 多代理人表示的完美均衡这一事实意味着

$$
\sigma_s\in\operatorname*{argmax}_{\rho_s\in\Delta(D_s)}v_s\ (\hat{\sigma}^k_{-i,s},\ \rho_s)
$$

而这又意味着

219

$$
\sigma_s\in\operatorname*{argmax}_{\rho_s\in\Delta(D_s)}\sum_{y\in Y_s}\hat{\pi}_s^k(y)U_i(\hat{\sigma}^k{}_{i,s},\ \rho_s\mid y)
$$

因为这两个目标函数的差别在于一个函数是另一个函数严格增的仿射变换，且变换系数与 ρ_s 无关。于是，由最优反应映射的上半连续性知，

$$
\sigma_s\in\operatorname*{argmax}_{\rho_s\in\Delta(D_s)}\sum_{y\in Y_s}\pi_s(y)U_i(\sigma_{-i,s},\ \rho_s\mid y)
$$

这个结论是序贯均衡的序贯理性条件，故 $(\sigma,\ \pi)$ 是 Γ^e 的一个序贯均衡。 ■

塞尔滕（1975）定义展开型博弈的一个**完美均衡**（perfect equilibrium）为其多代理人表示的任一完美均衡。比较而言，我们曾将展开型博弈的一个纳什均衡定义为其多代理人表示的任一纳什均衡，但这个纳什均衡须也是其正规表示的一个纳什均衡。图 4·2 曾被用来说明不能只运用多代理人表示来定义展开型博弈的纳什均衡的理由，而现在来指出这种说法不适用于完美均衡概念是有益的。回想图 4·2 的多代理人表示有一个纳什均衡（$[b_1]$，$[w_2]$，$[z_1]$），这相当违背常理，并且不应该被视为给定展开型博弈的一个均衡。不过，这个有悖常理的均衡将不可能成为多代理人表示的一个完美均衡。为说明其中原因，假设对于充分大的 k，$\hat{\sigma}^k_{1,1}=\varepsilon_1[a_1]+(1-\varepsilon_1)[b_1]$，并令 $\hat{\sigma}^k_{2,2}=(1-\varepsilon_2)\ [w_2]+\varepsilon_2[x_2]$，其中 $\varepsilon_1(k)$ 和 $\varepsilon_2(k)$ 都是很小的正数（每个都小于 0.5）。当把 $[b_1]$ $[w_2]$ 分别扰动成 $\hat{\sigma}^k_{1,1}\hat{\sigma}^k_{2,2}$时，则由于（$a_1$，$w_2$）出现的概率为正，且远大于（$a_1$，$x_2$）出现的概率，故局中人 1 在状态 3 的代理人唯一最佳的反应将是 y_1，而不是 z_1。事实上，该博弈多代理人表示的唯一完美均衡是（.5 $[a_1]$ + .5 $[b_1]$，.5 $[w_2]$ + .5 $[x_2]$，$[y_1]$）。这个行为策略组合，与结点 2.2 和 1.3 处各自的信念概率 1/2 一起，还构成了这个博弈唯一的序贯均衡。

另一方面，对正规表示的完美均衡，可能并没有序贯均衡与之对应。为探 220
其究竟，再次考虑图 5·3 中的例子，这个博弈的正规表示如表 5－1 所示。策略组合（$[a_1x_1]$，$[y_2]$）是这个策略型正规表示的完美均衡，尽管它并不表示图 5·3 所示展开型博弈的序贯均衡。为证明（$[a_1x_1]$，$[y_2]$）是表 5－1 的

一个完美均衡，考虑扰动的随机策略组合

$$\hat{\sigma}^k=\big((1-\epsilon)[a_1x_1]+.1\epsilon[a_1y_1]+.1\epsilon[b_1x_1]+.8\epsilon[b_1y_1]$$
$$\epsilon[x_2]+(1-\epsilon)[y_2]\big)$$

其中 $\epsilon=1/(k+2)$。当 $\epsilon\leqslant 1/3$ 时，由于 $4\geqslant 6\epsilon+3(1-\epsilon)$，故对于局中人 1 而言，$[a_1x_1]$ 是对 $\epsilon[x_2]+(1-\epsilon)[y_2]$ 的最佳反应。另一方面，当 b_1y_1 的概率为正且比 b_1x_1 的概率大三倍有余时，y_2 便成为局中人 2 的最佳反应。所以，序列 $\{\hat{\sigma}^k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足使 $([a_1x_1],[y_2])$ 成为正规表示的一个完美均衡的条件 (5.1) ～ (5.3)。

表 5-1　　一个策略型博弈：图 5·3 的正规表示

	C_2	
C_1	x_2	y_2
a_1x_1	4, 4	4, 4
a_1y_1	4, 4	4, 4
b_1x_1	6, 6	3, 0
b_1y_1	0, 0	2, 2

然而，图 5·3 的多代理人表示并不存在一个这样的完美均衡，其中局中人 1 以正概率选择 a_1 或局中人 2 以正概率选择 y_2。事实上，在多代理人表示中，给定任一行为策略组合，只要其中 1 在结点 1.0 处的代理人对行动 b_1 赋予任一正概率，则 x_1 一定是 1 在结点 1.1 处代理人唯一的最佳反应。所以，1 在 1.1 结点处代理人的完美均衡策略一定是 $[x_1]$。因此，支持多代理人表示的一个完美均衡的扰动行为策略组合 $\hat{\sigma}^k$ 必须满足 $\lim_{k\to\infty}\hat{\sigma}^k_{1.1}(x_1)=1$ 和 $\lim_{k\to\infty}\hat{\sigma}^k_{1.1}(y_1)=0$。从而在 $\hat{\sigma}^k$ 下，当 k 充分大时，行动 (b_1, x_1) 出现的概率一定为正，且远大于行动 (b_1, y_1) 出现的概率。[这两个概率分别是 $\hat{\sigma}^k_{1.0}(b_1)\cdot\hat{\sigma}^k_{1.1}(x_1)$ 和 $\hat{\sigma}^k_{1.0}(b_1)\,\hat{\sigma}^k_{1.1}(y_1)$]。因而，对于所有充分大的 k，x_2 是局中人 2 对 $\hat{\sigma}^k$ 的唯一最佳反应，且 2 的代理人的完美均衡策略一定是 $[x_2]$。这个结论又意味着 $\lim_{k\to\infty}\hat{\sigma}^k_{2.2}(x_2)=1$ 和 $\lim_{k\to\infty}\hat{\sigma}^k_{2.2}(y_2)=0$。于是，对于充分大的 k，1 在结点 1.0 的代理人对 $\hat{\sigma}^k$ 的最佳反应一定是 b_1，在 x_1 和 x_2 都具有高概率时，这个反应给他接近于 6 的支付。这样一来，多代理人表示的唯一完美均衡是 $([b_1],[x_1],[x_2])$。

221

5.3　完美均衡和序贯均衡的存在性

定理 5.2　任一有限策略型博弈，都至少存在一个完美均衡。

证明　设 $\Gamma=\{N,\ (C_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\}$ 是任一有限策略型博弈，λ 是 $\times_{i\in N}\Delta^0(C_i)$ 中的任一随机策略组合。[例如，对每个 i 和 C_i 中的每个 c_i，令 $\lambda_i(c_i)=\frac{1}{|C_i|}$。] 对任意满足 $k\geqslant 1$ 的数 k，我们定义一个映射 δ^k：$\times_{i\in N}\Delta(C_i)\to\times_{i\in N}\Delta^0(C_i)$ 使得

$$\delta^k(\sigma)=\tau \text{ 当且仅当 } \forall i \text{ 和} \forall c_i, \text{ 有 } \tau_i(c_i)=(1-(1/k))\sigma_i(c_i)+(1/k)\lambda_i(c_i)$$

类似地，对 $\times_{i\in N}C_i$ 中的任一 c，定义 $\delta^k(c)$，使得

$$\delta^k(c)=\tau \quad \text{当且仅当，} \forall i, \text{ 有 } \tau_i=(1-(1/k))[c_i]+(1/k)\lambda_i$$

对于 $\times_{i\in N}C_i$ 中任一 c，令

$$\hat{u}_i^k(c)=u_i(\delta^k(c))$$

再令 $\hat{\Gamma}^k=\{N,(C_i)_{i\in N},\ (\hat{u}_i^k)_{i\in N}\}$

于是，$\hat{\Gamma}^k$ 是一个有限策略型博弈。为了解释这个博弈，假设每个局中人都有一个独立的概率 $1/k$ 发生非理性的颤抖或对其行动失去了理性的控制。同时还假设，如果局中人 i 发生了颤抖，那其行为将按照随机策略 λ_i 随机决定，不管他曾想做什么样的理性选择。因而，如果 $\Delta(C_i)$ 中的随机策略 σ_i 描述了局中人 i 在未颤抖时的行为，那么，$\delta^k(\sigma_i)$ 则描述了他在知道是否颤抖之前的行为。在博弈 Γ 中引入这种颤抖后，便得到了博弈 $\hat{\Gamma}^k$。当然，随着 k 变得很大，任何一 222
个局中人颤抖的概率变得非常小，从而博弈 $\hat{\Gamma}^k$ 也就成为博弈 Γ 的一个轻微扰动。

令 $\hat{\sigma}^k$ 为 $\hat{\Gamma}^k$ 的一个纳什均衡，由定理 3.1 知，它是存在的。如果必要的话，可以选择一个子序列，故我们可假定 $\{\sigma^k\}$ 是紧集 $\times_{i\in N}\Delta(c_i)$ 中的一个收敛序列。如果必要的话，选取进一步的子序列，我们还可假定，对于每个局中人 i，C_i 中那些在 σ^k 中取零概率的纯策略所组成的集，对每个 k 都是相同的。(由于 C_i 只有有限多个子集，这是可以做到的。)令 $\sigma=\lim_{k\to\infty}\sigma^k$，并对每个 k，令 $\hat{\sigma}^k=\delta^k(\sigma^k)$，则

$$\hat{\sigma}^k\in\underset{i\in N}{\times}\Delta^0(C_i),\ \forall k$$

$$\lim_{k\to\infty}\hat{\sigma}^k=\lim_{k\to\infty}\sigma^k=\sigma$$

且对任一 k，任一局中人 i 及 C_i 中任一 c_i，

若 $\quad c_i \notin \underset{d_i \in C_i}{\operatorname{argmax}}\, u_i(\hat{\sigma}^k_{-i}, [d_i]) = \underset{d_i \in C_i}{\operatorname{argmax}}\, \hat{u}^k_i(\hat{\sigma}^k_{-i}, [d_i])$

则 $\quad \hat{\sigma}^k_i(c_i) = 0$； 且 $\sigma_i(c_i) = 0$

这最后一个条件意味着，对于所有的 k，均有

$$\sigma_i \in \underset{\tau_i \in \Delta(C_i)}{\operatorname{argmax}}\, u_i(\hat{\sigma}^k{}_{-i}, \tau_i)$$

因而，σ 满足了作为一个完美均衡的条件(5.1)～(5.3)。 ■

定理 5.1 和 5.2 直接蕴含了序贯均衡的存在性定理，即定理 4.6。

5.4 适度均衡

因为完美均衡的概念是通过多代理人表示而应用于展开型博弈的，所以尽管图 5·2 与图 5·3 具有相同的纯简约正规表示，二者仍是可加以区分的。特别地，$([a_1], [y_2])$和$([x_1], [x_2])$是图 5·2 多代理人表示的两个完美均衡，而$([b_1], [x_1], [x_2])$是图 5·3 多代理人表示唯一的完美均衡。为了避免在这种博弈之间出现区别而仍围绕着序贯均衡集来说，我们需要一个解概念，哪怕将这个解概念应用于正规表示，它也能识别那些总能被扩张成序贯均衡的均衡。作为完美均衡的一个子集，适度均衡就是这样一个解概念。

223

让我们先从完美均衡的一个等特征谈起。给定任一有限策略型博弈 $\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$，并给定任一正数 ε，一个随机策略组合 σ 是一个 ε－完美均衡，当且仅当

$$\sigma \in \bigtimes_{i \in N} \Delta^0(C_i)$$

且对于每个局中人 i 及 C_i 中的每个纯策略 c_i，

若 $\quad c_i \notin \underset{e_i \in C_i}{\operatorname{argmax}}\, u_i(\sigma_{-i}, [e_i])$，则 $\quad \sigma_i(c_i) < \varepsilon$

可以证明，一个随机策略组合 $\bar{\sigma}$ 是 Γ 的一个完美均衡的充要条件是，存在一个序列 $\{\varepsilon(k), \hat{\sigma}^k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k \to \infty} \varepsilon(k) = 0, \quad \lim_{k \to \infty} \hat{\sigma}^k_i(c_i) = \bar{\sigma}_i(c_i), \quad \forall i \in N, \forall c_i \in C_i$$

并且，对每个 k，$\hat{\sigma}^k$ 都是一个 $\varepsilon(k)$－完美均衡。

完美均衡的这一特征可被用来诱导出一个相似但更强的均衡概念。我们说一个随机策略组合 σ 是一个 ε－**适度均衡**(ε-proper equilibrium)，当且仅当

$$\sigma \in \underset{i \in N}{\times} \Delta^0(C_i)$$

(从而所有的纯策略都被赋予严格正概率),且对每个局中人 i 及由 C_i 中两个纯策略 c_i 与 e_i 所组成的每个偶,

若　$u_i(\sigma_{-i}, [c_i]) < u_i(\sigma_{-i}, [e_i])$，则　$\sigma_i(c_i) \leqslant \varepsilon\sigma_i(e_i)$

我们又称一个随机策略组合 $\bar{\sigma}$ 为一个**适度均衡**（proper equilibrium），当且仅当存在一个序列 $\{\varepsilon(k), \sigma^k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(k)=0,\ \lim_{k\to\infty}\hat{\sigma}_i^k(C_i)=\bar{\sigma}_i(c_i),\qquad \forall i\in N,\ \forall c_i\in C_i$$

且对于每个 k，σ_k 是一个 $\varepsilon(k)$－适度均衡。

这样一来，一个完美均衡就是一个可以用其中每个纯策略都被赋予正概率的随机策略组合来逼近的均衡，但任何一个对局中人来说将是一个错误的纯策略都被赋予任意小的概率。虽然一个适度均衡也是一个可用其中每个纯策略都被赋予正概率的随机策略组合来逼近的均衡，但任一可能是局中人所犯错误的纯策略，被赋予的概率都比其它任一对他来说是最佳反应或代价很小的错误的纯策略所被赋予的概率要小得多（相差任意接近于 0 的一个乘积因子）。不难证明，任一适度均衡都是一个完美均衡。 224

定理5.3　对于任一有限策略型博弈，适度均衡集都是完美均衡集的一个非空子集。

证明　存在性的完整证明已在迈尔森（1978a）中给出了，而我在这里只简述一下由科尔伯格和默顿斯（1986）提出的一种更为直观的论证。给定 $\Gamma=(N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$，对于每个小于 1 的正数 ε，令 $\hat{\Gamma}_\varepsilon$ 是这样一个博弈，其中 N 中的每个局中人 i 都具有一个纯策略集，它是 C_i 的所有严格序关系所组成的集，而其结果是如下决定的。在所有局中人都选定了他们的序关系后，每个局中人 i 都按照下述概率分布独立地选择 C_i 中的一个纯策略：i 所选定的序中，第一个策略有着最大的概率，其后的每个策略的概率都是 ε 乘以直接先于其的一个策略的概率。于是，$\hat{\Gamma}_\varepsilon$ 中每个局中人的支付都是该局中人在 Γ 中按照这种方式随机地选择 C 中的纯策略所带给他的期望支付。

根据定理 3.1，对任何一个 ε，我们都可以找到 $\hat{\Gamma}_\varepsilon$ 的一个随机策略均衡。对于每个 ε，令 $\hat{\sigma}^\varepsilon$ 为 $\times_{i\in N}\Delta^0(C_i)$ 中的随机策略组合使得，对于每个局中人 i 的每个策略 c_i，当所有局中人都遵循我们所找到的 $\hat{\Gamma}_\varepsilon$ 的均衡时，$\hat{\sigma}_i^\varepsilon(c_i)$ 是 $\hat{\Gamma}_\varepsilon$ 中局中人 i 选择 c_i 的概率。可以证明 $\hat{\sigma}^\varepsilon$ 是 Γ 的一个 ε－适度均衡。又由集 $\times_{i\in N}\Delta(C_i)$ 的紧性，可以找出 $\{\hat{\sigma}^{\varepsilon(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 的收敛于某个随机策略组合 σ 的子序列，并使得在 $k\to\infty$ 时有 $\varepsilon(k)\to 0$。因而 σ 是一个适度均衡。 ■

恰如完美均衡可被视为识别多代理人表示的序贯均衡的一种方法一样，适

度均衡也可用于识别正规表示的序贯均衡。如下类似于定理5.1的结论，已由
225 科尔伯格和默顿斯（1986）及范·达米（1984）给出证明。

定理5.4 假设 Γ^e 是一个具有完美记忆的展开型博弈，且 τ 是 Γ^e 正规表示的一个适度均衡，那么，存在一个信念概率向量 π 和一个行为策略组合 σ 使得 (σ, π) 是 Γ^e 的一个序贯均衡，且 σ 是 τ 的一个行为表示。

证明 选取 $\{\hat{\tau}^k, \varepsilon(k)\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\hat{\tau}^k$ 是 Γ^k 正规表示的一个 $\varepsilon(k)$ -适度均衡，且 $\lim_{k\to\infty}\hat{\tau}^k=\tau$ 和 $\lim_{k\to\infty}\varepsilon(k)=0$。对于每个 k，由于每个纯策略组合都有着正概率，故 Γ^e 中每个结点在 $\hat{\tau}^k$ 下具有正概率，所以 $\hat{\tau}^k$ 有唯一的一个行为表示 $\hat{\sigma}^k$，并且存在唯一的一个信念向量 $\hat{\pi}^k$ 与 $\hat{\sigma}^k$ 相一致。如果必要的话，通过选取一个子序列，则我们能保证（因为行为策略组合集与信念向量集都是紧集）存在一个行为策略组合 σ 和一个信念向量 π 使得 $\lim_{k\to\infty}\hat{\sigma}^k=\sigma$ 和 $\lim_{k\to\infty}\hat{\pi}^k=\pi$。于是，$\sigma$ 是 τ 的一个行为表示，而 π 又是与 σ 完全一致的。如果有必要的话，通过进一步选取子序列，我们还可假定，对每个局中人 i 和 C_i 中的每对策略 b_i 和 c_i，如果该序列中存在任一 k 使得 $u_i(\hat{\tau}^k{}_{-i}, [b_i])>u_i(\hat{\tau}^k_{-i}, [c_i])$，则对每个 k 都有 $u_i(\hat{\tau}^k_{-i}, [b_i])>u_i(\hat{\tau}^k_{-i}, [c_i])$。（注意到只有有限多个对局中人策略集排序的方式，故至少有一个方式一定在这个序列中出现无限多次。）

对于每个局中人 i 和 S_i 中的每个信息状态 s，令 $C_i^*(s)$ 表示与状态 s 相容的全部策略所组成的集，用 $A_i^*(s)$ 表示 $C_i^*(s)$ 中使 i 对付 $\hat{\tau}^k_{-i}$ 的期望支付最大的所有策略组成的集。（根据 $\{\hat{\tau}^k\}_{k=1}^{\infty}$ 序列的构造，这个最大策略集是与 k 无关的）也就是说，

$$A_i^*(s)=\underset{c_i\in C_i^*(s)}{\operatorname{argmax}}\, u_i(\hat{\tau}^k_{-i}, [c_i])$$

由 ε-适度性，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{b_i\in A_i^*(s)}\hat{\tau}_i^k(b_i)}{\sum_{c_i\in C_i^*(s)}\hat{\tau}_i^k(c_i)}=1$$

226 从而根据方程（4.1），如果在极限行为表示 σ 中有 $\sigma_{i,s}(d_s)>0$，则 C_i 中一定存在某个策略 b_i，使得 $b_i\in A_i^*(s)$，且 $b_i(s)=d_s$。

再利用完美记忆和每个状态 s 在每个 $\hat{\tau}^k$ 下都具有正的先验概率这一事实，我们可以证明，$C_i^*(s)$ 中使 $u_i(\hat{\tau}^k_{-i}, [c_i])$ 对 $C_i^*(s)$ 中的全部 c_i 达到最大值的一个策略，也一定能使 $\sum_{x\in Y_s}\hat{\pi}^k_{i,s}(x)U_i(\hat{\sigma}^k_{-i}, [c_i]\mid x)$ 对 $C_i^*(s)$ 中的全部 c_i 达到最大值（回想在定理5.1和4.4的证明过程中，与此类似的论证）。于是

$$A_i^*(s) = \underset{c_i \in C_i^*(s)}{\operatorname{argmax}} \sum_{x \in Y_s} \hat{\pi}_{i,s}^k(x) U_i(\hat{\sigma}_{-i}^k, [c_i] \mid x)$$

由目标函数的连续性，这个方程又意味着

$$A_i^*(s) \subseteq \underset{c_i \in C_i^*(s)}{\operatorname{argmax}} \sum_{x \in Y_s} \pi_{i,s}(x) U_i(\sigma_{-i}, [c_i] \mid x)$$

我们需要证明行为策略组合 σ 与信念 π 一起是序贯理性的。为此，假设定理不成立，则存在某个局中人 i 的某个信息状态 s 和 D_s 中的某个行动 d_s 使得

$$\sigma_{i,s}(d_s) > 0 \quad \text{但} \quad d_s \notin \underset{e_s \in D_s}{\operatorname{argmax}} \sum_{x \in Y_s} \pi_{i,s}(x) U_i(\sigma_{-i,s}, [e_s] \mid x)$$

由完美记忆（它在每个局中人的信息状态集上诱导出一个偏序），我们可以选取状态 s 使得局中人 i 在 s 之后出现的其任一信息状态处都是序贯理性的（也就是说，在序贯理性不成立的全部信息状态中，我们挑选尽可能接近博弈结束的 s）。然而，由于 $\sigma_{i,s}(d_s)>0$，故存在某个策略 b_i 满足

$$b_i(s) = d_s \quad \text{且} \quad b_i \in \underset{c_i \in C_i^*(s)}{\operatorname{argmax}} \sum_{x \in Y_s} \pi_{i,s}(x) U_i(\sigma_{-i}, [c_i] \mid x)$$

因而，如果局中人 i 在状态 s 之后的所有信息状态处都计划使用行为策略 σ_i，则他在 s 使用行动 d_s 不是最优的；但如果他在 s 之后的所有信息处都使用策略 b_i，则他在 s 使用 d_s 是最优的。不过，这个结论与行为策略组合 σ 是对局中人 i 在 s 之后所有信息状态处（以一致的信念 π）序贯理性的假设相矛盾。因 227
此，不存在任何一个信息状态，使序贯理性不能成立。 ■

作为一个例子，考虑表 5－1 所示的博弈，对于任一小于 1/3 的 ε，策略组合

$$\hat{\sigma} = (\ (1-\varepsilon)\ [a_1 x_1]\ + .1\varepsilon\ [a_1 y_1]\ + .1\varepsilon\ [b_1 x_1]\ + .8\varepsilon\ [b_1 y_1],\ \varepsilon\ [x_2]\ +\ (1-\varepsilon)\ [y_2])$$

是 ε－完美的。所以，如我们曾看到的那样，$([a_1 x_1], [y_2])$（即 $\varepsilon \to 0$ 时 $\hat{\sigma}$ 的极限）是此博弈的一个完美均衡，尽管图 5·3 中博弈任一个序贯均衡都不与之对应。然而，$\hat{\sigma}$ 不是一个 ε－适度均衡，这是因为在局中人 1 对付 $\hat{\sigma}_2$ 时，从 $0\varepsilon + 2(1-\varepsilon) < 6\varepsilon + 3(1-\varepsilon)$ 可知，$b_1 y_1$ 是一个比 $b_1 x_1$ 更糟的错误。于是，ε－适度性要求比值 $\hat{\sigma}_1(b_1 y_1)/\hat{\sigma}_1(b_1 x_1)$ 必须不大于 ε，而这个概率比值在 $\hat{\sigma}$ 中是 8。

事实上，对于任一小于 1 的 ε，在一个 ε－适度均衡中，赋予 $b_1 y_1$ 的概率必须小于赋予 $b_1 x_1$ 的概率，故 x_2 一定是局中人 2 的一个最佳反应。所以，局中人 2 在任一适度均衡中，都一定会使用 x_2；而局中人 1 一定使用其对 x_2 的最佳反应 $b_1 x_1$。因而，表 5－1 中策略型博弈的唯一适度均衡是 $(b_1 x_1, x_2)$。我们可以用形如

$$((1-\varepsilon-.5\varepsilon^2)[b_1x_1]+.5\varepsilon^2[b_1y_1]+.5\varepsilon[a_1x_1]+.5\varepsilon[a_1y_1],$$
$$(1-\varepsilon)[x_2]+\varepsilon[y_2])$$

的 ε-适度均衡来验证它确实是一个适度均衡。这个适度均衡对应于图 5·3 展开型博弈的唯一序贯均衡。

类似地，图 5·2 中博弈的正规表示（它与表 5-1 的差别仅在于其将局中人 1 的两个支付等价策略合并成了一个，并将他的三个纯策略的标号改为 a_1，x_1，及 y_1）的唯一适度均衡是（$[x_1]$ $[x_2]$）。一般来说，添加或删除一个局中人的纯策略，只要它与此局中人别的纯策略（对所有局中人）是支付等价的，不会使适度均衡集有实质性的变化。

然而，添加一个随机多余的纯策略可以改变适度均衡集。例如，考虑表 5-2 和 5-3 中的博弈，我们曾在 2.4 节考虑过它们。表 5-2 中的策略 b_1z_1 是
228 随机多余的，因为它支付等价于随机策略 $.5\ [a_1\cdot]+.5\ [b_1y_1]$。于是表 5-3 与表 5-2 的区别仅在于剔除了一个随机多余的纯策略。然而，这两个博弈的适度均衡却是不同的。表 5-2 唯一的适度均衡是（$[a_1\cdot]$，$[7/12]$ $[x_2]$ + $[5/12]$ $[y_2]$），但表 5-3 唯一的适度均衡则是（$[a_1\cdot]$，$.5\ [x_2]$ + $.5\ [y_2]$）。于是，删除局中人 1 的一个随机多余的纯策略改变了局中人 2 唯一的适度均衡策略。

表 5-2　　一个策略型博弈：图 2·5 的纯简约表示

C_1	C_2	
	x_2	y_2
$a_1\cdot$	6，0	6，0
b_1x_1	8，0	0，8
b_1y_1	0，8	8，0
b_1z_1	3，4	7，0

表 5-3　　一个策略型博弈：图 2·5 的完全简约的正规表示

	C_2	
C_1	x_2	y_2
$a_1\cdot$	6，0	6，0
b_1x_1	8，0	0，8
b_1y_1	0，8	8，0

为了理解局中人 2 为什么必须在这两个博弈的适度均衡中采用不同的随机策略，首先注意到，只有在使用 x_2 的概率在 1/4 与 3/4 之间时，$a_1\cdot$才是局中人 1 的最佳反应。所以，要证明局中人 1 使用 $a_1\cdot$的适度均衡有道理，局中人 2 在逼近这个适度均衡的任一 ε-适度均衡中，必须乐意于在 x_2 与 y_2 之间随

机化。对于表 5－2，这个意愿意味着

229

$$8\hat{\sigma}_1(b_1y_1) + 4\hat{\sigma}_1(b_1z_1) = 8\hat{\sigma}_1(b_1x_1) \tag{5.4}$$

于是 b_1x_1 一定是与 b_1y_1 或 b_1z_1 并列为局中人 1（在 a_1·后）的次最佳反应（否则，这个方程的一边将必须是另一边的 ε 倍数量级）。对于没有 b_1z_1 的表 5－3，相应的方程是

$$8\hat{\sigma}_1(b_1y_1) = 8\hat{\sigma}_1(b_1x_1)$$

因而，在表 5－3 中，局中人 2 必须使用 $.5[x_2] + .5[y_2]$，故局中人 1 将乐意赋予 b_1y_1 和 b_1x_1 可比较的概率；从而表 5－3 具有形如

$$\{(1-\varepsilon)[a_1\cdot] + .5\varepsilon[b_1x_1] + .5\varepsilon[b_1y_1],\ .5[x_2] + .5[y_2]\}$$

的 ε－适度均衡。但在表 5－2 中，如果局中人 2 使用 $.5[x_2] + .5[y_2]$，那么 b_1z_1 对局中人 1 来说将好于 b_1x_1 或 b_1y_1（因为 $3/2+7/2>0/2+8/2$），故在 ε－适度均衡 $\hat{\sigma}$ 中，$\hat{\sigma}_1(b_1z_1)$ 应该比 $\hat{\sigma}(b_1x_1)$ 大得多，所以方程（5.4）不可能满足。为了让局中人 1 乐意在一个 ε－适度均衡中满足（5.4）式，局中人 2 必须运用 $(7/12)[x_2] + (5/12)[y_2]$ 使局中人 1 在 b_1x_1 与 b_1z_1 之间无差别。于是，譬如说，表 5－2 具有形如

$$\{(1-\varepsilon-2\varepsilon^2/3)[a_1\cdot] + \{(\varepsilon+\varepsilon^2)/3\}[b_1x_1] + (\varepsilon^2/3)[b_1y_1] + (2\varepsilon/3)[b_1z_1],\ (7/12)[x_2] + (5/12[y_2])\}$$

为什么对局中人 1 添加一个随机多余的纯策略会改变局中人 2 的理性行为呢？科尔伯格和默顿斯（1986）证明了，缺乏这种不变性是定理 5.4 的一个不可避免的结果。具体地说，表 5－2 是图 5·4 中展开型博弈的纯简约正规表示，

230

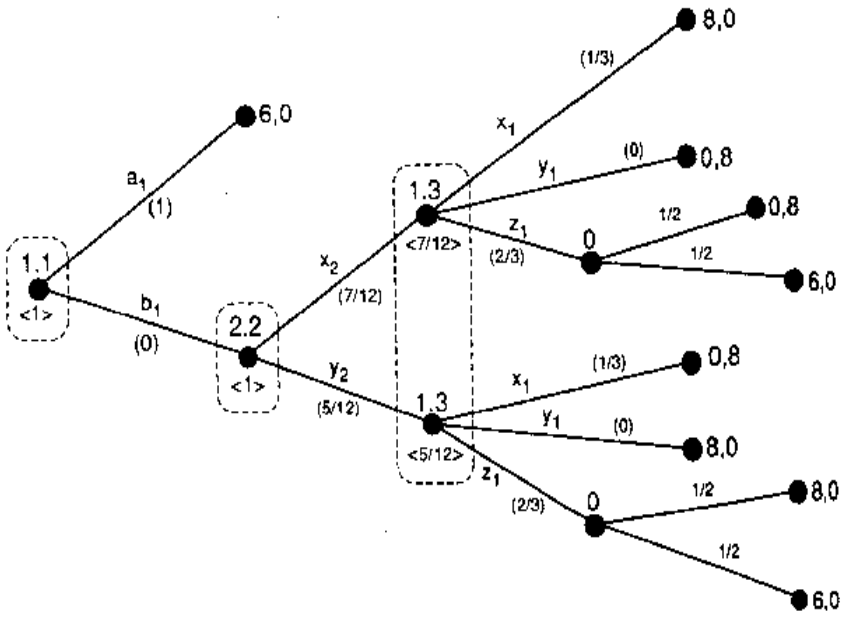

图　5·4

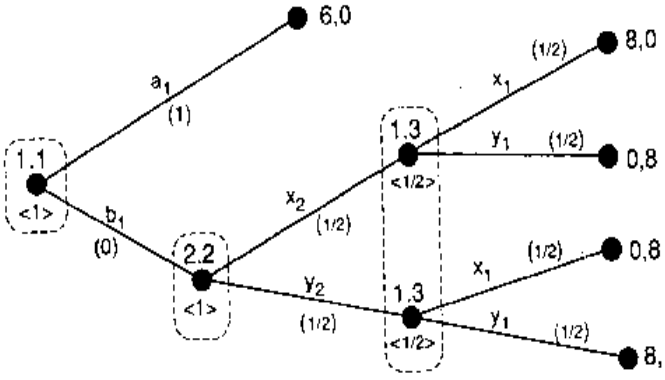

图 5·5

而表 5－3 则是图 5·5 中展开型博弈的纯简约正规表示。这两个展开型博弈各自具有唯一的一个子博弈完美的序贯均衡，分别示于图 5·4 和 5·5 中。特别是，子博弈完美性要求局中人 2 在图 5·4 中使用 (7/12) $[x_2]$ + (5/12) $[y_2]$，而在图 5·5 中使用 .5 $[x_2]$ + .5 $[y_2]$（在每个图中，从局中人 2 的决策结开始的子博弈都具有唯一的一个均衡，但这两个均衡并不相同）。因此，两个具有相同的完全简约正规表示的展开型博弈可以有不相交的序贯均衡局方案集，而适度均衡对添加随机多余策略的敏感性则正是这一事实不可避免的结果。

5.5 持久均衡

再次考虑我们在第 3 章中所见到的性别之战博弈，如表 5－4 所示。这个博弈有三个均衡：($[f_1]$, $[f_2]$)、($[s_1]$, $[s_2]$) 及 (.75 $[f_1]$ + .25 $[s_1]$, .25 $[f_2]$ + .75 $[s_2]$)*。所有这 3 个均衡都是完美且适度的。

表 5－4　　策略型性别之战博弈

	C_2	
C_1	f_2	s_2
f_1	3, 1	0, 0
s_1	0, 0	1, 3

这个博弈的随机均衡对两个局中人来说，都比任一纯策略均衡要差。这表示他们的行为缺乏协调，而且没有一个局中人能单方面克服它。正如谢林 (1960) 已经论证的那样，在这样的一个博弈中，两个局中人应该探索某种焦点因素，以使他们摆脱这个均衡而转向 ($[f_1]$, $[f_2]$) 或 ($[s_1]$, $[s_2]$)。因此，随机均衡作为这个博弈的解，看来是不稳定或不合情理的。卡莱和萨梅特

231

* 原文误为 .25 $[s_2]$ + .75 $[f_2]$ ——译者注。

(Samet，1984) 提出了持久均衡的概念，这一概念排除了本例中的这个随机均衡。

给定有限策略型博弈 $\Gamma-(N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$，一个**收缩核** (retract) 就是形如 $\Theta_i=\times_{i\in N}\Theta_i$ 的集 Θ，使得对每个 i，Θ_i 都是 $\Delta(C_i)$ 的一个非空闭凸子集。对于任一正数 ε，随机策略组合 σ 在随机策略组合集 Θ 的 $\varepsilon-$**邻域** (ε-neighborhood) 内，当且仅当 Θ 中存在某个 $\hat{\sigma}$ 使得

$$|\hat{\sigma}_i(c_i)-\sigma_i(c_i)|<\varepsilon,\ \forall i\in N,\ \forall c_i\in C_i$$

一个收缩核 Θ 是吸收的 (absorbing)，其充要条件是存在某个正数 ε，使得对于 Θ 的 $\varepsilon-$邻域内的每个随机策略组合 σ，Θ 中都存在某个 ρ 满足

$$\rho_i\in\underset{\tau_i\in\Delta(c_i)}{\operatorname{argmax}}\ u_i(\sigma_{-i},\tau_i),\ \forall i\in N$$

这就是说，如果对任何一个充分接近一个收缩核的随机策略组合，都存在每个局中人的最佳反应，且这些最佳反应所组成的随机策略组合属于此收缩核，那么，这个收缩核就是吸收的。于是，在某个意义上，如果我们只假定局中人将使用接近于吸收的收缩核的策略，则理性的反应会把局中人引入此收缩核。

最小的吸收收缩核就是一个**持久** (persistent) 收缩核，即一个收缩核是持久的，其充要条件是，它是吸收的，而且不存在任何别的吸收收缩核 $\hat{\Theta}=\times_{i\in N}\hat{\Theta}_i$，使得对每个 i 均有 $\hat{\Theta}_i\subseteq\Theta_i$。包含在一个持久收缩核中的任一均衡都是一个**持久均衡** (persistent equilibrium)。

卡莱和萨梅特 (1984) 证明了下述的一般存在性定理。 232

定理5.5　*对于任一有限策略型博弈，持久均衡集是非空的，且至少包含一个适度均衡。*

在性别之战博弈中，存在3个吸收收缩核：$\{[f_1]\}\times\{[f_2]\}$，$\{[s_1]\}\times\{[s_2]\}$ 及 $\Delta(\{f_1,s_1\})\times\Delta(\{f_2,s_2\})$。而 $\{[f_1]\}\times\{[f_2]\}$ 和 $\{[s_1]\}\times\{[s_2]\}$ 是仅有的两个持久收缩核，故 $([f_1],[f_2])$ 和 $([s_1],[s_2])$ 也就是仅有的两个持久均衡。

卡莱和萨梅特 (1984) 还讨论了如表5-5所示的三人博弈，其中每个局中人 i 有 $C_i=\{x_i,y_i\}$。均衡 $([x_1],[x_2],[x_3])$ 是完美的、适度的及持久的 (对于没有一个局中人有多于两个纯策略的博弈来说，完美性和适度性总是一致的)。然而，另有一个不太直观的均衡 $([y_1],[y_2],[x_3])$，它既是完美的又是适度的，但不是持久的。[注意

$$(.5\varepsilon[x_1]+(1-.5\varepsilon)[y_1],\ .5\varepsilon[x_2]+(1-.5\varepsilon)[y_2],(1-\varepsilon)[x_3]+\varepsilon[y_3])$$

是 $\varepsilon-$完美的和 $\varepsilon-$适度的。] 重复剔除弱劣策略亦能剔除 $([y_1],[y_2],[x_3])$ 这一均衡。

表 5-5 一个三人策略型博弈

C_1	C_2 和 C_3			
	x_3		y_3	
	x_2	y_2	x_2	y_2
x_1	1, 1, 1	0, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 0
y_1	0, 0, 0	0, 0, 0	0, 0, 0	1, 1, 0

5.6 均衡稳定集

科尔伯格和默顿斯（1986）试图发展一种策略型博弈的解理论，当通过完全简约的正规表示将其用于展开型博弈时，这个理论总能够识别（以适当的信念向量）那些可被扩张成序贯均衡的均衡。然而，正如图 5·4 和 5·5 中的博弈
233 所说明的那样，两个博弈可以有相同的完全简约正规表示，而仍有不相交的序贯均衡集（在简约正规表示的随机策略组合集内考虑时）。于是，科尔伯格和默顿斯扩大范围来考虑将均衡集而不是个别的均衡作为博弈“解”的候选对象。

令 $\Gamma=\{N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\}$ 为一个有限策略型博弈，对 $\mathbf{R}^N$ 中任一满足

$$0<e_i\leqslant 1,\quad \forall i\in N$$

的向量 e 和 $\times_{i\in N}\Delta^0(C_i)$ 中任一随机策略组合 λ，令 $\delta_{e,\lambda}:\times_{i\in N}\Delta(C_i)\to\times_{i\in N}\Delta^0(C_i)$ 被定义为

$$\delta_{e,\lambda}(\sigma)=\hat{\sigma}\quad \text{当且仅当}\quad \forall i\in N,\ \hat{\sigma}_i=(1-e_i)\sigma_i+e_i\lambda_i。$$

令 $\hat{\Gamma}_{e,\lambda}=\left(N,(C_i)_{i\in N},\left(u_i[\delta_{e,\lambda}([\cdot])]\right)_{i\in N}\right)$，即 $\hat{\Gamma}_{e,\lambda}$ 是 Γ 的扰动，其中每个局中人 i 都具有偶然实施随机策略 λ_i 的一个独立概率 e_i。我们称集 Θ 为一个**预稳定的**（prestable）集的充要条件是，它是 Γ 的均衡集的一个闭子集，并且对于任一正数 ε_0，都存在某个正数 ε_1，使得对于 $\mathbf{R}^N$ 中的任一 e 和 $\times_{i\in N}\Delta^0(C_i)$ 中的任一 λ，只要对每个局中人 i 均有 $0<e_i<\varepsilon_1$，则 $\hat{\Gamma}_{e,\lambda}$ 至少存在一个处于 Θ 的 ε_0－邻域内的纳什均衡。这就是说，对于每个其分量都充分小的 e 和每个对所有纯策略都赋予正概率的 λ，一个预稳定集至少包含 Γ 的一个均衡，它与每个扰动博弈 $\hat{\Gamma}_{e,\lambda}$ 的某个均衡很接近。科尔伯格和默顿斯（1986）由此定义 Γ 的一个均衡**稳定集**（a stable set）为任一不包含其它预稳定

子集的预稳定集，即最小的预稳定集。

在完美均衡的存在性的证明过程中，我们构造了一个完美均衡，它是形如 $\hat{\Gamma}_{e,\lambda}$ 的博弈之均衡的一个极限［其中 $e=(1/k,\cdots,1/k)$ 且 $k\to\infty$］。然而，一个均衡稳定集必须包含所有这种形式博弈序列的均衡在 e 向量的所有分量都趋向于 0 时的极限。

科尔伯格和默顿斯已证明了下述两个定理。

定理5.6　对于任一有限策略型博弈 Γ，至少存在一个连通的均衡集，且包含一个稳定的子集。

定理5.7　若 Θ 是博弈 Γ 的任一稳定集，则 Θ 包含任何如下博弈的一个稳定集，这些博弈都是由 Γ 通过剔除任一弱劣纯策略或对 Θ 中的每个均衡都为劣反应（即不是最佳反应）而得到的。 234

科尔伯格和默顿斯（1986）给出了一个展开型博弈的例子，这个博弈具有唯一的序贯均衡，而它的简约正规表示的稳定集却又不包含这唯一的序贯均衡。不过，他们还定义了完全稳定（fully stable）均衡集的概念，它可能比稳定均衡集大，并且在每个以 Γ 为其正规表示或简约正规表示的展开型中，它总是包含对应于序贯均衡的适度均衡。但是，完全稳定均衡集可能包含那些对弱劣策略也赋予了正概率的均衡。

为了理解定理 5.6 和 5.7 的功能，考虑图 4·10 的展开型博弈。这个博弈的正规表示如表 5－6 所示，且此策略型博弈的均衡集有两个连通部分。第一个是由单个均衡

$$\{(1/7)[x_1x_2]+(6/7)[x_1y_2],(2/3)[e_3]+(1/3)[f_3]\}$$

所构成的连通集；第二个是由形如

$$([y_1y_2],\ \beta[e_3]+(1-\beta-\gamma)[f_3]+\gamma[g_3])\quad\text{其中}\quad 4\beta+3\gamma\leqslant 1$$

的所有均衡所构成的连通集（这第二个连通集包含了 4.5 节分 3 种情形讨论所产生的各个均衡之并集）。利用定理 5.7 可以证明，这第二个连通的均衡集不包含任何的稳定子集。对其每个均衡来说，局中人 1 在其决策结点 1.2 选择 x_2 不是最佳反应（另一方面，在 1.1 选择 x_1 是一个最佳反应的集合中存在均衡）。从而由定理 5.7，第二个连通集的任一稳定子集必须包含剔除了局中人策略 x_1x_2 和 y_1x_2 后余下博弈的一个稳定子集。然而，在这两个策略被剔除之后而保留下来的博弈中，策略 f_3 和 g_3 成为局中人 2 的弱劣策略，故定理 5.7 的再次应用意味着，第二个连通集的稳定子集必须包含剔除策略 x_1x_2、y_1x_2、f_3 及 g_3 后所余下的博弈的一个稳定集。但剔除了这些策略，也就剔除了第二个连通集中所有的均衡，（而空集是不稳定的！）所以，不可能存在第二个连通均衡集的稳定子集。于是，由稳定集的存在性定理知，只有一个均衡所 235

组成的第一个连通均衡集必定是一个稳定集。

表 5-6　　一个策略型博弈：图 4·10 的正规表示

C_1	C_1		
	e_3	f_3	g_3
x_1x_2	2.0, 4.0	-1.5, 7.0	0.5, 7.5
x_1y_2	1.5, 4.0	-0.5, 3.5	1.0, 3.0
y_1x_2	0.5, 0	-1.0, 3.5	-0.5, 4.5
y_1y_2	0, 0	0, 0	0, 0

作为另一个例子，考虑赵（Cho）和克雷普斯（1987）所提出的啤酒牛奶肉饼博弈（Beer Quiche game）。在这个两人博弈中，局中人 1 的类型可能是“凶暴的”或“软弱的”，其概率分别为 .9 或 .1。知道自己的类型的局中人 1，在他走进一家酒馆后，必须要求提供啤酒或牛奶肉饼。如果他是凶暴的，则他喜爱喝啤酒；但如果他是软弱的，则他喜爱吃牛奶肉饼。局中人 2 并不知道他的类型，但在看到局中人 1 所要求供应的东西后，她必须决定是与他打架，还是任其自便而走开。局中人 2 的支付是：若走开则为 0；若打架且 1 是软弱的则为 +1；若打架且 1 是凶暴的则为 -1。局中人 1 的支付是 $x+y$，其中若他要求供应的东西是啤酒与牛奶肉饼中所喜爱的，则 $x=1$，否则 $x=0$；且在他不与局中人 2 打架时，$y=2$，否则 $y=0$。此博弈具有两个连通的序贯均衡集。

236

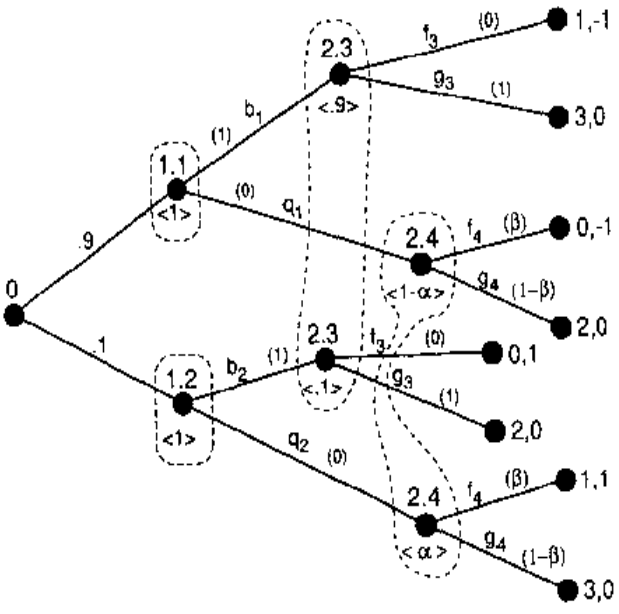

图 5·6

在如图 5·6 所示的一个均衡集中，不论局中人 1 的类型是什么，他总是要求供应啤酒；当 1 要求供应啤酒时，局中人 2 不打架；但若 1 要求供应牛奶肉饼时，她以至少 1/2 的概率 β 与 1 打架。为使这样一个局方案成为一个序贯均衡，局中人 2 对局中人 1 要求供应牛奶肉饼而他又是软弱的这一事件的信念概率 α 必须至少是 1/2。正式地表达，参数 α 和 β 必须满足如下条件：

$$1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad \text{且} \quad \beta = 1, \quad \text{或者} \quad \alpha = 1/2 \quad \text{且} \ 1/2 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

在如图 5·7 所示的另一个均衡集中，不论局中人 1 的类型是什么，他总是

要求供应牛奶肉饼；当1要求供应牛奶肉饼时，局中人2不打架，但当1要求 237
供应啤酒时，她将以至少为1/2的概率β与之打架。为使这样一个局方案成为一个序贯均衡，局中人2对局中人1要求供应啤酒且他是软弱的这一事件的信念概率α必须至少是1/2。正式地表达，参数α和β必须满足如下条件：

$$1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad 且 \quad \beta = 1, \text{或者} \quad \alpha = 1/2 \quad 且 \quad 1/2 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

在图5·7的均衡中，即使局中人1是凶暴的，他也要求供应牛奶肉饼，这看起来多少有点违背直觉。这些均衡依赖于要求供应啤酒会被视为软弱的证据，但软弱型的人比凶暴型的人又少倾向于要求供应啤酒。具体地讲，局中人2对付要求供应啤酒是软弱型局中人1最优选择的随机策略集，是她对付要求供应啤酒是凶暴型局中人1最优选择的随机策略的一个真子集。因此，自然假设局中人2对局中人1是软弱的这一事件在1要求供应啤酒时所赋予的信念概率，不应该大于在1要求供应牛奶肉饼时所赋予的概率。这个准则剔除了图5·7中的序贯均衡，而只留下图5·6中的序贯均衡，其中局中人1要求供应啤酒。我们可以利用定理5.7证明，不存在局中人1买牛奶肉饼的均衡的稳定子集，从而具体地阐述了这个直觉。

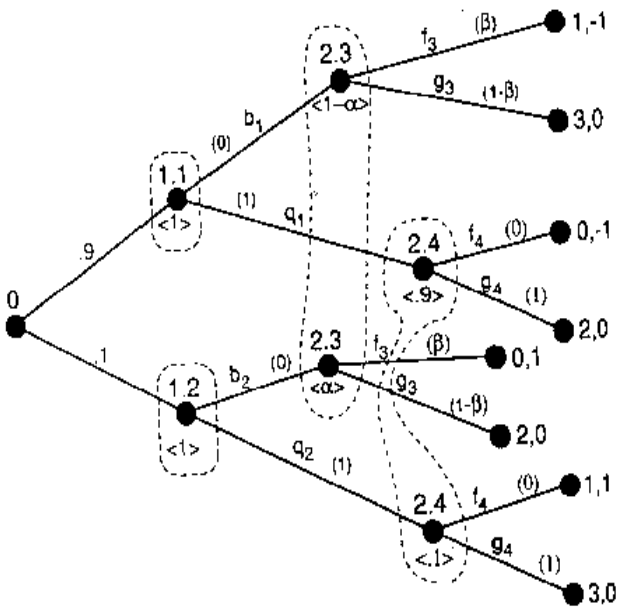

图　5·7

首先考虑如表5－7所示的正规表示。这里，局中人1的信息状态1是凶暴型，1的状态2是软弱型，局中人2的状态3是已看到1要求供应啤酒时的状态，而局中人2的状态4是已看到1要求供应牛奶肉饼时的状态。可以验证，违反直觉的均衡（$[q_1q_2]$，$[f_3g_4]$）是完美和适度的，因为它可以用ε－适度均衡逼近，其中q_1b_2的概率很小但远大于b_1q_2和b_1b_2的概率。不过，策 238
略q_1b_2（若是凶暴型则要求供应牛奶肉饼，而若是软弱型则要求供应啤酒）对局中人1来说是强劣的（被$(1/9)[b_1q_2] + (8/9)[q_1q_2]$，它具有要求供应啤酒的概率1/9*，但只有当他是凶暴型时才要求）。剔除q_1b_2后，相对于g_3f_4言，f_3f_4、f_3g_4及g_3g_4对局中人2来说是弱劣的，而b_1b_2是局中人1对g_3f_4的唯一最佳反应。因此，除（b_1b_2，g_3f_4）之外所有的均衡都可以用重复剔除弱劣策略而删除。于是，由定理5.7，任一均衡稳定集都必须包含

* 原文为“相同的概率.1”，严格地讲1/9不等于.1——译者注。

这个均衡，其中局中人1总是喝啤酒；而局中人2在他喝啤酒时走开，但在他要求供应牛奶肉饼时与之打架。

表5-7 啤酒－牛奶肉饼策略型博弈：正规表示

C_1	C_2			
	f_3f_4	f_3g_4	g_3f_4	g_3g_4
b_1b_2	0.9, −0.8	0.9, −0.8	2.9, 0	2.9, 0
b_1q_2	1.0, −0.8	1.2, −0.9	2.8, 0.1	3.0, 0
q_1b_2	0, −0.8	1.8, 0.1	0.2, −0.9	2.0, 0
q_1q_2	0.1, −0.8	2.1, 0	0.1, −0.8	2.1, 0

在多代理人表示中，不存在弱劣策略，但定理5.7仍可用来证明不存在局中人1要求供应牛奶肉饼之均衡的稳定集。在局中人1要求供应牛奶肉饼的均衡集中，存在一个均衡（其$\alpha=1/2$和$\beta=1/2$），其中要求供应啤酒将是凶暴代理人1.1的最佳反应，但不存在要求供应啤酒是软弱代理人1.2的最佳反应的均衡。于是，局中人1要求供应牛奶肉饼的均衡的稳定集，必然在剔除b_2（即软弱代理人的选择是要求供应啤酒）所得到的修改博弈中有一个非空子集。从而，买啤酒在这个修改博弈中成为凶暴的象征，故f_3（即在要求供应啤酒时打架）对代理人2.3来说是弱劣的。但当f_3被剔除之后，则凶暴代理人在余下博弈的任一均衡中都绝不会去买牛奶肉饼。因而由定理5.7，原博弈的多代理人表示没有局中人1总是要求供应牛奶肉饼的均衡稳定子集。

这个论证不会剔除图5·6中局中人1要求供应啤酒的那些均衡，因为对于这些均衡，局中人1唯一不是最佳反应的行动是q_1，即凶暴代理人选择牛奶肉饼（当$\beta=1/2$时，牛奶肉饼对软弱代理人来说是一个最佳反应）。剔除了凶暴代理人买牛奶肉饼的选择，保证了局中人2想与买牛奶肉饼的局中人1打架，但这仍然是$\beta=1$时的均衡。

赵和克雷普斯（1987）及班克斯和索贝尔（Banks and Sobel，1987）提出了与科尔伯格－默顿斯稳定性有关的另外一些解准则，并应用于有经济学意义的信号传递博弈。

5.7 生成性质

239 一旦我们确定了一个有限局中人集N，并对每个i都确定了有限纯策略集C_i，则可能的支付函数$(u_i)_{i\in N}$集就是$\mathbf{R}^{N\times C}$，其中$C=\times_{i\in N}C_i$。这个集$\mathbf{R}^{N\times C}$是一个有限维向量空间。我们说一个性质**对所有策略型生成博弈**（for all

generic games in strategic form）都成立，当且仅当对于每个非空有限集 N 和 $(C_i)_{i\in N}$，$\mathbf{R}^{N\times C}$中都存在一个开稠密的支付函数 $(u_i)_{i\in N}$集，由它生成的所有博弈 $(N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ 全都满足这一性质。另一方面，我们又可以说这个性质对某些策略型生成博弈（for some generic games in strategic form）成立，其充要条件是，存在某些非空有限集 N 和 $(C_i)_{i\in N}$及 $\mathbf{R}^{N\times C}$中的一个非空开的支付函数集，由它生成的博弈都满足这个性质。这就是说，如果某些生成博弈满足了这个性质，则对其支付进行任一充分小的扰动将生成一个同样满足这个性质的新博弈，在这种意义上讲，就存在一个博弈**稳固地**［**或坚固地**(robustly)］满足这一性质。如果所有生成博弈都满足某个性质，那么，即使原博弈不满足这一性质，对任一博弈中支付的小扰动所生成的新博弈都稳固地满足这个性质。［关于生成性质的进一步讨论，参见马斯科莱尔（MasColell），1985，pp.316—319。］

给定任一展开型博弈 Γ^e，我们可以通过在 $\mathbf{R}^{N\times\Omega}$中选取支付函数而生成与 Γ^e 仅在支付上不同的一个博弈，其中 Ω 是 Γ^e 中所有终结点组成的集，N 是 Γ^e 的局中人集。我们可以说一个性质**对所有展开型生成博弈**（for all generic game in extensive form）都成立，其充要条件是，对于每个展开型博弈 Γ^e，在 $\mathbf{R}^{N\times\Omega}$中都存在一个开稠密支付函数集，由它所生成的与 Γ^e 仅在支付上有所不同的博弈全都满足这个性质。一个性质对某些展开型生成博弈（for some generic games in extensive form）成立的充要条件是，存在某个展开型博弈 Γ^e 和 $\mathbf{R}^{N\times\Omega}$中的一个非空开的支付函数集，由它所生成的与 Γ^e 仅在支付上有所不同的博弈都满足这个性质。

范·达米（1987）已经证明（参见其定理 2.4.7、2.5.5 及 2.6.1），对于所有策略型生成博弈，所有的均衡都是完美的和适度的。初看起来，这个结论似乎表明完美性和适度性通常不具有剔除不合理均衡的机能。然而，对于某些展开型生成博弈来说，无论是正规表示还是多代理人表示，都存在不完美和不适度的非空均衡集。例如，回顾图 4·5 中的博弈，对于由图 4·5 通过对支付进行小于 ± 0.5 的变化所导出的每一个博弈，$([y_1], [y_2])$ 都是它们正规表示的一个不完美且不适度的均衡。为了理解策略型生成性与展开型生成性之间的这个区别是如何产生的，必须注意到，对于所有策略型生成博弈，没有两个博弈的支付是恒等的。但是，对于由图 4·5 通过改变终结点支付所生成的每一个 240
博弈的正规表示来说，局中人 2 从 $([y_1][x_2])$ 所获得的支付与从 $([y_1], [y_2])$ 所获得的支付同样多。

因而，尽管像完美性和适度性这样的均衡精炼是从策略型博弈的角度定义的，但只有在把它们应用于展开型博弈时，其实质重要性和功能才真正明显地显示出来。另一方面，对于某些策略型生成博弈，持久均衡能保证至少排除一个均衡。例如，表 5－4 中性别之战博弈，在对其支付经过小扰动后（每个支付的变化小于 ± 0.5），仍将存在一个非持久的随机均衡。

5.8 结论

本章及前一章的讨论，只是对纳什均衡的精炼方面丰富的文献的一部分做一简述［还可参见麦克伦南（McLennan，1985）；雷尼（Reny，1987）；富登伯格和泰罗尔（Tirole，1988）；法雷尔（1988）；格罗斯曼和佩里（Grossman and Perry，1986）；奥野－藤原（Okuno-Fujiwara）、波斯特尔韦特和梅拉思（Postlewaite and Mailath，1919）；科尔伯格（1989）］。我们能用各种各样的问题来评价这种种不同的精炼。所提出的解概念满足一般存在性定理吗？当我们用一种看似无关的方式改变博弈时，解集是不变的吗？解概念排除了所有在直觉上不合乎情理的均衡了吗？解概念包含了所有在直觉上合乎情理的均衡了吗？其内在逻辑作为理性行为的一个特征是令人信服的吗？

不幸的是，至今我们还没有一个解概念能对所有这些问题给出一个无条件的回答“是”。举例而言，我们既没有令人信服的论证来证明理性而又智能的局中人不可能按照一个非适度的均衡去行动，又没有令人信服的论证来说明每个适度均衡都一定被认为是理性而又智能的局中人在博弈中行动的一种可能方式。因此，难以断定适度均衡在3.4节的意义上是应被接受为上解还是下解。如同在检验完美性和适度性时我们所做的那样，考虑具有小概率犯错的扰动博弈的基本机理是，对于均衡不依赖于局中人完全忽视在此博弈中具有零概率的可能结果这一（不合理）假定，这些模型给出了检验其是否有正当理由的一种
241 方法。于是，我们只能论证，关于理性而又智能的局中人在博弈中可能会如何行动这一问题，检验均衡的完美性和适度性给出了阐述我们对其部分直觉准则的有用方法。对文献中其他的解概念，可做类似评述。

基于对序贯均衡概念的逻辑推导，人们有理由主张序贯均衡可以作为展开型博弈的上解，从而是一个序贯均衡可能成为理性而又智能局中人行为合理特征的一个必要（即使非充分）条件。然而，如4.4节中所定义的完全一致性这一要求可能不完全令人信服，故存在另外某种合理的一致性要求，它能考虑比完全一致性多而比弱一致性少的信念向量。这样的一些中间的一致性条件已经由富登伯格和泰罗尔（1988）在其**完美贝叶斯均衡**（perfect Bayesian equilibrium）的定义中使用了。

我们应该对纳什均衡的**精炼**（refinements）和在均衡集中**选择**（selection）准则加以区分。纳什均衡的一个精炼是一个解概念，意在对博弈中理性而又智能的行为给予更准确的刻划。然而，正确表征理智行为的最终精炼，对许多博弈（譬如说性别之战博弈）来说，仍可能包含多重均衡。这就是说，一个博弈可能有许多不同的均衡，使得如果在某给定文化或环境中局中人互相预期按照这些均衡中的任何一个行动时，则他们能够理性而又智能地实现这种预期。

而一个选择准则，则是从所给数学博弈结构的观点定义的任一客观标准，它能够用于确定每个局中人所预期的焦点均衡。就此而论，一个选择准则只有当局中人的文化背景中有某些事情使他们偏爱而把注意力聚集到这个选择准则时才是有效的。合作博弈理论中的公平与效率准则可以被理解为这样的选择准则。另外一些已被提出的解概念都是建立在局中人共享丰富的自然通信语言的基础之上的 242
(法雷尔，1988；迈尔森，1989)；这些解概念同样被认为是均衡选择准则，而不是那种只要局中人都是理性而又智能的就被认为是有效的均衡精炼。

习　题

5.1　考虑如表 5.8 所示的两人策略型博弈。

a. 找出这个博弈所有的纳什均衡。在这些均衡中，哪些是（颤抖手）完美的？哪些是适度的？

b. 证明局中人 1 的策略 bg 是随机多余的。

c. 现考虑剔除了多余策略 bg 后简约博弈。这个简约博弈的哪些均衡是完美的？这个简约博弈的哪些均衡是适度的？

d. 用习题 4.7（第 4 章）的观点解释（a）和（c）的回答。

表 5-8　　**一个策略型博弈**

	C_2	
C_1	c	d
ae	5，4	5，4
be	8，3	1，9
bf	3，6	7，2
bg	4，5	6，3

5.2　考虑如表 5-9 所示的策略型两人博弈。

a. 描述此博弈所有的纳什均衡所组成的集。

表 5-9　　**一个策略型博弈**　243

	C_2		
C_1	x_2	y_2	z_2
x_1	1，2	3，0	0，3
y_1	1，1	2，2	2，0
z_1	1，2	0，3	3，0

b. 证明 $(.5[x_1] + .5[z_1], [x_2])$ 不是此博弈的一个完美均衡。

c. 哪些纳什均衡是完美的?

d. 找出此博弈的一个适度均衡。

5.3 考虑如图 4·19 所示的博弈。

a. 证明局中人 1 在其信息状态 2 选择 z_1 的均衡集不包含任何稳定的子集。

b. 说明你在 (a) 中的论证为什么不能应用于图 2·8 中的博弈。

6

具有通信的博弈

6.1 合同和相关策略

在很多类似于囚徒困境（表 3－4）的博弈中，局中人从纳什均衡得到的 244
支付，相对其他非均衡结果而言是很低的。在这样的局势中，如果有可能的话，局中人将希望去改造这个博弈，扩大其均衡集以包括更好的结果在内。局中人可能力图通过相互通信并协调他们的行动，甚至通过订立合同式协议，以设法改造这个博弈（扩大均衡集的另一种途径，即建立一种长期关系或重复博弈将在第 7 章加以研究。）

在第 2 章中，我们曾论证过，假设每个局中人同时并又独立地选择其策略是不失一般性的。我们又论证了，从理论上讲，一个局中人为了与其他局中人通信和协调所能做的一切，都可以在展开型博弈中用行动来描述，从而计划这些通信行动本身也就成为其策略选择的一部分。

尽管这一观点在理论上可以是充分一般的，但它不一定是考虑所有博弈最富有成效的一种方法。在很多局势中，通信的可能性如此之多以致严格地遵循这种建模程序将要求我们考虑一些巨大而又复杂的博弈。例如，为了在博弈模型中规范地表达局中人 1 对局中人 2 只说一个单词的机会，对字典中的每个单词，局中人 1 都必须有一个行动，而局中人 2 都必须有一个信息状态！在这种局势中，把通信和协调的可能性排除在我们所要明确构造的博弈模型之外，可能是更为有效的。如果我们这样做，那我们就必须代之以使用这样的解概念， 245
它们除了表示博弈模型中所明显描述的策略选择外，还要体现出局中人具有隐性通信机会的假定。在本章中，我们就研究这样一些解概念，并指出它们确实能为理解很多局势提供重要的分析见解。

让我们从考虑内含协调假定最极端的类型出发：即局中人不但可以相互通信，而且甚至可以联合签订有约束力的合同（或契约）去协调他们的策略。考虑表 6－1 的例子（它是囚徒困境的一个修改型）。在这个博弈中，唯一的均衡是 (y_1, y_2)，并给出支付配置 $(1, 1)$。现在假设某个律师或者其他一个外界干涉者出示了一份契约给两个局中人看，其上写道："如果这份契约具有两个局中人的签名，则意味着各人许诺将选择 x_1 和 x_2。如果这份契约只有一个人

签字，则表示签名的他或她将选择 y_1 或 y_2。" 每个局中人 i 对契约签名的选择可以作为策略 s_i 引入到对这个博弈的描述中，如表 6-2 所示。这个变换后的博弈有一个均衡 (s_1, s_2)，它是唯一的完美均衡并给出支付配置 (2, 2)。

表 6-1　　一个策略型博弈

	C_2	
C_1	x_2	y_2
x_1	2, 2	0, 6
y_1	6, 0	1, 1

表 6-2　　一个策略型博弈：包含每个局中人的一个签约策略

	C_2		
C_1	x_2	y_2	s_2
x_1	2, 2	0, 6	0, 6
y_1	6, 0	1, 1	1, 1
s_1	6, 0	1, 1	2, 2

如果契约责成局中人承担执行一个相关或联合随机的策略，那就甚至有可
246 能获得更好的期望支付。例如，另一份契约规定，如果两个局中人都在这份契约上签了字，则掷一枚硬币，之后执行如下策略：若正面朝上则执行 (x_1, y_2)，若反面朝上则执行 (y_1, x_2)。那么，两个局中人都在这第二份契约上签字后得到的期望支付配置是 (3, 3)。假定局中人都必须独立地做出其签字决定，而每个局中人只能签一份契约，并且用 $\hat{s}_i$ 表示局中人 i 签第二份契约的选择，则变换后的博弈就成为如表 6-3 所示的博弈。这个博弈有三个完美均衡：一个是 (s_1, s_2)，一个是 $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$，而第三个则是每个局中人 i 在 s_i 与 $\hat{s}_i$ 之间分别以 2/3 与 1/3 的概率随机化。

在局中人能够签订合同（或契约）的现实局势中，通常有大量的各式各样的

表 6-3　　一个策略型博弈：包括每个局中人的两个签约策略

	C_2			
C_1	x_2	y_2	s_2	$\hat{s}_2$
x_1	2, 2	0, 6	0, 6	0, 6
y_1	6, 0	1, 1	1, 1	1, 1
s_1	6, 0	1, 1	2, 2	1, 1
$\hat{s}_1$	6, 0	1, 1	1, 1	3, 3

合同可以加以考虑。此外，在这类局势中，签订契约常常只是一个潜在的长期讨价还价过程的最后一个行动。如果我们要在策略型博弈中试图以明确的选择项列出所有的讨价还价和签约策略，那将会使这个问题变得十分复杂以至难以处理。因此，如前所述，一种富有成效的分析方法是置签约选择于显性的博弈结构之外，并寻求一种能将其加以考虑的一种新的解概念，以取代对这些选择的显性表达。

于是，让我们引入具有合同的博弈概念。当我们说一个给定的博弈**具有合同**（with contract）时，我们的意思是说，除了在这个博弈的形式结构中所给定局中人的选择之外，这些局中人还有非常广泛的相互讨价还价和签订合同的选择自由，其中每份合同都迫使签字的局中人受到某个相关策略的约束，而这个相关策略又可能依赖于签字的局中人集。在说明了一个具有合同的博弈之后，我们就可以放下暗含这些签约选择的实际博弈结构，而用一个适当的解概念把它考虑进去。 247

形式上，给定任一策略型博弈 $\Gamma=(N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$，某些局中人组成的集的一个**相关策略**（correlated strategy）就是，这些局中人在 Γ 中所能选择的所有纯策略组合集上的任何一个概率分布。也就是说，任给一个 $S\subseteq N$，S 的一个相关策略是 $\Delta(C_S)$ 中的任何一个概率分布，其中

$$C_S=\bigtimes_{i\in S}C_i$$

利用这个记号，我们还可以写出

$$C=C_N \quad 和 \quad C_{-i}=C_{N\setminus i}$$

局中人集 S 可以由一个可信赖的调解人（或具有随机数发生器的一个计算机）依照下述方式随机地指定 C_S 中的纯策略组合来执行相关策略 τ_S：对于 C_S 中任一 $c_S=(c_i)_{i\in S}$，赋予 c_S 的概率是 $\tau_S(c_S)$。由此，这个调解人会吩咐 S 中每个局中人 i 去执行策略 c_i，即所指定的纯策略组合 c_S 的第 i 个分量。

给定所有局中人在 $\Delta(C)$ 中的任一相关策略 μ，对于每个局中人 i，令 $U_i(\mu)$ 表示当 μ 在博弈 Γ 中被执行时局中人 i 所能得到的期望支付，即

$$U_i(\mu)=\sum_{c\in C}\mu(c)u_i(c)$$

再令 $U(\mu)=(U_i(\mu))_{i\in N}$ 表示 N 中所有局中人由执行 μ 所能得到的期望支付配置。这里，我们定义一个**配置**（allocation）是对每个局中人规定一个支付的任何一个向量。

借助于这个记号，一个**合同**（contract）在数学上可以用 $\bigtimes_{S\subseteq N}\Delta(C_S)$ 中任一向量 $\tau=(\tau_S)_{S\subseteq N}$ 表示。对于任何一个这样的合同 τ，如果 S 是在这个合同上签字的局中人集，那么 τ_S 就表示将被 S 中局中人实施的相关策略。因此，对于集

$$\{U(\mu)\ .\ \mu\in\Delta(C)\}$$

中的任一配置，都存在一个合同，使得如果所有局中人都在这个合同上签了字，那么他们将会得到这个期望支付配置。所有可能的期望支付配置所组成的集是 $\mathbf{R}^N$ 的一个闭凸子集。

248 不过，在内含签约博弈的一个均衡中，并不是所有这样的合同都能被所有局中人实际签署的。例如在表 6-1 所示的博弈中，局中人 1 将拒绝在一份要求局中人实施 (x_1, y_2) 的合同上签字。如果局中人 2 签了字，局中人 1 签这样一个合同只能得到支付 0，但他可通过不签字并选择 y_1 而保证自己得到支付 1。

对于任一局中人 i，其在博弈 Γ 中的最小化最大值［或安全水平（security level)］是

$$v_i=\min_{\tau_{N-i}\in\Delta(C_{N-i})}\left(\max_{c_i\in C_i}\sum_{c_{N-i}\in C_{N-i}}\tau_{N-i}(c_{N-i})u_i(c_{N-i},c_i)\right)\tag{6.1}$$

也就是说，局中人 i 的最小化最大值是，当所有其余局中人采用一个对 i 来讲最坏的相关策略来对付 i 时，他所能得到的最好期望支付。对付局中人 i 的一个**最小化最大策略**（minimax strategy）是 $\Delta(C_{N-i})$ 中任一达到（6.1）式中最小值的相关策略。两人零和博弈的理论（3.8 节）证明过这个最小化最大值也满足下式：

$$v_i=\max_{\tau_i\in\Delta(C_i)}\left(\min_{c_{N-i}\in C_{N-i}}\sum_{c_i\in C_i}\tau_i(c_i)u_i(c_{N-i},c_i)\right)$$

因此，无论其余局中人做什么，局中人 i 都有一个达到上式最大值的随机策略，并且保证他的期望支付不小于他的最小化最大值。

我们说 $\Delta(C)$ 中的一个相关策略 μ 对于整个局中人集来说是**个人理性的**（individually rational），当且仅当

$$U_i(\mu)\geqslant v_i,\ \forall i\in N\tag{6.2}$$

条件（6.2）中的不等式被称为相关策略 μ 的**参与约束**（participation constraints）或**个人理性约束**（individual-rationality constraints）。

现在假设局中人独立地决定其在哪份合同上签字。对于任何这样一个个人理性的相关策略 μ，都存在一个有 $\tau_N=\mu$ 的契约 τ，使得所有局中人都签署这个合同是内含签约博弈的一个均衡。为了证明这一事实，对于每个局中人 i，令 τ_{N-i} 是对付局中人 i 的一个最小化最大策略，那么只要他是唯一没有在这个合同上签字的局中人，就没有一个局中人能够做到使他的期望支付比他的最小化最大值更好。因此，如果每个局中人都预期所有其余局中人都会签字的话，那么每个局中人都将想签署这个合同［如果条件（6.2）都是以严格的不等式满足的，那么签约博弈的这个均衡也是完美的、适度的和持久的］。

相反地，没有任何一个签约博弈的均衡能生成一个其中某个局中人得到严 249
格低于其最小化最大值支付的期望支付配置，因为他总可以通过不签字并使用保证其最小化最大值的策略而做得更好。因此，当每个局中人 i 都有不签字的选择自由，而又要在 C_i 中选择行动时，则

$$\{U(\mu) \mid \mu \in \Delta(C) \quad 且 \quad U_i(\mu) \geqslant v_i, \ \forall i \in N\}$$

恰好是在内含签约博弈的均衡中所能达到的所有支付配置组成的集。这个集中的每个元素都是出个人理性的相关策略所得到的期望支付配置，并且它还是闭凸集。

对于表 6－1 的博弈，所有可能期望支付配置组成的集是具有极点（0，6），(6，0）及（1，1）的闭凸集［配置 (2.2) 属于这个集的内部］。而满足个人理性的可能期望支付配置集是极点（角点）在（1，1），（5，1）及（1，5）处的一个较小的三角形，如图 6·1 所示。

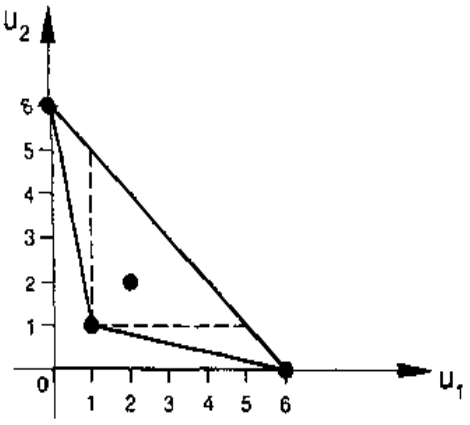

图 6·1

6.2　相关均衡

在很多局势中，局中人可能不会保证自己遵守合同。局中人的策略对于合同的法定实施者或许是不可观察的；或者保证服从合同的奖惩不够充分；或者某些局中人的策略可能涉及到了不可剥夺的权利（就像一个工人不可剥夺其停 250
止工作的权利）等。在这样的局势中，局中人相互通信和协调仍是可能的。如果除了博弈结构中所显性规定的策略选择之外，局中人还有很大范围相互通信的隐性选择，那么我们就称这个博弈是**具有通信**（with communication）的博弈。奥曼（1974）曾指出，即使没有合同，具有通信的博弈的解概念仍然具有一些不同寻常的性质。

考虑表 6－4 中的例子。在没有通信时，这个博弈具有 3 个均衡：给出支付配置（5，1）的（x_1，x_2）；给出支付配置（1，5）的（y_1，y_2）；以及给出期望支付配置（2.5，2.5）的一个随机均衡。因为（y_1，x_2）不是一个均衡，所以最佳的对称支付配置（4，4）在没有具有约束力的合同时是不可能被局中人实现的。然而，即使没有合同，通信可能允许局中人达到对双方来说都好于（2.5，2.5）的期望支付配置。例如，局中人或许计划抛一枚硬币，正面朝上则选择（x_1，x_2）或者反面朝上则选择（y_1，y_2），从而实施了相关策略

$0.5[x_1, x_2] + 0.5[y_1, y_2]$。于是，尽管抛硬币对于局中人并不具有约束力，但在任一局中人都不可能通过单方面背离这个计划而得到增益的意义上，这个抛一枚硬币的计划便是**自动实施的**（self-enforcing）。

表 6-4　　一个策略型博弈

	C_2	
C_1	x_2	y_2
x_1	5, 1	0, 0
y_1	4, 4	1, 5

在一个**调解人**（mediator，即一个能够帮助局中人通信并共享信息的人或机器）的帮助下，这个博弈存在一个可自动实施的计划，它能够产生一个比（2.5, 2.5）更好的期望支付配置（$3\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{3}$）。说得明确些，假设调解人将策略组合 (x_1, x_2)、(y_1, y_2) 和 (y_1, x_2) 中的每一个都以 1/3 的概率随机地向两个局中人推荐，并且假设每个局中人只知道他自己从调解人那里推荐来的策略，那么，尽管调解人的推荐不具有约束力，但这个借助于调解通信做变
251 换之后的博弈存在一个纳什均衡，其中两个局中人总是计划服从调解人的推荐。如果局中人 1 从调解人那里听到一个推荐选择“y_1”，那么他会想到局中人 2 被以相同的概率通知执行 x_2 或 y_2，在这种情形下，他从 y_1 所得到的期望支付与从 x_1 得到的期望支付将是一样好（由每个策略所得到的支付都是 2.5）。又如果局中人 1 从调解人那里收到关于“x_1”的一个推荐，那么他知道局中人 2 会被通知执行 x_2，此时他的最优反应是 x_1。因此，如果局中人 1 预期局中人 2 会服从调解人，那他将总是乐意服从调解人的，而且，类似的论证也适用于局中人 2。也就是说，当每个局中人都计划以这种方式随机地选择时，所有局中人都能够理解每个局中人将服从推荐从而达到一个自动实施均衡的道理。等概率地在 (x_1, x_2)、(y_1, y_2) 及 (y_1, x_2) 之间随机选择将给出期望支付配置

$$1/3\ (5, 1) + 1/3\ (4, 4) + 1/3\ (1, 5) = (3\tfrac{1}{3}, 3\tfrac{1}{3})$$

值得指出的是，实施这个没有合同的相关策略 $1/3[x_1, x_2] + 1/3[y_1, y_2] + 1/3[y_1, x_2]$，要求每个局中人对于调解人的随机化结果只能收到彼此不同的局部信息。如果局中人 1 知道局中人 2 被通知选择 x_2，那么当 y_1 也被推荐给局中人 1 时，他是不会愿意选择 y_1 的。因此，在没有某种调解或**噪音通信**（noisy communication）时，这个相关策略不可能被实施。对于只有直接的非中介通信，其中所有局中人都能够观察任何一个局中人的陈述或任何随机化结果的情形，局中人能够在无契约的情况下自动实施的唯一计划就是原博

弈（没有通信）的纳什均衡之间的随机化，像我们在前面所讨论的相关均衡 $.5[x_1, x_2] + .5(y_1, y_2)$ ［不过，巴兰尼（Barany，1987）和福格斯（Forges，1990）已经证明，在任何一个具有 4 个及 4 个以上局中人的策略型博弈和贝叶斯博弈中，假如任何一对局中人之间的通信不能被其他局中人直接观察到，则局中人两两之间的直接非中介通信系统可以模拟具有一个调解人的任何集中通信系统］。

现在考虑如果他们有一枚弯曲的硬币，局中人 1 认为其正面朝上的概率是 .9，而局中人 2 认为其正面朝上的概率为 .1，并且这些估计都是共同知识，那么局中人将会怎么办呢？借助于这枚变形的硬币，将有可能通过下述可自动实施的计划给每个局中人以期望支付 4.6：抛这枚硬币之后，若正面朝上则实施 (x_1, x_2) 均衡，否则执行 (y_1, y_2) 均衡。

然而，局中人关于这枚硬币的信念在 2.8 节的意义上是不一致的（inconsistent）。也就是说，没有办法对抛这枚硬币的结果定义先验概率分布，并另外定义两个随机变量，使得局中人 1 的信念可以通过贝叶斯公式由上述先验分布及其对这两个随机变量之一的观察而推导出来，而局中人 2 的信念也可以通过贝叶斯公式从这个先验分布和她对另一随机变量的观察中推导出来，并且他们关于正面朝上的概率的信念是他们中间的共同知识（对于这个事实的一个一般证明参见奥曼，1976）。 252

这样一枚让局中人有不一致信念的硬币之存在将是十分引人注目而又异乎寻常的。借助于这样一枚硬币，局中人可以互相打赌，而每人都可以从打赌中预期得到一个任意大的正期望货币值！因此，作为实用主义的一个惯例，让我们坚持认为局中人对之有这种不一致信念的任何随机变量的存在，都应该被明确地列于博弈结构之中，而不应该被清扫到短语“具有通信的博弈”的含义中去。（这些随机变量可以通过一个与任何共同先验分布都不会有一致信念的贝叶斯博弈，或通过一个对每个局中人在每个机会结点处的选择集上都指定了不同的主观概率分布的广义展开型博弈而显性地模型化。）类似地（但更明显地），任何一个局中人能观察到影响支付的随机变量的机会都必须在博弈中显性地模型化。因此，当我们提及一个特定的博弈在进行时“具有通信”，我们的意思是说，局中人和调解人关于与支付无关的随机变量都具有广泛但隐性的观察与交换信息的机会，而这些与支付无关的随机变量全都是从每个局中人都认同的客观概率分布中随机抽取的。

一般地说，对于任一有限策略型博弈 $\Gamma = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$，一个致力于帮助协调局中人行为的调解人（至少）需要让每个局中人 i 都知道推荐给他的是 C_i 中哪个策略。然而，当调解人能够与每个局中人单独而又秘密地进行通信时，没有一个局中人非得被通知任何一个其他局中人的推荐策略，由于没有签订合同，故局中人 i 在听到调解人的推荐之后可以自由地在 C_i 中选择任何策略。因此，在具有调解通信的博弈中，每个局中人 i 实际上具有包

括 C_i 到 C_i 的所有映射在内的一个扩大了的通信策略集，其中每个通信策略都表示选择 C_i 中元素的一个可能规则，按照这个规则，局中人 i 选择 C_i 中的一
253 个元素作为调解人从 C_i 中向他推荐的策略的一个函数。

现在，假定调解人将按照 $\Delta(C)$ 中的概率分布 μ 决定其所要推荐的策略，这是局中人中间的共同知识；从而 $\mu(c)$ 表示任一给定的纯策略组合 $c=(c_i)_{i\in N}$ 会被调解人推荐给局中人的概率。于是，调解人所推荐并能为所有局中人服从的策略是一个均衡的充分必要条件是

$$U_i(\mu) \geqslant \sum_{c\in C} \mu(c)u_i[c_{-i},\ \delta_i(c_i)],\quad \forall i \in N,\quad \forall \delta_i: C_i \to C_i \tag{6.3}$$

[其中 $U_i(\mu)$ 是如 6.1 节所定义的。] 遵循奥曼 (1974, 1978a)，我们说 μ 是 Γ 的一个**相关均衡** (correlated equilibrium)，当且仅当 $\mu\in\Delta(C)$ 且满足条件 (6.3)。也就是说，一个相关均衡是 Γ 中所有局中人在调解人的帮助下能自动地实施执行的相关策略，而调解人可以向每个局中人做出不具约束力的秘密推荐。

可以证明，条件 (6.3) 等价于下述不等式方程组：

$$\sum_{c_{-i}\in C_{-i}} \mu(c)[u_i(c) - u_i(c_{-i}, e_i)] \geqslant 0, \forall i \in N, \forall c_i \in C_i, \forall e_i \in C_i \tag{6.4}$$

[这里 $c=(c_{-i},\ c_i)$。] 为了解释 (6.4) 式，注意到，给定任一 c_i，如果给定调解人所推荐的策略为 c^*，那么在预期所有其余局中人都服从调解人的这个推荐时，若将 (6.4) 式的左边除以 $\sum_{c_{-i}\in C_{-i}}\mu(c)$，就等于局中人 i 由服从调解人的推荐所得到的条件期望支付与其使用某个不服从该推荐的行动 e_i 所得到的条件期望支付之差。因此，条件 (6.4) 断言，没有一个局中人 i 能够预期在得到调解人所推荐的任一策略 c_i 之后通过使用某个**不服从的行动** e_i 来增大其期望支付。因而，这样的不等式 (6.3) 和 (6.4) 可以被称为**策略激励约束** (strategic incentive constraints)，因为它们表示了调解人所推荐的相关策略必须满足的数学不等式，只有满足了这个数学不等式，才有可能保证所有局中人都会理性地服从该调解人所推荐的策略 C。

对于任一有限的策略型博弈，其相关均衡集都是一个紧凸集。再则，由于 $\mathbf{R}^N$ 中的一个向量 μ 是一个相关均衡，当且仅当它满足策略激励约束 [(6.3)
254 式或 (6.4) 式] 和如下**概率约束** (probability constraints)

$$\sum_{e\in C} \mu(e) = 1 \quad 且 \quad \mu(c) \geqslant 0,\ \forall c \in C$$

所以这个紧凸集可以由一个只有有限多个线性不等式的方程组来表征。因而，

---

* 原文为 c_i，似应为 C——译者注。

举例来说，如果我们想在Γ中找出使所有局中人的期望支付之和为最大的那个相关均衡，那么我们就有了一个在这些线性约束下最大化一个线性目标函数 $\left(\sum_{i\in N}U_i(\mu)\right)$ 的问题。这是一个线性规划问题，可以通过许多广泛适用的计算机程序中的任何一个来求解。

对于表 6－4 的博弈，寻求所有局中人的支付之期望和最大的相关均衡这个问题就可以具体表述如下：

$$\max \quad 6\mu(x_1, x_2)+0\mu(x_1, y_2)+8\mu(y_1, x_2)+6\mu(y_1, y_2)$$

约束为

$$\begin{aligned}
&(5-4)\mu(x_1, x_2)+(0-1)\mu(x_1, y_2) \geqslant 0\\
&(4-5)\mu(y_1, x_2)+(1-0)\mu(y_1, y_2) \geqslant 0\\
&(1-0)\mu(x_1, x_2)+(4-5)\mu(y_1, x_2) \geqslant 0\\
&(0-1)\mu(x_1, y_2)+(5-4)\mu(y_1, y_2) \geqslant 0\\
&\mu(x_1, x_2)+\mu(x_1, y_2)+\mu(y_1, x_2)+\mu(y_1, y_2)=1\\
&\mu(x_1,x_2)\geqslant 0,\ \mu(x_1,y_2)\geqslant 0,\ \mu(y_1,x_2)\geqslant 0,\ \text{及}\ \ \mu(y_1,y_2)\geqslant 0
\end{aligned}$$

利用标准的拉格朗日乘子分析方法（参见迈尔森，1985*a* 中定理 2）或者线性规划的单纯形算法，可以证明这个问题的最优解是这样一个相关均衡，其中

$$\mu(x_1,x_2)=\mu(y_1,x_2)=\mu(y_1,y_2)=1/3 \quad \text{及} \quad \mu(x_1,y_2)=0$$

这就是说，在所有的相关均衡中，$1/3\,[x_1, x_2]+1/3\,[y_1, x_2]+1/3\,[y_1, y_2]$ 是使所有局中人的支付之期望和取得最大值的相关均衡。于是，策略激励约束意味着，所有局中人的支付之期望和不会高于 $3\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}=6\frac{2}{3}$。

[这一结论也可以利用本例的对称性而由初等方法推导出来。如果 $\hat{\mu}$ 是这个博弈的任一相关均衡，而且 $\mu(x_1, x_2)=\mu(y_1, y_2)=0.5\hat{\mu}(x_1, x_2)+0.5\hat{\mu}(y_1, y_2)$，$\mu(x_1, y_2)=\hat{\mu}(x_1, y_2)$ 及 $\mu(y_1, x_2)=\hat{\mu}(y_1, x_2)$，那么 μ 也是一个相关均衡。并且它所产生的所有局中人的支付之期望和应该与 $\hat{\mu}$ 所产生的相同。所以只考虑 $\mu(x_1, x_2)=\mu(y_1, y_2)$ 的相关均衡是不失一般性的。利用 255
这个条件，则问题转化为最大化目标函数 $12\mu(y_1, y_2)+8\mu(y_1, x_2)$，而概率约束和第二个策略激励约束也相应地意味着，$1-2\mu(y_1, y_2)\geqslant\mu(y_1, x_2)$ 和 $\mu(y_1, y_2)\geqslant\mu(y_1, x_2)$，但是，函数

$$12\mu(y_1, y_2)+8\min\{\mu(y_1, y_2), 1-2\mu(y_1, y_2)\}$$

的最大值是 $6\frac{2}{3}$，在 $\mu(y_1, y_2)=1/3$ 时达到。]

一个很自然的问题是，为什么我们要把注意力放在调解通信系统而其中对于所有局中人来说只有服从调解人的推荐才是理性的呢？这种关注的原因是，对于任何一个由给定的策略型博弈通过增加任一通信系统而生成的博弈来说，这种通信系统可以模拟其任何一个均衡。为了看出其之所以如此，让我们尝试具体地确定一个描述可以放到前述给定的策略型博弈Γ中去的通信系统之一般

框架。给定任一通信系统，用 R_i 表示局中人 i 可以用来决定其向通信系统发送的报告的所有策略组成的集，而 M_i 表示局中人 i 可能从通信系统中接收到的所有信息组成的集。对于 $R=\times_{i\in N}R_i$ 中的任何一个 $r=(r_i)_{i\in N}$ 和 $M=\times_{i\in N}M_i$ 中的任何一个 $m=(m_i)_{i\in N}$，令 $\nu(m\mid r)$ 表示当每个局中人 i 按照 r_i 发送报告时，所有不同的局中人所接收到的信息将是 m 的条件概率。这个函数 $\nu: R\to\Delta(M)$ 就是该通信系统的基本数学特征。[如果所有的通信都是局中人之间无噪音或无调解地直接进行，那么每个局中人的信息将由其余所有局中人给他的报告直接构成，从而 $\nu(\cdot\mid r)$ 将总是对某个向量 m 赋予概率 1；但噪音通信或随机调解则允许 $0<\nu(m\mid r)<1$。]

给定这样一个通信系统，局中人 i 为了决定其发送的报告和 C_i 中他最终要执行的行动（作为他所接收到的信息的一个函数）的能使用的纯通信策略集是

$$B_i=\{(r_i,\ \delta_i)\mid r_i\in R_i,\ \delta_i: M_i\to C_i\}$$

局中人 i 的期望支付按照函数 $\bar{u}_i$ 依赖于所有局中人的通信策略，其中

256

$$\bar{u}_i\{(r_j,\delta_j)_{j\in N}\}=\sum_{m\in M}\nu(m\mid r)u_i\Big((\delta_j(m_j))_{j\in N}\Big)$$

因此，通信系统 $\nu: R\to\Delta(M)$ 生成一个**通信博弈**（communication game）Γ_ν，其中

$$\Gamma_\nu=\{N,\ (B_i)_{i\in N},\ (\bar{u}_i)_{i\in N}\}$$

当博弈 Γ 已经允许局中人在选择他们的支付相关的行动之前通过通信系统 ν 相互通信而加以变换时，上述博弈 Γ_ν 正是描述其决策结构和支付的一个适当的策略型博弈。为了刻划局中人在具有通信的博弈中的理性行为，我们应该看一看 Γ_ν 的均衡。

然而，Γ_ν 的任何一个均衡都等价于 Γ 的用策略激励约束（6.3）所定义的一个相关均衡。为说明其原因，令 $\sigma=(\sigma_i)_{i\in N}$ 是这个博弈 Γ_ν 的任一随机策略均衡，再令 μ 为如下定义的相关策略

$$\mu(c)=\sum_{(r,\delta)\in B}\ \sum_{m\in\delta^{-1}(c)}\Big(\prod_{i\in N}\sigma_i(r_i,\delta_i)\Big)\nu(m\mid r),\quad \forall c\in C$$

其中我们使用了如下记号：

$$B=\times_{i\in N}B_i;\ (r,\ \delta)=\{(r_i,\ \delta_i)_{i\in N}\};\ \text{及}$$
$$\delta^{-1}(c)=\{m\in M\mid\delta_i(m_i)=c_i,\quad \forall i\in N\}.$$

也就是说，当每个局中人都按照 σ 决定他发送报告和选择行动的计划时，C 中任一结果 c 在相关策略 μ 下的概率，恰好是所有局中人都参与通信系统 ν 之后会最终选择这个结果的概率。于是，μ 有效地模拟了从博弈通信 Γ_ν 的均衡 σ

所得到的结果。因为 μ 恰好正在模拟由于使用 Γ_ν 中策略 σ 所得到的结果，所以如果某个局中人 i 在所有其余局中人都预期会服从推荐时能够通过不服从调解人按照 μ 的推荐而有所增益的话，那么他也同样可以在 Γ_ν 中类似地不服从其用于对付 σ_{-i} 推荐策略 σ_i 而获得增益。简单一点说，如果条件（6.3）对于某个 i 和 δ_i 不成立，那么局中人 i 就可以在 Γ_ν 中通过把 σ_i 换成 $\hat{\sigma}_i$ 来对付 σ_{-i} 而得到增益，其中

$$\hat{\sigma}_i(r_i,\gamma_i)=\sum_{\zeta_i\in Z(\delta_i,\gamma_i)}\sigma_i(r_i,\zeta_i),\quad \forall(r_i,\nu_i)\in B_i \quad 及$$

$$Z(\delta_i,\gamma_i)=\{\zeta_i\mid\delta_i(\zeta_i(m_i))=\gamma_i(m_i),\ \forall m_i\in M_i\}$$

257

这一结论将会违背 σ 作为一个均衡的假设。因此 μ 必须满足策略激励约束（6.3），否则 σ 不可能是 Γ_ν 的一个均衡。

如此一来，对任何一个可从一个策略型博弈 Γ 通过增加一个局前通信系统而生成的通信博弈来说，其任何一个均衡都一定等价于一个满足策略激励约束（6.3）或（6.4）的相关均衡。这一事实被称为策略型博弈的**显示原理**（revelation principle）。

对于任一通信系统 ν，通信博弈 Γ_ν 可能会有很多均衡，并且这些均衡或许等价于不同的相关均衡。特别地，对于原博弈 Γ 的任何一个均衡 $\bar{\sigma}$，都存在着通信博弈 Γ_ν 的一些均衡，其中每个局中人 i 都独立于他所发送的报告或接收到的信息而按照 $\bar{\sigma}_i$ 选择 C_i 中的一个策略。[Γ_ν 的这样一个均衡 σ 可以构造如下：如果对于 M_i 中所有的 m_i 均有 $\delta_i(m_i)=c_i$，则对 R_i 中每个 r_i 都取 $\sigma_i(r_i,\delta_i)=\bar{\sigma}_i(c_i)/|R_i|$；而如果对于某两个 m_i 和 $\hat{m}_i$ 有 $\delta_i(m_i)\neq\delta_i(\hat{m}_i)$，则取 $\sigma_i(r_i,\sigma_i)=0$。] 也就是说，添加一个通信系统并没有删除原博弈的任何一个均衡，因为总是存在这样的通信博弈均衡，其中报告和信息都被所有局中人视为无意义而忽略。（也可回顾第 3 章中表 3－9 的讨论。）通信博弈的这种均衡被称为**泄露均衡**（babbling equilibria）。

因为策略型博弈 Γ 的相关均衡集是闭凸集，并且是可以用只有有限个线性不等式的一个方程组来刻划的，所以它具有简单而又易于处理的数学结构。另一方面，Γ 的纳什均衡集，或者任何一个能由 Γ 生成的特定通信博弈的纳什均衡集，一般都不具有这样的结构简单性。因此，刻划了能由 Γ 生成的所有通信博弈的均衡集之并集的相关均衡集，可能比这些博弈中任何一个的均衡集更容易进行分析。这一观察表明了显示原理的分析功能。这就是说，在解概念中而不是在显性的博弈模型中考虑通信可能性的一般概念方法，不仅简化了我们的博弈结构，而且还生成了更加便于分析的解。

258

6.3 具有通信的贝叶斯博弈

策略型博弈的显示原理断言，任一通信系统的任一均衡都可以通过这样一个通信系统来模拟，其中唯一的通信是从一个中心调解人到局中人的，而没有任何从局中人到这个调解人的通信。这个通信的单向性质不足为奇，因为在策略型博弈的结构中，局中人没有要告诉调解人的任何私人信息。然而，更一般地，贝叶斯博弈的局中人可能具有关于他们的类型的私人信息，而双向通信将允许局中人的行动既依赖于彼此的类型，又依赖于诸如抛硬币之类的外部随机变量。于是，在具有通信的贝叶斯博弈中，局中人在调解通信系统中可能既需要报告又需要听取（参见福格斯，1986）。

令 $\Gamma^b=\{N,(C_i)_{i\in N},(T_i)_{i\in N},(p_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\}$ 是一个具有不完全信息的有限贝叶斯博弈，正如 2.8 节所定义。现在让我们假设 Γ^b 是一个具有通信的博弈，于是在每个局中人 i 都知道他在 T_i 中的类型之后，但在他从 C_i 中选择其行动之前，局中人都有广泛的通信机会。

考虑如下形式的调解通信系统：首先，要求每个局中人都秘密地向调解人报告他的类型；其次，在得到这些报告之后，这个调解人向每个局中人都秘密地推荐一个行动。而这个调解人的推荐要么以确定的，要么以随机的方式依赖于局中人的报告。对于 $C=\times_{i\in N}C_i$ 中任一 $c=(c_i)_{i\in N}$ 和 $T=\times_{i\in N}$ 中任一 $t=(t_i)_{i\in N}$，令 $\mu(c,t)$ 表示在每个局中人 j 都报告其类型为 t_j 的情况下，调解人向每个局中人 i 推荐他所应该使用的行动为 c_i 的条件概率。显然，这些数 $\mu(c|t)$ 必须满足下述的**概率约束**（probability constraints）。

$$\sum_{c\in C}\mu(c\mid t)=1 \quad 且 \quad \mu(d\mid t)\geqslant 0,\quad \forall d\in C,\quad \forall t\in T \tag{6.5}$$

一般地，对于具有通信的博弈 Γ^b 而言，任何一个这样的函数 $\mu:T\to\Delta(C)$ 都被称为一个**调解计划**（mediation plan）或者**调解机制**（mediation mechanism）。

259 如果每个局中人都如实地向调解人报告自己的类型并服从调解人的推荐，那么类型为 t_i 的局中人 i 从调解计划 μ 所能得到的期望支付是

$$U_i(\mu\mid t_i)=\sum_{t_{-i}\in T_{-i}}\sum_{c\in C}p_i(t_{-i}\mid t_i)\mu(c\mid t)u_i(c,t)$$

其中 $T_{-i}=\times_{j\in N\setminus i}T_j$，$t=(t_{-i},t_i)$

然而，我们必须承认每个局中人都可能在报告其类型时撒谎或者不服从调解人的推荐。也就是说，在这里我们假定了调解人不能证实局中人的类型和从 C_i 中选择一个行动只能由局中人 i 控制。因而，一个调解计划 μ 诱导出一个通

信博弈 Γ_μ^b，在这个通信博弈中，每个局中人必须选择他要报告的类型及其在 C_i 中选择一个行动作为调解人所荐策略的一个函数的计划。Γ_μ^b 本身在形式上就是一个贝叶斯博弈，形如下式：

$$\Gamma_\mu^b=\{N,\ (B_i)_{i\in N},\ (T_i)_{i\in N},\ (p_i)_{i\in N},\ (\bar{u}_i)_{i\in N}\}$$

其中，对每个局中人 i 都有

$$B_i=\{(s_i,\ \delta_i)\mid s_i\in T_i,\ \delta_i: C_i\to C_i\}$$

并对 $\bar{u}_i$：$(\times_{j\in N}B_j)\times T\to\mathbf{R}$ 做如下定义

$$\bar{u}_i((s_j,\delta_j)_{j\in N},t)=\sum_{c\in C}\mu(c\mid(s_j)_{j\in N})u_i\Big((\delta_j(c_j))_{j\in N},t\Big)$$

B_i 中的一个策略 $(s_i,\ \delta_i)$ 代表了局中人 i 的一个计划，他向调解人报告自己的类型为 s_i，然后将其从 C_i 中选择的行动作为调解人所荐策略的一个函数 δ_i，即如果调解人推荐 c_i，他将会选择 $\delta_i(c_i)$。因为每个局中人都单独而又秘密地与调解人通信，所以局中人 i 所选择的行动不可能依赖于其余任何一个局中人的类型报告或所推荐行动。

例如，假设局中人 i 的真实类型为 t_i，但他在通信博弈 Γ_μ^b 中所使用的策略是 $(s_i,\ \delta_i)$；如果其余所有局中人都对调解人如实报告并依荐而行，那么 i 的期望效用支付将是

$$U_i^*(\mu,\ \delta_i,\ s_i\mid t_i)=\sum_{t_{-i}\in T_{-i}}\sum_{c\in C}p_i(t_{-i}\mid t_i)\mu(c\mid t_{-i},s_i)u_i\Big((c_{-i},\delta_i(c_i)),\ t\Big)$$

[这里 $(t_{-i},\ s_i)$ 是 T 中的类型组合，它与 $t=(t_{-i},\ t_i)$ 唯一不同之处在于 260
其第 i 个分量是 s_i 而不是 t_i。与此类似，$\{c_{-i},\ \delta_i(c_i)\}$ 是 C 中的行动组合，其不同于 c 仅在于其第 i 个分量是 $\delta_i(c_i)$ 而不是 c_i。]

（在 3.9 节所定义的）贝叶斯均衡对于一个具有通信的贝叶斯博弈来说依然是一个合适的解概念，只不过现在我们必须考虑诱导通信博弈 Γ_μ^b 的贝叶斯均衡，而不只是 Γ 的贝叶斯均衡。我们说一个调解计划 μ 是**激励相容**的（incentive compatible），当且仅当在调解人使用调解计划 μ 时，所有局中人都如实报告其类型并服从调解人的推荐是一个贝叶斯均衡。因此，μ 是激励相容的，当且仅当它满足如下一般**激励约束**（incentive constraints）：

$$U_i(\mu\mid t_i)\geqslant U_i^*(\mu,\ \delta_i,\ s_i\mid t_i),\qquad(6.6)$$
$$\forall i\in N,\ \forall t_i\in T_i,\ \forall s_i\in T_i,\ \forall\delta_i: C_i\to C_i$$

如果调解人使用了一个激励相容的调解计划，并且每个局中人都单独而又秘密地与调解人进行通信，那就没有一个局中人可能因为他是唯一向调解人撒谎或不服从调解人推荐的人而受益。相反，除非是一个激励相容的调解计划，否则我们就不可能指望理性而又智能的局中人会全都诚实而又顺从地参与其中。

一般来说，即使 μ 是激励相容的，通信博弈 Γ_μ^b 也可能有许多不同的贝叶斯均衡。此外，如同在前一节那样，我们可以考虑更为一般的通信系统，其中局中人 i 所能发送的报告和局中人 i 所可能接收到的信息分别属于某个任意的集 R_i 和 M_i，而不一定在 T_i 和 C_i 中。不过，给定任何一个一般的通信系统和由此诱导出的通信博弈的任一贝叶斯均衡，总存在一个等价的激励相容的调解计划，其中每个局中人的每个类型得到与他从诱导通信博弈的给定贝叶斯均衡中的所得相同的期望效用。在这个意义上，可以不失一般性地假定：局中人相互之间通过一个调解人通信，调解人首先要求每个局中人都向他透露其全部私人信息，然后他向每个局中人只透露引导其行动的必需的少量信息，按照这种方式，没有一个局中人会有撒谎或不服从的动机。这一结果就是一般贝叶斯博弈的显示原理。

261 贝叶斯博弈显示原理的规范证明与策略型博弈显示原理的证明几乎完全一致。给定一个一般通信系统 $\nu: R \to \Delta(M)$ 和通信策略集 $(B_i)_{i\in N}$，如同 6.2 节中定义的那样，则诱导通信博弈的一个贝叶斯均衡将是一个向量 σ，它对 N 中的每个局中人 i、B_i 中的每个 (r_i, δ_i) 和 T_i 中每个 t_i 都规定了一个数 $\sigma_i(r_i, \delta_i \mid t_i)$，用以表示局中人 i 如果其实际类型是 t_i，那他将报告 r_i 并按照 δ_i（作为他所收到信息的一个函数）来选择其最终行动的概率。如果 σ 是由通信系统 ν 诱导的通信博弈 Γ_ν^b 如上所述的一个贝叶斯均衡，那么我们可以通过令

$$\mu(c \mid t) = \sum_{(r,\delta)\in B} \sum_{m\in\delta^{-1}(c)} \Big(\prod_{i\in N} \sigma_i(r_i, \delta_i \mid t_i) \Big) \nu(m \mid r), \forall c \in C, \forall t \in T$$

构造一个等价的激励相容调解计划 μ（参见迈尔森，1982）。

这个构造可以更直观地描述如下。调解人首先要求每个局中人（同时而又秘密地）向他透露自己的类型。下一步调解人在给定的均衡下按照探听来的类型计算（或模拟）局中人可能已经发送的报告。他还要在给定的通信系统或机制下，计算作为上述报告的一个函数并估计局中人可能得到的推荐或信息。接着，他计算作为给定均衡中这些信息和显示类型的一个函数并估计局中人可能选择的行动。最后，这个调解人告诉每个局中人他上一步为他们计算的行动以供选择。于是，如此构造的调解计划模拟了给定通信系统的给定均衡。为了证实构造的这个调解计划是激励相容的，必须注意到，在构造的这个调解计划中能通过向调解人撒谎或不服从其推荐而受益的任一局中人的任一类型（在其余每个人都是诚实而又服从的情况下），同样也可以在给定的通信博弈中通过在执行其均衡策略之前对自己撒谎或者在执行其均衡策略之后不服从自己对自己的推荐策略而有所增益，但贝叶斯均衡的定义暗示着，这种增益是不可能的。

这样一来，对于具有通信的贝叶斯博弈来说，激励相容的调解计划是对相关均衡概念的适当推广。我们可以使用一对同义术语**通信均衡**（communica-
262 tion equilibrium）或**广义的相关均衡**（Generalized correlated equilibrium）来称呼

贝叶斯博弈的任何一个激励相容的调解计划。

（然而值得注意的是，所有激励相容的调解计划所组成的集并不等于在2.8节所介绍的Γ^b策略型类型代理人表示的相关均衡集。类型代理人表示的相关均衡就给定的具有通信的博弈而言没有什么明确的解释，除非做出如下不太自然的假设，即调解人可以向每个局中人发送依赖于其实际类型的信息，而局中人却有可能没有向这个调解人发送任何报告！）

与相关均衡集一样，激励相容的调解计划集也是一个闭凸集，并由关于μ是线性的一个有限不等式（6.5和6.6）组所刻划。另一方面，刻划任一给定贝叶斯博弈的贝叶斯均衡集则一般来说是个困难的问题。因此，根据显示原理，刻划可由具有通信的贝叶斯博弈Γ^b诱导出的全部博弈之均衡集，可能会比计算Γ^b或其诱导出的任一通信博弈之均衡集更为容易一些。

例如，再次考虑第3章中来自表3－13的两人贝叶斯博弈。假设两个局中人在C_1和C_2中选择各自的行动之前可以要么直接、要么通过某个调解人、要么借助某个摸索过程相互通信。在其诱导的通信博弈中，能否存在一个贝叶斯均衡，使得若局中人2的类型是2.1则给出结果(x_1, x_2)，而若局中人2的类型是2.2则给出结果(y_1, y_2)，如同对表3－13中两个矩阵的幼稚分析所提出的那样呢？由显示原理知，答案是“不能”。如果存在一个这样的通信博弈，那么将会有一个能实现同样结果的激励相容调解计划，但这将是满足下式的计划：

$$\mu(x_1, x_2|1.0, 2.1) = 1, \quad \mu(y_1, y_2|1.0, 2.2) = 1$$

可由于局中人2可以通过谎报类型而得到增益，所以这个计划不是激励相容的。事实上，就本例而言，只存在一个激励相容的调解计划，它是由下式所定义的$\bar{\mu}$：

$$\bar{\mu}(x_1, x_2|1.0, 2.1) = 1, \quad \bar{\mu}(x_1, y_2|1.0, 2.2) = 1$$

这就是说，这个博弈具有唯一的一个通信均衡，并等价于我们在3.9节中得到的该博弈不具有通信时唯一的贝叶斯均衡（这个分析假定在局中人1选择他的行动之前，局中人2不可能选择她的行动并不容置疑地出示给局中人1看。在 263
她实际选择之前，她关于自己打算的行动可以对局中人1随心所欲地讲，但无法阻拦她选择一个不同于她曾承诺的行动，只要她有这样做的动机）。

在保险业中，保险公司不能让投保人显示其关于损失可能性方面不利信息的情况被称为逆向选择，而保险公司不能让充分投保的投保人竭力防止投保财产发生损失的情况被称为道德风险。这些术语可以自然而然地被延伸到更为一般的博弈论模型中加以使用。给局中人一个使其如实报告信息的激励之需要可以被称为**逆向选择**（adverse selection）。给局中人一个使其执行推荐行动的激励之需要可以被称为**道德风险**（moral hazard）。[关于涉及到逆向选择和道德

风险方面的经济博弈的一个综述可参见拉斯马森（Rasmusen，1989）。］在这种意义上，我们可以说一般激励约束（6.6）是对贝叶斯博弈中逆向选择和道德风险之功效的一个一般数学特征描述。

我们还可以试问一下，如果有一个管理者（或合同实施者）来消除道德风险，或者有一个审计员来消除逆向选择，那么这些激励约束可能会被怎样放松呢？参与约束（6.2）表征了当策略型博弈中的局中人在不存在逆向选择或道德风险问题的情况下对合同讨价还价时所能实现的相关策略。策略激励约束（6.3）则表征了在存在道德风险但不存在逆向选择的情况下，局中人利用理性通信所能实现的相关策略。下一种要考虑的情况是，贝叶斯集体选择问题中存在逆向选择但不存在道德风险的情况。

6.4 贝叶斯集体选择问题和贝叶斯讨价还价问题

贝叶斯集体选择问题不同于贝叶斯博弈之处在于，我们不是对每个局中人都单独地给出一个行动或策略集，而是对所有局中人一起给出一个联合可行的可能结果集。也就是说，一个**贝叶斯集体选择问题**（Bayesian collective-choice problem）就是任何一个 Γ^c，使得

$$\Gamma^c = (N, D, (T_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$$

其中 D 是非空的可能**结果**（outcomes）或可能的**社会选择**（social options）集。贝叶斯集体选择问题的其它组成部分 $(N, (T_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ 具
264 有与贝叶斯博弈 Γ^b（如 2.8 节中所定义）中同样的解释和同样的数学结构，只不过现在每个效用函数 u_i 都是从 $D\times T$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数（其中 $T=\times_{i\in N} T_i$ 一如以前所述）。

Γ^c 的一个**集体选择计划或机制**（collective-choice plan or mechanism）是任何一个函数 $\mu: T\to\Delta(D)$，即对于 D 中每一个选择 d 和 T 中每一个可能的类型组合 t，机制 μ 都确定了概率 $\mu(d\mid t)$，用以表示如果局中人所报告的类型组合是 t，则 d 会是被选择的结果的条件概率。因此，μ 的分量必须满足概率约束

$$\sum_{d\in D}\mu(d\mid t)=1,\quad \mu(e\mid t)\geqslant 0,\quad \forall e\in D, \forall t\in T$$

如果所有局中人都如实报告其类型，那么局中人 i 的类型 t_i 的期望支付是

$$U_i(\mu\mid t_i)=\sum_{t_{-i}\in T_{-i}}\sum_{d\in D} p_i(t_{-i}\mid t_i)\mu(d\mid t)u_i(d,t)$$

而对于局中人 i 的类型 t_i 来说，如果所有其余局中人都如实报告而他自己却报告 s_i，其期望支付为

$$U_i^*(\mu, s_i \mid t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \sum_{d \in D} p_i(t_{-i} \mid t_i)\mu(d \mid t_{-i}, s_i)u_i(d, t)$$

机制 μ 是**激励相容**的，当且仅当所有局中人的如实报告是由 μ 诱导的博弈的一个贝叶斯均衡。也就是说，μ 是激励相容的，当且仅当它满足如下**信息激励约束**（informational incentive constraints）：

$$U_i(\mu \mid t_i) \geqslant U_i^*(\mu, s_i \mid t_i), \quad \forall i \in N, \quad \forall t_i \in T_i, \quad \forall s_i \in T_i \tag{6.7}$$

这些定义与上一节所给出的定义是相同的，只不过这里不再有局中人不服从推荐行动的问题。有了这个简化，显示原理就可以同样地应用于贝叶斯集体选择问题和贝叶斯博弈。这也就是说，在任何一个能由 Γ^c 通过将选择结果作为局中人类型报告的一个函数而生成的博弈中，其任何一个报告策略均衡都一定等价于某个满足条件（6.7）的激励相容机制。

贝叶斯集体选择问题 Γ^c **包含**（subsumes）了一个贝叶斯博弈 $\hat{\Gamma}^b$，当且仅当 $\hat{\Gamma}^b$ 可以被写成如下形式：

$$\hat{\Gamma}^b = (N, (\hat{C}_i)_{i \in N}, (T_i)_{i \in N}, (p_i)_{i \in N}, (\hat{u}_i)_{i \in N}) \tag{265}$$

其中（令 $\hat{C} = \times_{i \in N} \hat{C}_i$）存在某个函数 $g: \hat{C} \to D$，使得

$$\hat{u}_i(c, t) = u_i(g(c), t), \quad \forall i \in N, \quad \forall c \in \hat{C}, \quad \forall t \in T$$

这就是说，Γ^c 包含了任何一个这样的贝叶斯博弈，它具有与 Γ^c 相同的局中人集和类型集，其概率函数也与 Γ^c 的相同，并且其支付函数可以通过对贝叶斯博弈中每一行动组合都在集体选择问题中确定一个对应结果的方式从 Γ^c 的支付函数导出。如果 $\hat{\mu}$ 是贝叶斯博弈 $\hat{\Gamma}^b$［在（6.6）式的意义上］的一个激励相容机制，$\hat{\Gamma}^b$ 也被包含于贝叶斯集体选择问题 $\hat{\Gamma}^c$，且

$$\mu(d \mid t) = \sum_{c \in g^{-1}(d)} \hat{\mu}(c \mid t), \qquad \forall d \in D, \quad \forall t \in T$$

［其中 $g^{-1}(d) = \{c \in C \mid g(c) = d\}$］，那么 μ 也一定是 Γ^c［在（6.7）式的意义上］的一个激励相容机制。在这个意义上，当结果能以任何一种方式依赖于局中人的行动时，贝叶斯集体选择问题 Γ^c 的激励相容包含或包括了所有包含于 Γ^c 的贝叶斯博弈的激励相容机制。

例如，考虑一个讨价还价博弈，其中局中人 1 是某一种私人物品的卖主，而局中人 2 则是一位潜在买主。对局中人 2 来说，这件物品值 10 美元，但对局中人 1 来说，其价值可能是 0 与 9 美元之间任一数字。局中人 1 的类型就是此物品对他的价值，局中人 2 不具有私人信息。假设一个结果是一个偶对 (k, y)，其中 k 表示两个局中人在成交前讨价还价的月数，而 y 是该物品最

终成交的价格（以美元计）。设时间成本用每月 0.99 的**贴现因子**（discount factor）来描述，于是，从结果 (k, y) 得到的效用支付（以贴现后的现值计）是

$$u_1=(k,y,t)=(0.99^k)(y-t),\quad u_2(k,y,t)=(0.99^k)(10-y)$$

其中 t 是该物品对局中人 1 的美元价值。

根据这个集体选择结构，假设局中人卷入某个讨价还价博弈，而这个博弈具有如下结构的一个均衡：如果该物品对卖主的价值是 0 美元，那就会以价格 5 美元立即（没有耽搁，$k=0$）成交，否则，总是以“公平”价格但有所耽搁
266 而成交，所谓“公平”价格就是该物品对买卖双方而言的价值平均数。在对讨价还价博弈规则没有更多了解的情况下，我们能够告诉这两个局中人在卖主对该物品的评价为 9 美元时需要多长时间才能成交，因为讨价还价博弈的任何一个均衡一定对应于（包含该讨价还价博弈的）集体选择问题的一个激励相容机制。

为此，若该物品对卖主的价值为 t，则设在这个机制中经讨价还价后成交所耽搁的月数为 $k(t)$。在这个机制中，成交价格按照公式 $Y(t)=(10+t)/2$ 依赖于该物品对卖主的价值 t（因为所假设的公平成交价格总是卖主价值与买主价值之间的中间价）。对于卖主的信息激励约束意味着

$$(0.99^{K(t)})\left(\frac{10+t}{2}-t\right)=\max_{s\in[0,9]}(0.99^{K(s)})\left(\frac{10+s}{2}-t\right),\quad \forall t\in[0,9]$$

因此对于区间 $[0, 9]$ 上的任一 t，若 $K(\cdot)$ 是可微的，则有

$$\begin{aligned}0&=\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\left((0.99^{K(s)})\left(\frac{10+s}{2}-t\right)\right)\Big|_{s=t}\\&=(0.99^{K(t)})\left(\mathrm{Ln}_e(0.99)(10-t)K'(t)+1\right)/2\end{aligned}$$

于是 $K'(t)=-1/\{(10-t)\ln_e(0.99)\}$。给定 $K(0)=0$，此微分方程具有唯一解，且满足

$$0.99^{K(t)}=1-t/10.$$

对于最高值 $t=9$，讨价还价过程耽搁的时间一定是 $K(9)=\mathrm{Ln}_e(0.10)/\mathrm{Ln}_e(0.99)=229.1$。因此，在这个博弈的任一使买卖双方从成交中同等受益的均衡中，成交之前讨价还价持续的最长期限一定是 229.1 个月，即大约 19 年。

在许多局势中，没有经过局中人先验的一致赞同或同意，一个机制是不可能被执行的，所以一个可行的机制还必须要满足某些参与约束。为了刻划这样一些参与约束，我们的模型必须明确如果没有达成这种一致同意将会怎么样。做到这一点最简单的一个办法是在 D 中规定一个指定结果 d^*，被称为**不一致同意结果**（disagreement outcome）；如果局中人对一个机制不能取得一致意见，则这个结果 d^* 就会发生。（不一致同意的更一般模型将在 6.6 节中讨论。）规

定了这样一个不一致同意结果 d^* 的贝叶斯集体选择问题被称为**贝叶斯讨价还价问题**（Bayesian bargaining problem）。

对这样一个贝叶斯讨价还价问题来说，一个机制 μ 是**个人理性的**，当且仅 267
当它满足如下的参与约束：

$$U_i(\mu \mid t_i) \geqslant \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i} \mid t_i) u_i(d^*, t), \forall i \in N, \forall t_i \in T_i \quad (6.8)$$

也就是说，对于每个知道自己类型的局中人来说，只有 μ 至少与不一致同意结果一样好，他才可能同意参与这个机制 μ。假定局中人将同意一个对所有类型都满足（6.8）式的机制，这是不失其一般性的。给定一个机制选择博弈的任一均衡，且其中某些局中人有时会坚持不一致同意结果，则存在一个等价的个人理性机制，只要有一个或多个局中人在该机制选择博弈的均衡中坚持不一致同意结果，该机制将会给出这一结果。因而，我们说，一个机制 μ 对一个贝叶斯讨价还价问题是**可行的**（feasible），当且仅当它在条件（6.7）和（6.8）的意义上是激励相容的和个人理性的。

通常总是选取效用支付尺度使得每个局中人从不一致同意结果获得的支付是 0，即

$$u_i(d^*, t) = 0, \ \forall i \in N, \ \forall t \in T$$

依据这种支付尺度，参与约束（6.8）简化为

$$U_i(\mu \mid t_i) \geqslant 0, \ \forall i \in N, \ \forall t_i \in T_i$$

作为一个简单的例子，考虑一个交易局势，其中涉及到一个卖者（局中人 1）、一个潜在买者（局中人 2）和某个可分的商品。卖方有一个单位该商品出售，并知道其质量是优（类型 1.a）还是劣（类型 1.b）。如果它是优质商品，那么每单位该商品对买卖双方分别值 50 和 40 美元；而如果它是劣质商品，那么每单位该商品对买卖双方分别值 30 和 20 美元。买方认为此商品质量好的概率为 .2。假设买方不能证实卖方关于此商品质量所做的声明，并且卖方在出售商品时不能提供任何的质量意外担保。

为了把这个例子具体表示成一个贝叶斯集体选择问题，我们令 $T_1 = \{1.a, 1.b\}$ 和 $T_2 = \{2.0\}$（从而买方的类型可以被忽略），并且我们通过令

$$p_2(1.a \mid 2.0) = .2, \ p_2(1.b \mid 2.0) = .8, \ p_1(2.0 \mid t_1) = 1, \ \forall t_1 \quad 268$$

来表示局中人的信念。可能结果集是

$$D = \{(q, y) \mid 0 \leqslant q \leqslant 1, \ y \in \mathbf{R}\}$$

其中，对于 D 中每个 (q, y)，q 表示卖方交给买方该商品的数量，而 y 表示买方付给卖方的货币金额（对于一个不可分的商品来说，q 又可以被另外解释为买方得到此物品的概率）。效用函数是

$$u_1\{(q, y), (1.a, 2.0)\} = y - 40q$$
$$u_2\{(q, y), (1.a, 2.0)\} = 50q - y$$
$$u_1\{(q, y), (1.b, 2.0)\} = y - 20q$$
$$u_2\{(q, y), (1.b, 2.0)\} = 30q - y$$

由于 D 的凸性和效用函数的线性性，我们可以把我们的注意力仅限于**确定性交易机制**（deterministic trading mechanisms），即从 T 到 D 的函数，而不是从 T 到 $\Delta(D)$ 的函数。[任何一个机制 $\mu: T \to \Delta(D)$ 将在本质上等价于确定性机制 $(Q, Y): T \to D$，其中

$$Q(t) = \int_{(q,y)\in D} q d\mu(q, y \mid t),\ Y(t) = \int_{(q,y)\in D} y\, d\mu(q, y \mid t)]$$

所以令 $\{Q(\cdot), Y(\cdot)\}$ 是一个将结果决定为卖方类型的一个函数的机制，其中 $Q(t)$ 和 $Y(t)$ 分别表示了卖给买方的期望数量和买方付给卖方的期望现金支出（此时卖方的类型是 t）。因为卖方只有一单位的商品出售，所以这个机制必须满足

$$0 \leqslant Q(1.a) \leqslant 1,\ 0 \leqslant Q(1.b) \leqslant 1$$

每个局中人的每个类型从这个机制中得到的期望效用是

$$U_1(Q, Y\{1.a) = Y(1.a) - 40Q\ (1.a)$$
$$U_1(Q, Y|1.b) = Y(1.b) - 20Q(1.b)$$
$$U_2(Q, Y|2.0) = .2\{50Q(1.a) + Y(1.a)\} - .8\{30Q(1.b) - Y(1.b)\}$$

信息激励约束是

$$Y(1.a) - 40Q(1.a) \geqslant Y(1.b) - 40Q(1.b)$$
269 $$Y(1.b) - 20Q\ (1.b) \geqslant Y(1.a) - 20Q(1.a)$$

假设每个局中人都有不交易的权力，所以不一致同意结果是 $(q, y) = (0, 0)$。从而参与约束是

$$Y(1.a) - 40Q(1.a) \geqslant 0$$
$$Y(1.b) - 20Q(1.b) \geqslant 0$$
$$.2\ \{50Q(1.a) - Y(1.a)\} + .8\ \{30Q(1.b) - Y(1.b)\} \geqslant 0$$

虽然在本例中，这种商品对买主的价值总是比卖主的高，但仍不存在让买主得到全部商品的激励相容而又个人理性的交易机制。在任何一个这样的机制中，我们将有 $Q(1.a) = Q(1.b) = 1$；但那样的话，卖主的参与约束和信息激励约束将要求 $40 \leqslant Y(1.a) = Y(1.b)$。这将蕴含着一个结果

$$U_2(Q, Y|2.0) \leqslant .2 \times 50 + .8 \times 30 - 40 = -6 < 0$$

因此，在本例中卖主要保留一部分商品将必然有一个正的概率，以作为激励约

束不可避免的代价。

通过对上述约束的分析，关于本例可行交易机制的许多一般结论可以得到证明。从信息激励约束，我们得到

$$40\{Q(1.b)-Q(1.a)\}\geqslant Y(1.b)-Y(1.a)\geqslant 20\{Q(1.b)-Q(1.a)\}$$

所以

$$Q(1.b)\geqslant Q(1.a)$$

也就是说，优质商品的卖主一定比劣质商品的卖主卖的数量要少，以作为其需要一个较高价格的信号。劣质商品的卖主不可能预期一个比优质商品的卖主所预期的更低的交易收益，因为

$$\begin{aligned}&U_1(Q,\ Y|1.\ b)-U_1(Q,\ Y|1.a)\\&=\{Y(1.b)-20Q(1.b)\}-\{Y(1.a)-20Q(1.a)\}+20Q(1.a)\geqslant 0\end{aligned}$$

由于下述不等式，这个期望收益是有上界的：

$$0.3U_1(Q,Y|1.a)+0.7U_1(Q,Y|1.b)+U_2(Q,Y|2.0)\leqslant 8 \quad (6.9)$$

为了证明这个不等式，只需验证　270

$$\begin{aligned}&3U_1(Q,\ Y|1.a)+7U_1(Q,\ Y|1.b)+10U_2(Q,\ Y|2.0)\\&=80Q(1.b)+\{Y(1.a)-20Q(1.a)\}-\{Y(1.b)-20Q(1.b)\}\end{aligned}$$

并回顾 $Q\ (1.b)\leqslant 1$ 即知。

我们说一个激励相容的机制是**激励有效的**（incentive efficient），当且仅当不存在另外的激励相容机制能至少对一个局中人的一个类型给出更高的期望支付，而又不会对另外某个局中人的某个类型给出一个更低的期望支付。因此，就本例而言，如果一个激励相容的机制满足

$$0.3U_1(Q,Y|1.a)+0.7U_1(Q,Y|1.b)+U_2(Q,Y|2.0)=8$$

那么这个机制就一定是激励有效的。

作为可行交易机制的一个特定例子，假设我们想约定：如果该商品是劣质商品，则它的价格应该是每单位 25 美元；如果是优质商品，则其价格应该是每单位 45 美元。（这两个价格是相应情况中该商品对买卖双方而言的价值平均值。）如果在劣质商品情况下，该商品全部卖出，那么我们有

$$Q(1.b)=1,\quad Y(1.b)=25$$

且 $Y(1.a)=45Q(1.a)$。那么，由激励相容性，$25-20\geqslant(45-20)Q(1.a)$，故 $Q(1.a)\leqslant 0.2$。从而让我们通过规定

$$Q(1.a)=0.2,\quad Y(1.a)=45\times 0.2=9^{*}$$

使交易机制达至完整。这个机制是可行的（激励相容的和个人理性的），并且给出期望支付

$$U_1(Q,Y|1.a)=1,\quad U_1(Q,Y|1.b)=5,\quad U_2(Q,Y|2.0)=4.2$$

注意到 $0.3\times 1+0.7\times 5+4.2=8$，所以条件（6.9）以等号成立。因而，尽管在这个交易机制下，优质商品的大部分可能未被卖出，但这个机制是激励有效的。也就是说，不存在能同时增加买主和卖主的两个类型的期望支付的可行机制。

我们发现在这个例子中卖主要保留某些商品必然有一个正概率，这多少有点令人苦恼。毕竟，如果两个局中人都知道这种商品对买主的价值比卖主的价
271 值高，那为什么他们不一直讨价还价直至卖方没有商品可卖呢？为了理解这个问题的答案，我们必须考虑一个更为复杂的模型，其中交易可能发生于不同的时点而且等待交易也有某种成本。（如果等待交易没有成本，那么局中人将没有在任一时点停止讨价还价并实际交易的动机。）在这样一个模型中，有可能产生买主最终要从卖主手中买下全部商品的机制，但在这些机制中，消除了**（完全）交易失败的成本**（costs of failure to (fully) trade），却又产生了**成交耽搁成本**（costs of delay of trade）。例如，如果局中人使用一个每月 0.99 的贴现因子对未来利润贴现，那么对上述例子而言，存在一个激励相容机制，其中若卖主的类型是 $1.b$，则他会立即以 2.5 美元价格卖完其全部供给；若他的类型是 $1.a$，他在耽搁 160.14 个月之后以 45 美元的价格卖完其全部供给。注意到 $0.99^{160.14}=0.2$，所以

$$(25-20)=5\geqslant(0.99^{160.14})(45-20)$$
$$(0.99^{160.14})(45-40)=1$$
$$.8\ (30-25)+.2\ (0.99^{160.14})(50-45)=4.2$$

于是，这个机制所给出的期望（贴现的）效用支付配置与前面所讨论的没有耽搁时的可行交易机制所给出的一样。一般地，如果局中人使用一个共同的贴现因子去度量耽搁成本，那么，用激励相容机制所实现的期望效用配置集不可能因允许迟延交易而扩大。这一结论将在第 10 章的 10.4 节中加以证明并进一步展开讨论。

---

* 原文误为 $Y\ (1.b)\ =45\times 0.2-9$——译者注。

6.5　具有线性效用的交易问题

当每个局中人的类型集都是实数轴上的一个区间，每个局中人的效用对于他自己的类型都是线性的，而且类型都相互独立的时候，我们可以推导出激励相容机制一个强有力的一般特征。为此，让我们考虑一个贝叶斯集体选择问题或贝叶斯讨价还价问题，其中局中人集为 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$，且每个局中人 i 所具有的一个类型是两给定参数 $L(i)$ 和 $M(i)$ 之间的一个实数，所以

$$T_i=[L(i), M(i)]$$

对于每个 i，令 f_i 是区间 $[L(i), M(i)]$ 上一个正的连续概率密度函数，并 272
且假设每个另外的局中人 j 都认为局中人 i 的类型是具有概率密度 f_i 的一个随机变量，且独立于所有其余局中人的类型。设社会的选择对象集 D 是 $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$ 的一个凸子集，D 中的一个元素记为

$$(q, y)=((q_i)_{i\in N}, (y_i)_{i\in N})=(q_1, \cdots, q_n, y_1, \cdots, y_n)$$

则在这样的一个结果 (q, y) 中，q_i 可被解释为交付给局中人 i 的某商品净数量，而 y_i 可被解释为局中人 i 对其余局中人的净货币支付。然后再假设每个局中人具有关于其交易的 q_i 和 y_i 都是线性效用函数，而且局中人 i 的类型就是单位商品对他的货币价值，所以有

$$u_i(q, y, t)=q_it_i-y_i,\ \forall i\in N,\ \forall t\in T,\ \forall(q, y)\in D$$

因而在本节中，我们假定局中人对所交易商品具有**独立的个人价值**。

由于效用是线性的，所以不失一般性，我们可以再次把注意力集中在从 T 到 D 的映射所表示的确定性机制。于是让我们用偶对 (Q, Y) 表示一个机制，使得对于 T 中任一 t 都有

$$(Q,Y)(t)=[Q(t),Y(t)]=[Q_1(t),\cdots,Q_n(t),Y_1(t),\cdots,Y_n(t)]\in D$$

任何一个随机机制 $\mu: T\to\Delta(D)$ 实质上等价于一个确定性机制 (Q, Y)，其中对于每一个 i 和 t 均有

$$Q_i(t)=\int_{(q,y)\in D}q_i\,d\mu(q,y\mid t),\qquad Y_i(t)=\int_{(q,y)\in D}y_i\,d\mu(q,y,t)$$

也就是说，当 t 是局中人所报告的类型组合时，$Q(t)$ 和 $Y(t)$ 分别表示交付给局中人 i 的商品的期望数量和 i 对其余局中人的期望净货币支付。不论局中人的报告是诚实还是撒谎的，在随机机制 μ 下每个局中人的期望支付都可以用

(Q, Y) 来表示，所以只考虑 (Q, Y) 就足够了。

给定任一机制 $(Q, Y): T \to D$ 和局中人 i 的任一类型 t_i，令

$$\overline{Q}_i(t_i) = \int_{t_{-i} \in T_{-i}} Q_i(t)\Big(\prod_{j \in N-i} f_j(t_j)\Big)dt_{-i}$$

$$\overline{Y}_i(t_i) = \int_{t_{-i} \in T_{-i}} Y_i(t)\Big(\prod_{j \in N-i} f_j(t_j)\Big)dt_{-i}$$

273 [这里如通常那样记 $t = (t_{-i}, t_i)$。] 也就是说，当局中人 i 对机制 (Q, Y) 所报告的类型是 t_i 而所有其余局中人都如实报告他们的类型时，$\overline{Q}_i(t_i)$ 和 $\overline{Y}_i(t_i)$ 分别表示交付给局中人 i 的商品期望数量和 i 所要付出的期望付币支付。于是，如果每个人都诚实参与，那么局中人 i 的类型 t_i 在机制 (Q, Y) 下的期望效用支付将是

$$U_i(Q, Y \mid t_i) = \overline{Q}_i(t_i)\ t_i - \overline{Y}_i(t_i)$$

另一方面，如果局中人 i 的类型是 t_i 而他谎报了另外某个类型 s_i，但所有其他人仍旧遵循了诚实参与的策略，那么局中人 i 的期望支付将是

$$U_i^*(Q, Y, s_i \mid t_i) = \overline{Q}_i(s_i)t_i - \overline{Y}_i(s_i)$$

从而一个激励相容机制 (Q, Y) 所必须满足的信息激励约束是

$$U_i(Q, Y, \mid t_i) = \overline{Q}_i(t_i)\ t_i - \overline{Y}_i(t_i) \geqslant \overline{Q}_i(s_i)t_i - \overline{Y}_i(s_i)$$
$$\forall i \in N,\ \forall t_i \in T_i,\ \forall s_i \in T_i$$

利用交换 t_i 和 s_i 的角色而重写上述约束，我们可以轻易地证明这些约束包含了

$$\overline{Q}_i(t_i)(t_i - s_i) \geqslant U_i(Q, Y \mid t_i) - U_i(Q, Y \mid s_i) \geqslant \overline{Q}_i(s_i)(t_i - s_i)$$

这些不等式意味着 $\overline{Q}_i(t_i)$ 是 t_i 的非减（从而也是黎曼可积的）函数，并且

$$U_i(Q, Y \mid t_i) = U_i(Q, Y \mid \theta_i) + \int_{\theta_i}^{t_i} \overline{Q}_i(s_i)ds_i \tag{6.10}$$
$$\forall i \in N,\ \forall t_i \in T_i,\ \forall \theta_i \in T_i$$

于是，在局中人 i 的类型 t_i 被决定之前，$\overline{Y}_i(t_i)$ 的期望值是

$$\int_{L(i)}^{M(i)} \overline{Y}_i(t_i)f_i(t_i)dt_i \tag{6.11}$$

274
$$= \int_{L(i)}^{M(i)} (\overline{Q}_i(t_i)t_i - U_i(Q, Y \mid t_i))f_i(t_i)dt_i$$
$$= \int_{L(i)}^{M(i)} (\overline{Q}_i(t_i)t_i - U_i(Q, Y \mid \theta_i) - \int_{\theta_i}^{t_i} \overline{Q}_i(s_i)ds_i)f_i(t_i)dt_i$$
$$= \int_{L(i)}^{M(i)} \overline{Q}_i(t_i)\Psi_i(t_i, \theta_i)f_i(t_i)dt_i - U_i(Q, Y \mid \theta_i)$$

$$= \int_{L(n)}^{M(n)} \cdots \int_{L(1)}^{M(1)} Q_i(t)\Psi_i(t_i,\theta_i)\Big(\prod_{j\in N} f_j(t_j)\Big)dt_1 \cdots dt_n - U_i(Q,Y \mid \theta_i)$$

其中

$$\Psi_i(t_i,\theta_i) = t_i - \frac{\int_{t_i}^{M(i)} f_i(s_i)ds_i}{f_i(t_i)} \qquad 若 \quad t_i > \theta_i$$

$$\Psi_i(t_i,\theta_i) = t_i + \frac{\int_{L(i)}^{t_i} f_i(s_i)ds_i}{f_i(t_i)} \qquad 若 \quad t_i < \theta_i$$

方程（6.10）和（6.11）有很多重要的应用。本节的余下部分专门对某些具有特定经济意义的简单例子做一个扼要综述，籍此说明这些方程的功效。

例如，假设局中人都是在一件单独商品的拍卖中的投标人，且每个投标人的类型是该物品对他的价值。在这个情形中，我们可以再次把 $Q_i(t)$ 理解为当所报告的类型组合是 t 时，局中人 i 将得到该物品的概率（因而仍然可以作为他所能得到该物品的期望数量）。对于每个局中人 i，假设最小可能价值 $L(i)$ 是 0，并且假定一个认为该物品对他的价值为 0 的局中人在这个拍卖中将不付出任何代价，故

$$U_i(Q,\ Y \mid 0) = 0$$

（即是说，个人理性约束在最低可能类型 0 时是以等式满足的。）于是（6.11）式在

$$\theta_i = L\ (i) = 0$$

下暗示着拍卖商的总期望收入为

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{M(i)} \overline{Y}_i(t_i) f_i(t_i) dt_i \tag{6.12}$$

$$= \int_0^{M(n)} \cdots \int_0^{M(1)} \Big(\sum_{i=1}^{n} Q_i(t)\Psi_i(t_i,0)\Big)\Big(\prod_{j\in N} f_j(t_j)\Big)dt_1 \cdots dt_n$$

275

这个方程意味着拍卖者的期望收益仅依赖于 Q 函数，Q 函数则是描述每个局中人得到该物品的概率是如何依赖于局中人（报告的）类型的函数。例如，任何一个总是把该物品让与对此物品评价的真实值最高的投标人的机制一定有

$$Q_i(t) = 1 \quad 若 \quad \{i\} = \operatorname*{argmax}_{j\in N} t_j$$

$$Q_i(t) = 0 \quad 若 \quad i \notin \operatorname*{argmax}_{j\in N} t_j$$

故所有这样的机制必然带给卖主相同的期望收益。[两个或两个以上局中人都认为该物品对他们具有同样最高价值的平局（即有两个及两个以上局中人具有相同的最高类型）情况中，类型组合集的勒贝格测度为 0，所以方程（6.12）中的积分不依赖于平局情况中哪个局中人得到这个物品。] 注意到，对于任一

拍卖博弈的任一均衡使得（1）拍卖物品总是被出价最高的投标人获得，和（2）存在一个增函数 $b:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 使得，若每个投标人认为该物品对他的价值为 t_i，则在均衡中他将提交一个出价 $b(t_i)$，那么，等价的激励相容机制（在显示原理下）总是一个将拍卖品交付给对该物品有着最高真实评价价值的局中人的机制。因此，所有这种拍卖博弈的所有这样的均衡，都带给拍卖者同等的期望收益。这一结论解释了各种不同的拍卖博弈（第一价格拍卖、第二价格拍卖，等等）均衡的许多**收益等价**（revenue-equivalence）结论，而这些结论自从奥特加-赖克特的论文（1968）发表以来已众所周知［参见米尔格龙（1987），或者麦卡菲和麦克米伦（1987）］。

现在假设我们要寻找一个能最大化拍卖者的期望收益的激励相容的机制。假设我们可以找到一个激励相容的个人理性机制，在这个机制下，对任何一个类型组合 t，只要数量 $\Psi_i(t_i,0)$ 是最大的，则该拍卖物就交割给局中人 i，这个最大值应该是非负的，因为否则拍卖者将保留该物品。那么，在这个机制下，概率 $\{Q_i(t)\}_{i\in N}$ 应该对于每个 t 都满足

276 $$\max\sum_{i=1}^{n}Q_i(t)\Psi_i(t_i,0)^*$$

约束为 $$\sum_{i=1}^{n}Q_i(t)\leqslant 1,\ Q_j(t)\geqslant 0,\ \forall j$$

因此，在所有可能的激励相容的个人理性机制中，这个机制最大化了拍卖者的期望收益。

例如，考虑一种情形，其中有两个投标人，局中人 1 的类型从［0，1］上的均匀分布中抽取，而局中人 2 的类型从［0，2］上的均匀分布中抽取，则有

$$\Psi_1(t_1,0)=t_1-(1-t_1)=2t_1-1$$
$$\Psi_2(t_2,0)=t_2-(2-t_2)=2t_2-2$$

如果 $2t_1-1>\max\{2t_2-2,0\}$，即

$$t_1>\max\{t_2-0.5,0.5\}$$

那么我们就把拍卖物交割给局中人 1。类似地，如果 $2t_2-2>\max\{2t_1-1,0\}$，即

$$t_2\geqslant\max\{t_1+0.5,1\}$$

那么我们就把拍卖物交割给局中人 2。如果 $t_1<0.5$ 且 $t_2<1$，那么我们建议拍卖者保留拍卖物。给定两个局中人的类型报告，激励相容地执行这个交割计

---

* 原文误为 $\sum_{i=1}^{n}Q(t)\Psi_i(t_i,0)$ ——译者注。

划的方式之一如下：规定在这个计划下将得到拍卖物的局中人所付出的交割价格是，他在给定对方的类型报告下所能做出并仍将获得拍卖物的出价之下确界。举例来说，如果类型是 $t_1=0.8$ 和 $t_2=0.9$，那局中人 1 将以 0.5 的代价得到此拍卖物，尽管局中人 2 认为该物品对她实际上具有更高的价值。这个机制在所有激励相容的个人理性机制中是让拍卖者的期望收益达到最大的一个，尽管这个机制有时可能把拍卖物交割给对其评价值较低的那个局中人，或者甚至可能根本就不把该拍卖物交付给任何投标人。在这个最优拍卖机制中，在局中人 2 的报价高于局中人 1 报价不足 0.5 时，对局中人 2 的歧视扮演了鼓励局中人 2 如实报告其更高类型的角色，她有时不得不对该物品支付高达 1.5。有关最优拍卖更详细的探讨，参见迈尔森（1981*a*）。

方程（6.10）和（6.11）也能够应用于双边交易问题。假设局中人 1 是某 277
件不可分物品的卖主，而局中人 2 是唯一潜在的买主。因为局中人 1 拥有这个唯一物品，而在双边交易中，从一个局中人之转出必然是另一局中人之转入，所以可能结果集是

$$D=\{(q_1,\ q_2,\ y_1,\ y_2)\mid q_2=-q_1\in[0,\ 1]\ \text{且}\ y_2=-y_1\in\mathbf{R}\}$$

于是在任一机制 $(Q,\ Y)$ 中，我们一定有

$$Q_2(t)=-Q_1(t)\in[0,\ 1]\quad\text{且}\quad Y_2(t)=-Y_1(t),\ \forall t$$

对于每个局中人 i，令 θ_i 是其最低限度愿意交易的类型，于是

$$\theta_1=M(1),\ \theta_2=L(2)$$

从而方程（6.11）意味着

$$\begin{aligned}0&=\int_{L(2)}^{M(2)}\int_{L(1)}^{M(1)}\{Y_2(t)+Y_1(t)\}f_1(t_1)f_2(t_2)dt_1dt_2 \qquad (6.13)\\&=\int_{L(2)}^{M(2)}\overline{Y}_2(t_2)f_2(t_2)dt_2+\int_{L(1)}^{M(1)}\overline{Y}_1(t_1)f_1(t_1)dt_1\\&\quad-\int_{L(2)}^{M(2)}\int_{L(1)}^{M(1)}Q_2(t)\Big(\Psi_2(t_2,L(2))-\Psi_1(t_1,M(1))\Big)f_1(t_1)\\&\quad f_2(t_2)dt_1dt_2-U_1(Q,Y\mid M(1))-U_2(Q,Y\mid L(2))\end{aligned}$$

对于这个及其他相关结论，迈尔森和萨特斯韦特（Satterthwaite）（1983）已经研究过了。

例如，假设买卖双方对该物品的评价值都是从区间 $[0,\ 1]$ 上的均匀分布中抽取的独立随机变量。[这个例子由查特吉和塞缪尔森（1983）首次加以考虑。] 于是

$$\Psi_1(t_1,\ M\ (1))=\Psi_1(t_1,\ 1)=t_1+t_1=2t_1$$
$$\Psi_2(t_2,\ L\ (2))=\Psi_2(t_2,\ 0)=t_2-(1-t_2)=2t_2-1$$

将这些公式代入（6.13）式，又由均匀分布知 $f_i(t_i)=1$，我们看出任一激励

相容机制（Q，Y）必须满足

$$\int_0^1\int_0^1 2(t_2 - t_1 - 1/2)Q_2(t_1,t_2)dt_1dt_2 = U_1(Q,Y\mid 1) + U_2(Q,Y\mid 0)$$

278 当局中人有不进行交易的权利时，对任何一个个人理性机制而言，参与约束都意味着每个 $U_i(Q, Y\mid t_i)$ 都必须为非负。所以这个方程意味着，在一个激励相容的个人理性机制中能发生交易的条件下，买卖双方对此物品的评价值之差必须至少是 1/2。

如果一个交易机制总是把所交易的全部商品都配置给对其评价值最高的那些人，那么这个机制就是**事后有效的**（ex post efficient）。也就是说，为了在一个双边交易问题中达到事后有效性，那么只要该物品对买者的价值高于其对卖主的价值，买主就应该得到此物品。

对于这个双边交易的例子来说，其两个局中人对此物品的个人价值都是从区间［0，1］上的均匀分布中独立抽取的，并且在买者对此物品的个人价值高于卖者的条件下，那么这两个价值之差的期望值只能是 1/3。［通过计算可以证明

$$\int_0^1\int_0^{t_2}(t_2 - t_1 - 1/3)dt_1dt_2 = 0\}$$

这样一来，由于 $1/3<1/2$，所以就这个例子来说，不存在事后有效的激励相容的个人理性机制。根据显示原理，任何一个交易博弈的任一均衡都必须等价于某个激励相容的个人理性机制。因此，当交易者们可以在报告其类型时撒谎，并且也都有选择不交易的权利，则对于这个例子来说，没有办法设计一个交易博弈，使得在均衡中只要该物品对买主的价值比对卖主的价值实际上要高，这个交易就能发生。对更一般的分布这种不可能性的结论已经由迈尔森和萨特思韦特（1983）证明了。

在一个特殊的交易博弈中看一下事后无效性是怎样出现失效的或许有所裨益。为此假设局中人都是同时提交出价的，并且如果买者的出价高于卖者的出价，则买者以他们的平均出价获得此物品，否则交易不能成功。查特吉和塞缪尔森（1983）证明了这个博弈具有一个均衡，其中卖者的出价是 $\min\{2t_1/3 + 1/4,\ t_1\}$，而买者的出价是 $\max\{2t_2/3 + 1/12,\ t_2\}$，此博弈的这个均衡等价于如下激励相容的个人理性机制：

279
$$Q_2(t) = 1 \quad 若 \quad 2t_2/3 + 1/12 > 2t_1/3 + 1/4，即 \quad t_2 > t_1 + 1/4$$
$$Q_2(t) = 0 \quad 若 \quad t_2 < t_1 + 1/4$$
$$Y_2(t) = Q_2(t)(2t_2/3 + 1/12 + 2t_1/3 + 1/4)/2$$
$$= Q_2(t)(t_1 + t_2 + 0.5)/3$$

因此，如果此物品对买卖双方的价值之差不足 1/4，交易就不会发生。由于卖

方有尽量提高价格的动机而买方有尽量降低价格的动机，具有相同的价值时，卖者的标价将比买者的标价高，所以对此物品的任一给定价值，这个价值差异总是必要的。莱宁格（Leininger）、林哈特（Linhart）及拉德纳（1989）已经证明这个博弈还具有另外的一些均衡，这些均衡等于其他的激励相容的个人理性机制，但没有一个能保证，只要该物品对买方更有价值买方就能得到它。

有各种各样的因素在其他局势中能够提高实现事后有效性的可能性。这里我们考虑两种因素：交易者的数量很大和关于交易方向的不确定性。

格雷西克（Gresik）和萨特思韦特（1989）已经研究过有许多买者与卖者的模型种类，其中买者与卖者对交易商品具有独立的个人价值。他们两人已经证明，如果买卖双方的人数充分地大，那么可以构造激励相容的个人理性机制使得这些机制（在一定的技术意义上）任意接近于事后有效性。这个结果表明，交易者具有独立的个人价值的大型贝叶斯交易问题或许可以通过经济理论中的经典一般均衡模型很好地近似，其中事后有效性总是可以实现的。为了看出为什么是这样，假设有 N_1 个卖主和 N_2 个买主，每个卖者拥有一单位该商品的初始禀赋，每个交易者最多只能消费一单位该商品，并且交易者对此商品都具有独立的个人价值，每个价值都是从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布中抽取的。考虑买主与卖主只能以某个预先确定的价格 x 进行交易的一个机制。根据概率论中的大数定律，如果 N_1 和 N_2 都很大，那么 N_1 个卖主中愿意按此价格售出的比例以近似 1 的概率接近于 x，而 N_2 个买主中愿意以此价格买进的比例以近乎 1 的概率接近于 $1-x$。于是让我们选择 x 使得 $N_1 x = N_2(1-x)$，并且我们尽可能在那些愿意以此价格进行交易的人中达到买卖双方一对一地交易。任何一个依照这个机制操作就有可能发生的互惠交易必然会涉及到 280
这样一个局中人，他愿意以价格 x 参与交易但遭到拒绝（由于市场另一方所提供的局中人的不足）。如果 N_1 和 N_2 都很大，那么这类交易者个数几乎以概率 1 地占整个交易者人数非常小的一部分。

克拉姆顿、吉本斯及克莱普雷（Cramton, Gibbons and Klemperer, 1987）证明了关于交易方向的不确定性（即关于任一给定的局中人是否是此商品纯粹的买主或卖主的不确定性）有助于使事后有效的机制成为可行的机制。例如，和前面一样，假设局中人 1 和 2 是仅有的两个交易者，每个交易者都对货币和商品具有线性效用，并且他们对一个单位该商品的个人价值都是从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布中抽取的相互独立的随机变量。不过，现在假设每个局中人都具有一个单位给定商品的初始禀赋量。所以，现在除了可能结果集是

$$D=\{(q_1, q_2, y_1, y_2) \mid q_2=-q_1\in[-1, 1] \quad 且 \quad y_2=-y_1\in\mathbf{R}\}$$

之外，其它一切都如同前面的例子所描述的那样。

对于本例而言，存在激励相容的个人理性机制，以保证对此商品具有较高个人价值的局中人将买进另一局中人的全部供给。举例来说，考虑局中人同时

提交密封出价的一个博弈，出价较高的局中人买进另一局中人的全部供给，且成交的价格是两人出价的平均值。这个博弈具有一个均衡，其中每个局中人 i 都在其真实评价值为 t_i 时提交出价 $2t_i/3+1/6$。于是这个均衡与机制 (Q, Y) 是等价的，其中

$$
\begin{aligned}
&-Q_1(t)=Q_2(t)=1 \quad \text{若 } 2t_2/3+1/6>2t_1/3+1/6 \text{ 即 } t_2>t_1\\
&-Q_1(t)=Q_2(t)=-1 \quad \text{若 } t_2<t_1\\
&-Y_1(t)=Y_2(t)=Q_2(t)(2t_2/3+1/6+2t_1/3+1/6)/2\\
&\qquad =Q_2(t)(t_1+t_2+1/2)/3
\end{aligned}
$$

这个机制是激励相容的、个人理性的及事后有效的。

在这个均衡中，每个局中人的出价可能高于、也有可能低于其真实价值，这取决于其真实值是低于还是高于 1/2，也就是取决于此局中人在最终的交易
281 中是更喜欢卖出还是买进该物品。用刘易斯和萨平顿（Lewis and Sappington, 1989）的术语来说，局中人关于其最终将是买进还是卖出该物品的不确定性产生了**抵补激励**（countervailing incentives），它可以降低此局中人在交易博弈中撒谎的动机，从而减少实现信息激励约束的成本。

6.6 含合同的贝叶斯博弈的一般参与约束

任一给定的贝叶斯博弈 $\Gamma^b=\{N,\ (C_i)_{i\in N},\ (T_i)_{i\in N},\ (p_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\}$ 都可以被包含在一个如 6.4 节中所定义的贝叶斯集体选择问题 Γ^c 之中，只要把 Γ^c 中的结果集 D 与 Γ^b 中的行动组合集 C 相等同，即

$$D=C=\bigtimes_{i\in N}C_i$$

然而，由于我们在贝叶斯集体选择问题中忽略了道德风险，所以 Γ^c 的激励相容的机制集［在条件（6.7）的意义上］大于 Γ^b 的激励相容的机制集［在条件（6.6）的意义上］。事实上，定义贝叶斯博弈的激励相容性的一般激励约束（6.6）基于这样一个假定，即每个局中人 i 都具有自己控制其在 C_i 中行动之不可剥夺的权利。现在，让我们研究一下如果我们改变这一假定而代之以假定这个权利是可以转让的，将会发生什么情况。这就是说，局中人 i 能够选择签订一个合同，把其在 C_i 中行动的控制权委托给某个代理人或管理者，而这个代理人或管理者将按照合同所规定的机制实施控制权。不过，局中人 i 也具有拒绝签订任何一个这样的合同而自己控制自己行动的权利。

如果局中人 i 拒绝参与一个机制 μ，那么，其余局中人的行动仍然可以按照某个计划 $\tau_{-i}: T_{-i}\to\Delta(C_{-i})$ 而依赖于相互的类型，并且这个计划可能在

合同中对这个可能性做了相应的规定。当然，没有来自局中人 i 的报告，这个计划不可能依赖于 i 在 T_i 中的实际类型。另一方面，每个局中人在做参与这个机制与否的决策时，都已经在博弈之初知道了自己的类型。因而，如果对所有的局中人来说，签订一份若每人都签字则执行机制 $\mu: T \to \Delta(C)$ 的合同将是一个均衡，那么 μ 必须满足如下的一般**参与约束**（participation constraints）：

$$\forall i \in N,\ \exists \tau_{-i}: T_{-i} \to \Delta(C_{-i}) \quad \text{使得} \quad \forall t_i \in T_i \tag{6.14}$$
$$U_i(\mu \mid t_i) \geqslant \max_{c_i \in C_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \sum_{c_{-i} \in C_{-i}} p_i(t_{-i} \mid t_i)\tau_{-i}(C_{-i} \mid t_{-i})u_i(c,t)$$

282

（这里的“∃”意即“存在”。）我们说 μ 是**个人理性**的，当且仅当它满足这些参与约束。注意，我们假定了，每个局中人在决定是否参与这个机制时已经知道了自己的类型。

反过来说，假设一个机制 $\mu: T \to \Delta(C)$ 满足参与约束（6.14）和信息激励约束（6.7）。还假设在一个局中人签订委托合同时，他必须做一个关于其类型的秘密报告（只是用于合同执行中）；并且假设每个局中人都是与其余每个局中人同时而又独立地做出其签约决策和类型报告的（也许每个局中人都各自坐在单独的房间里，手头有一份合同和类型报告表的复印件）。最后，假设这份合同规定，如果每个局中人都在这个合同上签了字则执行 $\mu: T \to \Delta(C)$，并且对于每个局中人 i，只要 i 是唯一不在其上签字的局中人，则将执行满足（6.14）式的威胁行动组合 τ_{-i}。那么对于每一个局中人的每一个类型而言，签订合同并如实报告类型是一个均衡。在这个均衡下，因为每个局中人在他签订这份委托合同并报告他的类型时肯定所有其余的局中人都在签这个合同，所以他在某个 τ_{-i} 的条款下从谎报类型或不参与合同所得到的潜在收益不会影响他在实际签约和报告类型时的动机。

假定局中人将全部签订一个联合规制他们行动的合同并随后做出关于他们类型的报告，这的确是不失一般性的。例如，在一个签约博弈的某个均衡中，假定存在一个正概率使得某个局中人 i 的某个类型代理人 t_i 拒绝签订委托合同，而其余每个局中人都在签这个合同；那么，只要将这个合同做如下修改：它规定如果在他签约之后报告了类型 t_i，则其余局中人都按照 i 没有签约时合同为他们规定的去做；而且 i 可以做在他具有这个类型而没有签约之后所想做的一切，则局中人 i 的类型 t_i 将愿意在这个修改后的合同上签字。一个局中人一旦签了一份委托合同，再假定他一定会报告其类型是不失一般性的，因为随后的沉默可以被解释为这个合同条款中规定的某个类型报告的代名词。

于是，对于一个具有合同但又不具有可证实的类型（即没有道德风险但有逆向选择）的贝叶斯博弈 Γ^b，一个可行的机制 $\mu: T \to \Delta(C)$ 是满足信息激励约束（6.7）和一般参与约束（6.14）的机制。可以证明，满足（6.14）式的所有机制所组成的集是凸的，所以这种可行机制集也是凸集。

283

6.7 发送－接收博弈

发送－接收博弈是前面已经讨论过的具有通信的贝叶斯博弈之特殊类型，自从克劳福德（Crawford）和索贝尔（1982）以来，其主要目标是要得到有关通信问题的一些见解。一个发送－接收博弈就是一个具有通信的两人贝叶斯博弈，其中局中人1（发送者）具有私人信息但不选择行动，而局中人2（接收者）有对行动的一个选择但又不拥有私人信息。因此，发送－接收博弈提供了那些既涉及到道德风险又涉及到逆向选择的例子中特别简单的一类。

一个一般的**发送－接收博弈**（sender-receiver game）可以通过规定（T_1，C_2，p，u_1，u_2）来刻划，其中 T_1 是局中人1的可能类型集，C_2 是局中人2的可能行动集，p 是 T_1 上的一个概率分布并用以表示局中人2关于局中人1类型的信念，$u_1: C_2 \times T_1 \to \mathbf{R}$ 和 $u_2: C_2 \times T_1 \to \mathbf{R}$ 分别表示局中人1和局中人2的效用函数。当且仅当 T_1 和 C_2 都是有限集时，相应的发送－接收博弈才是有限的。

对如上描述的发送－接收博弈而言，一个**调解计划**或**机制**就是任何一个函数 $\mu: T_1 \to \Delta(C_2)$。如果这样一个计划 μ 被局中人诚实而又顺从地执行，那么局中人2的期望支付将是

$$U_2(\mu) = \sum_{t_1 \in T_1} \sum_{c_2 \in C_2} p(t_1)\mu(c_2 \mid t_1)u_2(c_2, t_1)$$

而局中人1如果知道其类型 t_1，则他的条件期望支付将是

$$U_1(\mu \mid t_1) = \sum_{c_2 \in C_2} \mu(c_2 \mid t_1)u_1(c_2, t_1)$$

在发送－接收博弈中，一般激励约束（6.6）是可以被简化的。一方面，由于局中人1不控制行动，所以对局中人1的激励约束化简为类似于（6.7）式的
284 纯粹信息激励约束。另一方面，由于局中人2没有私人信息，所以对局中人2的激励约束化简为类似于（6.4）式的纯粹策略激励约束。因此对发送－接收博弈来说，一个调解计划 μ 是**激励相容**的，当且仅当它满足

$$\sum_{c_2 \in C_2} \mu(c_2 \mid t_1)u_1(c_2, t_1) \geqslant \sum_{c_2 \in C_2} \mu(c_2 \mid s_1)u_1(c_2, t_1), \forall t_1 \in T_1, \forall s_1 \in T_1 \tag{6.15}$$

及

$$\sum_{t_1 \in T_1} p(t_1)(u_2(c_2, t_1) - u_2(e_2, t_1))\mu(c_2 \mid t_1) \geqslant 0, \quad \forall c_2 \in C_2, \forall e_2 \in C_2 \tag{6.16}$$

信息激励约束（6.15）断言，如果局中人 2 预期局中人 1 会服从调解人的推荐，那么当他的类型实际上是 t_1 时，他不应该指望通过声称自己的类型是 s_1 而得到增益。策略激励约束（6.16）断言，如果局中人 2 相信局中人 1 对调解人是诚实的，那么当调解人向她推荐 c_2 时，她不应该指望能通过选择行动 e_2 而得到增益。

例如，考虑法雷尔（1988）所提出的一个发送－接收博弈，其中 $C_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$，$T_1 = \{1.a, 1.b\}$，$p(1.a) = .5 = p(1.b)$，以及依赖于局中人 1 的类型和局中人 2 的行动的效用支付 (u_1, u_2) 如表 6－5 所示。

表 6－5　　一个发送－接收博弈中的支付

局中人 1 的类型	C_2		
	x_2	y_2	z_2
1.a	2, 3	0, 2	−1, 0
1.b	1, 0	2, 2	0, 3

首先假设不存在调解，但是局中人 1 能够从某个很大的字母表或词汇表中抽取任一信息发送给局中人 2，并且局中人 2 确定能够无误或无噪音地接收到局中人 1 的信息。在这个假定之下，法雷尔（1988）已经证明，在诱导通信博弈的任一均衡中，局中人 2 在局中人 1 以正概率发送任一信息之后，都将选择行动 y_2。为探其究竟，注意到局中人 2 只有在她对 1.a 所确定的概率恰好为 .5 时才会在选择 x_1 和 z_2 之间无差异，但有了这个概率判断，她将更喜欢 y_2。 285
所以没有一条信息能生成一种信念让局中人 2 愿意在 x_2 和 z_2 之间随机选择。对于局中人 1 所能发送且依赖于局中人 2 接收到这个信息中所做推断的每一条信息，局中人 2 的反应可能是确定地选择 x_2，可能是在 x_2 和 y_2 之间随机选择，可能是确定地选择 y_2，可能是在 y_2 与 z_2 之间随机选择，也可能是确定地选择 z_2。还要注意到，当局中人 1 的类型是 1.a 时，在所有这些可能的反应中，任何两个对于他都不是无差异的，因为他严格地偏好 x_2 胜于 y_2，偏好 y_2 胜于 z_2。所以，在诱导通信博弈的一个均衡中，如果局中人 1 至少有两个可以正概率发送并会带来局中人 2 不同反应的信息（称之为“α”和“β”），那么类型 1.a 将只愿意发送这些信息中的一条（譬如说是“α”）；于是，另一条信息（“β”）将只能由类型 1.b 以正概率发送，但如果是这样的话，局中人 2 对这另一个信息（“β”）的最佳反应将是 z_2，这正是局中人 1 的类型 1.b 的最坏结果；所以类型 1.b 也不会以正概率发送这个信息。这一矛盾意味着，局中人 2 对局中人 1 以正概率发送的每一信息都必须做相同的反应。而且，这个反应一定是 y_2，因为 y_2 是局中人 2 在给定其收到任何信息前的信念之下唯一最佳的反应。

因而，只要局中人被限制使用完全可靠的无噪音通信信道，则在这个博弈的任一均衡中，局中人 1 和 2 之间不可能发生实质性的通信；关于这个不可能性结论的推广可参见福格斯（1985，1988）。然而，使用一个有噪音的通信信道时，实质性的通信就有可能发生。举例而言，假设局中人 1 有一只可为他送信给局中人 2 的信鸽，但如果放鸽送信，信鸽到达局中人 2 处的概率为 1/2。那么这个诱导通信博弈就有一个均衡，其中局中人 2 在信鸽到达的情况下选择 x_2，如果信鸽没有到达，局中人 2 就选择 y_2；而局中人 1 则在其类型为 1.a 时放鸽送信，在其类型为 1.b 时不放鸽送信。由于通信信道中的噪音（信鸽有迷失的可能性），所以如果局中人 2 得到信息“没有信鸽到达”，那她将认为局中人 1 的类型是 1.a（而且他放了一只信鸽但迷失了）的概率为 1/3 {=.5×1/2/(.5×1+.5×1/2)}*，于是局中人 2 将愿意选择 y_2，这对局中人 1 的类型
286 1.b 来说比 x_2 要好一些。从实质上讲，通信信道中的噪音在类型 1.b 没有模仿类型 1.a 时给予其某种保护以免暴露，从而减少了类型 1.b 去模仿 1.a 的动机。

因而，有了一个噪音通信系统，就有可能存在一个均衡，其中两个局中人的期望支付都高于他们在任一直接无噪音通信均衡中所得到的期望支付。通过对激励约束（6.15）和（6.16）的分析，我们能够找到另外的调解计划 $\mu: T_1 \to \Delta(C_2)$，使其中的两个局中人都可以做得更好。对局中人 1 的信息激励约束（6.15）是

$$2\mu(x_2|1.a)-\mu(z_2|1.a) \geqslant 2\mu(x_2|1.b)-\mu(z_2|1.b)$$
$$\mu(x_2|1.b)+2\mu(y_2|1.\ b) \geqslant \mu_2(x_2|1.a)+2\mu(y_2|1.a)$$

而对局中人 2 的策略激励约束（6.16）是

$$0.5\mu(x_2|1.a)-\mu(x_2|1.b) \geqslant 0$$
$$1.5\mu(x_2|1.a)-1.5\mu(x_2|1.b) \geqslant 0$$
$$-0.5\mu(y_2|1.a)+\mu(y_2|1.b) \geqslant 0$$
$$\mu(y_2|1.a)-0.5\mu(y_2|1.b) \geqslant 0$$
$$-1.5\mu(z_2|1.a)+1.5\mu(z_2|1.b) \geqslant 0$$
$$-\mu(z_2|1.a)+0.5\mu(z_2|1.b) \geqslant 0$$

（举例来说，这些条件中的最后一个断言，局中人 2 不应该指望能在被推荐了 z_2 时通过选择 y_2 而得到增益。）作为一个调解计划，μ 还必须满足如下概率约束

$$\mu(x_2|1.a)+\mu(y_2|1.a)+\mu(z_2|1.a)=1$$

---

* 原文为（=.5×1/(.5×1+.5×1/2)）——译者注。

$$\mu(x_2|1.b)+\mu(y_2|1.b)+\mu(z_2|1.b)=1$$

以及所有的 $\mu(c_2|t_1)\geqslant 0$。

如果，比方说，我们对局中人 1 的类型 1.a 最大化其期望支付

$$U_1(\mu|1.a)=2\mu(x_2|1.a)-\mu(z_2|1.a)$$

约束条件仍为上面所给出的这些约束，那么我们得到如下调解计划

$$\mu(x_2|1.a)=0.8,\quad \mu(y_2|1.a)=0.2,\quad \mu(z_2|1.a)=0$$
$$\mu(x_2|1.b)=0.4,\quad \mu(y_2|1.b)=0.4,\quad \mu(z_2|1.b)=0.2$$

287

当一个噪音通信信道或调解人按照这个计划 μ 向局中人 2 提供推荐行动的信息，并作为局中人 1 所发送的类型报告的一个随机函数时，局中人 1 如实报告和局中人 2 服从推荐行动就构成了一个均衡。进一步而言，没有任何一个通信信道的诱导的任何一个通信博弈，其均衡能够对局中人 1 的类型 1.a 给出一个比他能从这个计划中得到的期望支付 $U_1(\mu|1.a)=1.6$ 更高的期望支付。

另一方面，最大化局中人 2 的期望支付的机制是

$$\mu(x_2|1.a)=2/3,\quad \mu(y_2|1.a)=1/3,\quad \mu(z_2|1.a)=0$$
$$\mu(x_2|1.b)=0,\quad \mu(y_2|1.b)=2/3,\quad \mu(z_2|1.b)=1/3$$

这个机制给出期望支付

$$U_1(\mu|1.a)=1\tfrac{1}{3},\quad U_1(\mu|1.b)=1\tfrac{1}{3},\quad U_2(\mu)=2\tfrac{1}{2}$$

一旦我们有了对所有激励相容的调解计划的一个详尽刻划，那么下一个自然而然的问题就是：我们实际上应该预测哪一个调解计划或机制会被局中人所选择并使用呢？换个问法就是，如果局中人的一个或几个具有在所有的激励相容的机制中加以选择的权利，那我们应该预期会观察到哪个机制呢？

为了避开讨价还价中公平性的问题（这个问题将在第 8 章及以后加以考虑），在这里我们只考虑选择调解人或设计一个通信信道的权利只属于一个局中人的情况。让我们先从假设局中人 2 可以选择调解计划着手。为了更明确起见，假设局中人 2 首先选择了一个调解人并指导他执行某个激励相容的调解计划；然后局中人 1 可以接受这个调解人并从此只通过他与局中人 2 进行通信，或者 1 也可以拒绝这个调解人且此后不再与 2 有进一步的通信。

可以自然地预期到局中人 2 将利用她的权利去选择一个会执行对局中人 2 最好的激励相容调解计划的调解人。对于局中人 1 而言，如果他的类型是 1.b，这个计划不如 y_2 好，所以某些人可能会想到，如果局中人 1 的类型是 1.b，那他应该会拒绝局中人 2 所建议的调解人并拒绝进一步的通信。然而，这个调解人选择博弈有一个均衡，其中局中人 1 不管自己是哪个类型都接受局中人 2 的提议。在这个均衡中，如果 1 拒绝 2 的调解人，那么 2 或许能合情合理地推断出 1 的类型是 1.b，在这种情况下 2 的理性选择是 z_2 而不是 y_2，但

288

z_2 对 1 的两个类型来说都是最差的可能结果。

不幸的是，这个调解人选择博弈还有另外一个序贯均衡，其中不论局中人 2 选择什么样的调解计划，局中人 1 总是拒绝局中人 2 所建议的调解人。在这个均衡中，如果局中人 1 拒绝这个调解人，则局中人 2 推断不出 1 的类型而只好选择 y_2；但是，如果他接受了这个调解人，则她能推断出（在这个零概率事件中）局中人 1 的类型是 1.b，从而不管调解人随后所推荐的是什么她都将选择 z_2。

现在考虑这样一个调解人选择博弈，其中知情的局中人 1 可以选择调解人并挑选将要被执行的调解计划，唯一的限制是局中人 1 在知道他自己的类型之后就必须做出选择，而局中人 2 必须知道局中人 1 选择了什么调解计划。对于任一激励相容的调解计划 μ，一定存在一个均衡，其中局中人 1 不管他自己的类型是什么都肯定选择 μ，并且此后在执行 μ 时，他们两人都是诚实而又顺从地进行博弈。在这个均衡中，如果任何一个不同于 μ 的调解计划被选择了，那么局中人 2 可从 1 的这个意外选择推断出他的类型是 1.b（她可能会认为“只有 1.b 才会偏离 μ”），从而此后她不管调解人所推荐的是什么都选择 z_2。因此，对这样一个调解人选择博弈，除了我们已经由显示原理所知道的之外，像序贯均衡这样的概念是不能确定其结果的。

为了得到局中人最可能选择什么样的调解计划或机制之更为确定的预测，我们需要做出某些超乎传统非合作博弈理论范围之外的假设。对合作机制选择理论的一个介绍将在第 10 章给出。

6.8 可接受的与占优势的相关均衡

在本节中，我们要考虑的问题是，对具有通信的策略型博弈而言，与完美均衡相类似的概念应该是什么［这里的论述是按照迈尔森（1986a）的表述］。

289

完美均衡概念所依据的关键思想是，局中人应该把博弈所有可能的结果都加以适当的考虑，这是因为任何一个结果都至少有某个无限小的机会发生，或许是由于某些局中人可能会犯错误或“颤抖”而使用了某个非理性行动之故。不过，为了保持理性局中人的假定，任何一个局中人颤抖的可能性总是被假定最多为无限小。

给定一个策略型有限博弈 $\Gamma=\{N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\}$ 和任一正数 ε，一个 ε－相关策略是 $\Delta[C\times(\bigcup_{S\subseteq N}C_S)]$ 中任一概率分布 η，使得

$$\varepsilon\eta(c,e_S)\geqslant(1-\varepsilon)\sum_{c_i\in C_i}\eta(c,e_{S\cup\{i\}}) \tag{6.17}$$

$$\forall c \in C,\quad \forall i \in N,\quad \forall S \subseteq N-i,\quad \forall e_s \in C_s$$

及

$$\text{若 } \eta(c,\ e_S) > 0,\quad \text{则}\quad \eta(c,\ e_{S\cup\{i\}}) > 0 \tag{6.18}$$

$$\forall c \in C,\ \forall i \in N,\ \forall S \subseteq N-i,\ \forall e_{S\cup\{i\}} \in C_{S\cup\{i\}}$$

这里，$e_{S\cup\{i\}}$的第 i 个分量是 e_i，而其余所有分量一起构成 e_S。与前面一样，我们采用记号 $C_S = \times_{i\in S} C_i$ *，其中 $C_\emptyset = \{\emptyset\}$ 和 $C = C_N$。

在这样一个 ε－相关策略 η 中，我们把 $\eta(c,\ e_S)$ 解释为这样的概率，调解人以这个概率向各个局中人推荐 $c = (c_i)_{i\in N}$中的策略，并且不在 S 中的所有局中人都将理性地选择他们的策略，但是 S 中的局中人将全部颤抖而偶然地执行$e_S = (e_i)_{i\in S}$中的策略。条件（6.18）断言给定调解人的任一推荐组合和其余局中人的颤抖，每一个策略 e_i 都一定有着正概率被局中人 i 作为颤抖的结果而加以选择。条件（6.17）断言，给定调解人的任一推荐组合和其余局中人的颤抖，局中人 i 颤抖的条件概率不大于 ε。因此，当 ε 趋于 0 时，在 ε－相关策略的任一极限中，任一局中人 i 颤抖的条件概率总是为 0，且独立于所给定的关于调解人推荐和其他局中人颤抖的任何信息。由于 Γ 是一个具有通信的博弈，所以并不需要颤抖独立性的更强形式。

值得一提的是，如果 η 是一个 ε－相关策略且 $\hat{\varepsilon} > \varepsilon$，那么 η 也是一个 $\hat{\varepsilon}$－相 290
关策略。

一个 ε－**相关均衡**（ε-correlated equilibrium）被定义为满足下述激励约束的任一 ε－相关策略：

$$\sum_{c_{-i}\in C_{N-i}} \sum_{S\subseteq N} \sum_{i\ e_i\in C_i} \eta(c, e_S)\{u_i(c_{-s}, e_S) - u_i(c_{-(S\cup\{i\})}, e_{S\cup\{i\}})\} \geqslant 0$$

$$\forall i \in N,\quad \forall c_i \in C_i,\quad \forall e_i \in C_i$$

这就是说，局中人 i 在他被告知使用 c_i 且他没有非理性的颤抖时，他不应该有通过使用策略 e_i 而会增益的预期。

Γ 的一个**可接受的相关均衡**（acceptable correlated equilibrium）是 $\Delta(C)$ 中任一 μ 使得存在某个序列 $\{\varepsilon_k,\ \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$，对于每个 k 都满足 $\varepsilon_k > 0$ 且 η_k 是一个 ε_k－相关均衡，并有

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0 \quad 及 \quad \lim_{k\to\infty} \eta_k(c,\ \emptyset) = \mu(c),\ \forall c \in C$$

也就是说，一个可接受的相关均衡是 ε－相关均衡在 ε 趋于 0 时的任一极限［这里 $\eta(c,\ \emptyset)$ 是调解人推荐 c 而所有局中人都是理性地选择的概率］。我们可以把一个可接受的相关均衡设想为这样一个相关均衡，其中当每个局中人都具

---

* 原文为 $C_S = X_{i\in N} C_i$——译者注。

有一个无限小的概率颤抖成任一策略时，每个局中人的服从行为仍然是理性的。

我们称 c_i 是局中人 i 的一个**可接受的策略**（acceptable strategy），当且仅当对于每一个正数 ε，存在某个 ε - 相关均衡 η 使得

$$\sum_{c_{-i}\in C_{N-i}} \eta(c, \varnothing) > 0$$

这就是说，c_i 是可接受当且仅当在颤抖的概率是任意小时，它可能被局中人 i 理性地使用。令 E_i 表示局中人 i 在博弈 Γ 中可接受的策略所组成的集，而令 $E = \times_{i\in N} E_i$。迈尔森（1986a）证明了集 E_i 总是非空的。

令 $R(\Gamma)$ 表示由 Γ 通过剔除所有不可接受的策略后导出的博弈，即

$$R(\Gamma) = (N, (E_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$$

[$R(\Gamma)$ 中的效用函数恰好是 Γ 中效用函数限于定义域 $E \subseteq C$ 上的部分。] 这个博弈 $R(\Gamma)$ 被称为 Γ 的**可接受的剩余**（acceptable residual）博弈。

291 对博弈 $R(\Gamma)$ 来说，$\Delta(E)$ 中的任一相关策略也可以被解释为对 Γ 而言 $\Delta(C)$ 中的一个相关策略，只须简单地对 $C \setminus E$ 中每一策略组合都赋予概率 0 即可。反之，如果 μ 属于 $\Delta(C)$ 且 $\sum_{e\in E} \mu(e) = 1$，那么 μ 也可以被解释为对 $R(\Gamma)$ 来说 $\Delta(E)$ 中的一个相关策略，只须简单地忽略不在 E 中的策略组合的零分量即可。

借助于这一记号，我们可以叙述有关可接受的相关均衡之主要定理（至于其证明，参见迈尔森，1986a）。

定理6.1 有限策略博弈 Γ 的可接受的相关均衡集是 Γ 的相关均衡集的一个非空子集。如果 μ 是 Γ 的任一相关均衡，那么 μ 是一个可接受的相关均衡当且仅当

$$\sum_{c\in E} \mu(c) = 1$$

进一步而言，Γ 的可接受的相关均衡集恰好与 $R(\Gamma)$ 的相关均衡集一致［$R(\Gamma)$ 的相关均衡重新被解释为 $\Delta(C)$ 中的相关策略］。

因此，为了表征 Γ 的可接受的相关均衡集，只需识别并剔除所有局中人的全部不可接受的策略即可（关于识别不可接受的策略的计算程序，可参看迈尔森，1986a）。于是，由此保留下来的剩余博弈的相关均衡就是原博弈的可接受的相关均衡。可以证明，所有弱劣的策略都是不可接受的，但某些不可接受的策略也有可能是非劣的。例如，在表 6 - 6 中就不存在劣策略，但 y_1，z_1，y_2 及 z_2 都是不可接受的。

表 6-6　　一个策略型博弈

C_1	C_2			
	w_2	x_2	y_2	z_2
w_1	2, 2	1, 1	0, 0	0, 0
x_1	1, 1	1, 1	2, 0	2, 0
y_1	0, 0	0, 2	3, 0	0, 3
z_1	0, 0	0, 2	0, 3	3, 0

E_i 中可能会有某些策略，尽管它们在 Γ 中是可接受的，但在可接受的剩余 292
$R(\Gamma)$ 的背景下它们又都是不可接受的。这种情况之所以有可能会发生是因为博弈 $R(\Gamma)$ 的 ε 相关策略没有包含策略集 $(E_i)_{i\in N}$ 之外的任何颤抖。于是，我们考虑 Γ 的可接受剩余的可接受剩余，即 $R^2(\Gamma)=R[R(\Gamma)]$。如此归纳下去，我们可以定义

$$R^{k+1}(\Gamma)=R[R^k(\Gamma)], \quad k=2, 3, 4, \cdots$$

对一个博弈取可接受的剩余意味着剔除这个博弈的不可接受的策略，而 Γ 本身对每个局中人都只有有限多个策略，所以一定存在某个 K 使得

$$R^K(\Gamma)=R^{K+1}(\Gamma)=R^{K+2}(\Gamma)=\cdots=R^\infty(\Gamma)$$

令 E_i^∞ 表示在 $R^\infty(\Gamma)$ 中每个局中人 i 的策略集，我们称 $R^\infty(\Gamma)$ 为 Γ 的**占优势的剩余**（predominant residue），并称 E_i^∞ 中的策略为 Γ 中局中人 i 的**重复可接受的**（iteratively acceptable）或（**弱**）**占优势的**［(weakly) predominant］策略。我们说 μ 是 Γ 的一个**占优势的相关均衡**（predominant correlated equilibrium），当且仅当它是 Γ 的相关均衡，并且

$$\sum_{e\in E^\infty}\mu(e)=1, \quad \text{其中} \quad E^\infty=\underset{i\in N}{\times}E_i^\infty$$

也就是说，一个占优势的相关均衡就是一个其中所有局中人都总被告知要使用其占优势策略的相关均衡。可以显而易见地证明，占优势的均衡集是非空的，并且至少包括一个在没有通信情况下可以被执行的纳什均衡（参见迈尔森，1986*a*）。

在表 6-6 中，策略 w_1，x_1，w_2，x_2 全都是可接受的策略，但只有 w_1 和 w_2 是占优势的。因此，唯一占优势的均衡是 (w_1, w_2)，均衡 (x_1, x_2) 是可接受但不是占优势的。

可能存在可接受并且占优势的相关均衡能够在没有通信的情况下被执行（所以它们也都是纳什均衡），但却不是完美均衡。例如，考虑表 6-7 中的三人博弈，其中 $C_i=\{x_i, y_i\}$，$i=1, 2, 3$。

(x_1, x_2, y_3) 和 (y_1, x_2, x_3) 两者都是这个博弈中的纯策略纳什均衡。当然，(x_1, x_2, y_3) 是一个完美均衡。但 (y_1, x_2, x_3) 不是完美的，因为当局中人相互独立地颤抖而以小的正概率离开策略 (y_1, x_2, x_3) 时，
293 局中人 1 颤抖到 x_1 而局中人 3 逗留在 x_3 的概率要远大于局中人 1 颤抖到 x_1 而局中人 3 也颤抖到 y_3 的概率。了解到这一点，局中人 2 将预期到通过从 x_2 转换到 y_2 会更好。然而，所有这些策略在这个博弈中都是可接受的，从而包括 (y_1, x_2, x_3) 在内的所有均衡都是可接受而又占优势的。

表 6-7　　一个策略型三人博弈

C_1	C_2 和 C_3			
	x_3		y_3	
	x_2	y_2	x_2	y_2
x_1	1, 1, 1	4, 4, 0	1, 1, 1	0, 0, 4
y_1	3, 2, 2	3, 2, 2	0, 0, 0	0, 0, 0

为了看出为什么所有策略都是可接受的，而且 (y_1, x_2, x_3) 又是一个可接受的均衡，令 ε 是某个非常小的正数，并考虑如下的调解计划。调解人以概率 $1-\varepsilon-\varepsilon^2$ 推荐策略 (y_1, x_2, x_3)，以概率 ε 推荐策略 (x_1, x_2, y_3)，以及以概率 ε^2 推荐策略 (x_1, y_2, x_3)。如通常一样，假设每个局中人只被告知调解人对他的推荐。为了完全描述一个 ε^2 - 相关策略，让我们假设每个局中人都独立地以概率 ε^2 颤抖（给定调解人所做出的任一推荐），并且每当一个局中人颤抖时，他总是同等可能地使用其策略。对任一充分小的 ε，这是一个 ε^2 - 相关均衡，并且随着 ε 越来越小，它也越来越接近于均衡 (y_1, x_2, x_3)。

为了验证在这个 ε^2 - 相关均衡中，当调解人向局中人 2 推荐使用策略 x_2 时，2 的确乐意使用这个策略，试考虑一下当她得到这个推荐时，对于其他局中人她会相信些什么。她能得到这个推荐，最可能的方式是局中人 1 被告知使用 y_1 而局中人 3 被告知使用 x_3，并且没有一个人会颤抖。但在这种情况下，局中人 2 在她的两个策略之间是无差异的。她能够得到这个推荐的第二可能方式是局中人 1* 被告知使用 x_1 而局中人 3 被告知使用 y_3，并且没有一个人会颤抖，但其发生的先验概率是 ε；在这种情况下，她将严格地偏好于服从推荐而使用 x_2。其余所有的事件都具有数量级 ε^2 或更小的先验概率，所以局中人 2 将愿意服从推荐而选择 x_2。

---

* 原文误为局中人 2——译者注。

6.9　展开型博弈和多阶段博弈中的通信

当局中人能够相互通信并可以与一个调解人通信时，对展开型博弈的分析 294
与没有通信时可能会有着显著的差别。例如，考虑如图 6·2 和图 6·3 所示的展开型博弈。

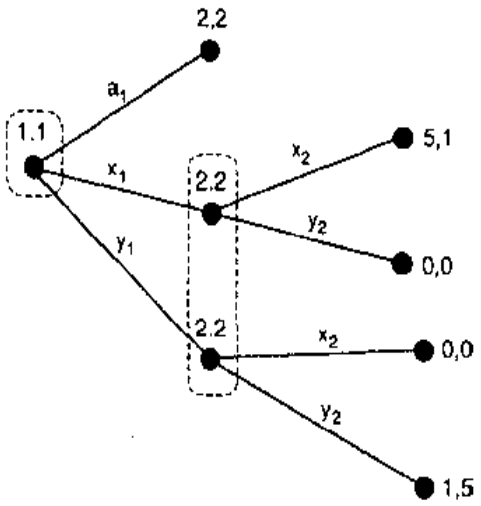

图 6·2

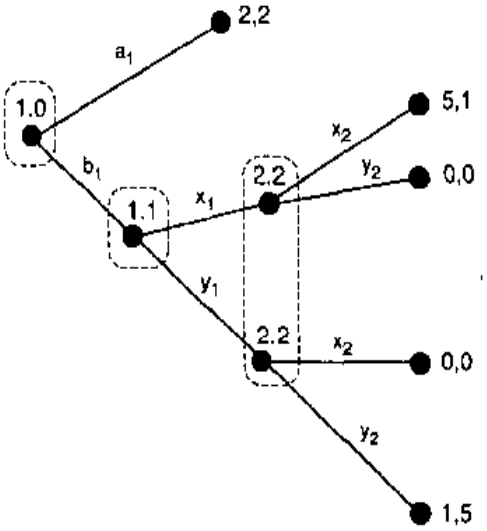

图 6·3

与图 5·2 和图 5·3 中的博弈一样，图 6·2 和 6·3 中的博弈也具有相同的简约正规表示。科尔伯格和默顿斯（1986）曾论证过这两个博弈应该被视为分析 295
上等价的。然而，作为具有通信的博弈，它们却是非常不同的。

在图 6·2 中，对局中人 1 来说，在结点 1.1 处的行动 y_1 是由 a_1 为强劣的。因此，即使具有通信，图 6·2 中的局中人 1 也决不会理性地选择 y_1。

另一方面，考虑图 6·3 中可能由调解人所执行的下述计划。首先，建议局中人 1 在其结点 1.0 处选择 b_1。然后，在局中人 1 已经选择了 b_1 之后，该调解人就抛一枚硬币。如果硬币正面朝上，就建议局中人 1 选择 x_1，而局中人 2 选择 x_2；如果硬币反面朝上，就建议局中人 1 选择 y_1，而局中人 2 选择 y_2。当这个调解计划在图 6·3 的博弈中被执行时，局中人 1 选择 y_1 的概率是 1/2，并且两个局中人都计划服从调解人的这个推荐是一个均衡。在任一时点，如果预期到局中人 2 会服从调解人，则局中人 1 如果不服从将会严格地变差。特别地，局中人 1 在结点 1.0 处服从推荐而选择 b_1 所能得到的期望支付是 $.5\times5+.5\times1=3$，而他从选择 a_1 所得到的期望支付只是 2。

执行这个调解计划的关键是，局中人 1 必须不知道对他的推荐将是 x_1 还是 y_1，而当他知道对自己的推荐而想去选择 a_1 时已经太迟了。在图 6·3 中，

有这样一个时点（在结点 1.0 之后但在结点 1.1 之前）：此时对局中人 1 来说，x_1 和 y_1 仍然是可供选择的，但 a_1 已经不能选择了；然而，在图 6·2 中却没有这样一个时点。如果所有的通信都必须在博弈开始之前发生，那么，这个差别是没什么影响的。但是，在局中人可以在任一时点相互之间或与调解人进行通信的假定之下，图 6·3 具有一个严格地比图 6·2 所具有的更大的激励相容调解计划集，尽管二者具有相同的纯简约正规表示。

这样一来，如果我们想要把展开型博弈当作具有通信的博弈来研究，那正规表示就不足以刻划相关均衡或激励相容调解计划集。如果我们想在一个给定展开型博弈的显性结构之外，进一步假定：局中人在了解到关于其类型或信息状态的私人信息后还具有暗含的通信机会，那么，我们在第 2 章所讨论过的所有策略表示中，没有一个能够充分刻划该给定博弈的激励相容调解计划或通信
296 均衡（为了看出多代理人表示的不充分性，考虑任何一个发送－接收博弈，但发送者的通信可能性未被包含在博弈的显性结构之中。在多代理人表示或类型代理人表示中，发送者的代理人不具有显性的策略选择自由，从而他们进入信息结构便无从表示，所以，除了接收者的一个代理人之外，所有代理人都是作为虚设的哑吧而出现的）。

因此，在显示原理与策略型表示的一般性之间存在着概念上的权衡关系。如果我们允许通信可能性在分析博弈的建模阶段被隐性地保留下来，那么，因为（根据显示原理）通信均衡可以用一组线性激励约束来表征，所以我们可以得到一个数学上较为简单的解概念。然而，如果想要研究策略型的博弈，那么在构造正规表示或多代理人表示之前，所有的通信可能性都必须作为展开型博弈结构的一个显性部分。

迈尔森（1968a）研究了用**多阶段型**（multistage form）给定博弈中的通信，这种多阶段型是库恩（1953）所定义展开型的一种变形。［这种多阶段型实际上更紧密地类似于冯·诺依曼和摩根斯特恩（1944）所使用的展开型的定义。］一个多阶段博弈就是形如

$$\Gamma^{\mathrm{m}}=\left(N,\ K,\ \{\ (C_i^k,\ T_i^k)_{k=1}^K,\ u_i\}_{i\in N},\ (p^k)_{k=1}^K\right)$$

的任何一个博弈，其中 K 是此博弈的阶段数；N 是局中人集；C_i^k 表示阶段 k 结束时可供局中人 i 使用的行动集；T_i^k 表示局中人 i 在阶段 k 开始时所能知道的信号集或新信息集；p^k 描述了所有局中人在阶段 k 的信号组合集 $\times_{i\in N}T_i^k$ 上的一个概率分布，这个分布是［在 $\times_{l=1}^{k-1}\times_{i\in N}(C_i^l\times T_i^l)$ 中］行动与信号之既往历史的一个函数；u_i 将局中人 i 的效用支付确定为［在 $\times_{l=1}^{K}\times_{j\in N}(C_j^l\times T_j^l)$ 中］所有行动与信号的一个函数。也就是说，一个多阶段博弈区别于一个展开型博弈之处在于其局中人的行动是按照离散的阶段排序的，并且我们必须规定一个局中人在每个阶段知道些什么，即使他可能没有备选的行动（即

在$|C_i^k|=1$的情况下)。任何一个展开型博弈，只要其中局中人以预先规定的顺序行动，都可以用明显的方式把它表示为一个多阶段博弈。(也就是说，我们可以把每个局中人的行动与一个不同的阶段等同。而在每个阶段k，我们规定不行动的局中人i没有新的信息从而有$|T_i^k|=1$，除非他在前一阶段已经行动了，在这种情形下，他的新信息是他最近行动的重新收集，故$T_i^k=C_i^{k-1}$)。

对于多阶段博弈，显示原理断言，能通过添加一个通信结构由Γ^m诱导而 297
来的任一通信博弈，其任一均衡都等价于具有下述形式的某个调解计划：(1)在每个阶段的开始，局中人秘密地向调解人报告他们的新信息；(2)调解人则通过应用某个随机选择的反馈规律决定向每个局中人推荐在此阶段的行动，该行动是他在此阶段及以前各阶段所收到的全部报告的一个函数；(3)调解人秘密地告知每个局中人其被推荐的行动；(4)当所有局中人都知道调解人用以选择其反馈规律的概率分布时，所有局中人都如实报告信息并依调解人推荐选择其行动是该诱导通信博弈的一个均衡。满足这个激励相容性条件(4)的反馈规律上的分布可以用一组线性激励约束来表征，这些激励约束断言，没有一个局中人在预期到所有其余局中人都是诚实而又服从的时候，会指望能通过转换成任何一个撒谎和不服从的操作性策略而有所增益。

直观地讲，一般显示原理断言，假定在每个阶段，局中人只与一个中心调解人通信，他们向他透露其所知道的一切，但这个中心调解人反过来只向每个局中人透露其在本阶段决定其当前行动所需要的最少信息，那么这个假定是不失一般性的。正如图6·3所示，调解人不应该在一个特定阶段到达之前告知局中人在这个阶段将向他推荐的行动，这一点是至关重要的。一般来说，向局中人透露更多的信息，会使得防止他们通过撒谎或不服从推荐来寻求受益途径变得更加困难。

即使通信的可能性是无限小的概率发生的，但这种可能性也会显著地影响我们对多阶段博弈和展开型博弈的信念一致性判据。甚至，那些不是子博弈完美的均衡，在允许通信的情况下，也可能成为序贯理性的。举例来说，回顾图4·6中的博弈，对于这个博弈，$([y_1],[y_2],.5[x_3]+.5[y_3],[y_4])$是一个纳什均衡，但它不是一个子博弈完美均衡，因为在从局中人3的结点开始的子博弈中，局中人3在知道局中人4将选择y_4时将更喜欢选取y_3。这个博弈唯一的子博弈完美均衡是，$([x_1],[x_2],.5[x_3]+.5[y_3],.5[x_4]+.5[y_4])$，并给出支付配置$(2,3,0,0)$。

不过，如果我们允许局中人可以用哪怕是无限小的概率进行通信，那么， 298
$([y_1],[y_2],.5[x_3]+.5[y_3],[y_4])$就能被扩展成一个序贯均衡。为了看出是如何扩展的，考虑图6·4，其中ε是一个非常小的正数。图6·4中的博弈区别于图4·6中的博弈之处仅在于其局中人1、2和4或许可以观察到某个以概率ε发生的与支付无关的信号。按照图6·4所示的序贯均衡，如果局中人1、2和4观察到这个信号，则他们将计划选择行动(x_1,x_2,x_4)；否则，他们将计划以概率$(1-\varepsilon)$选择行动(y_1,y_2,y_4)。局中人3只有在至少有

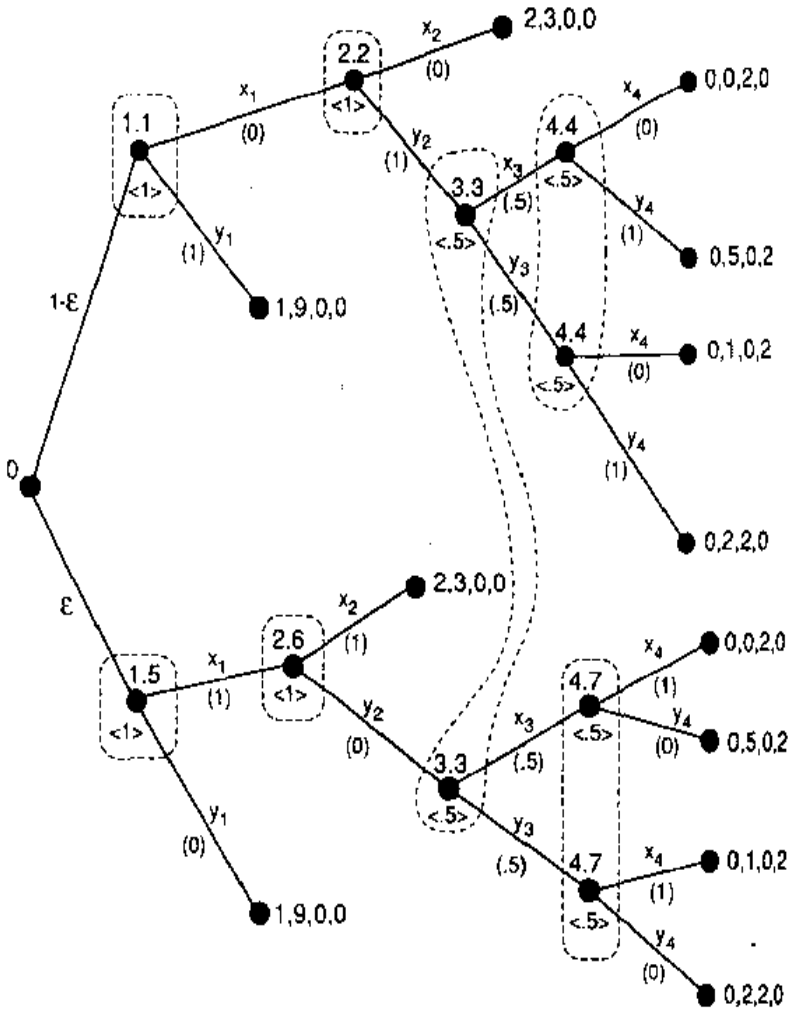

图 6·4

一个局中人犯了错误时才能有机会行动。因而，局中人 3 可以始终如一地相
299 信，如果他有机会行动，那么，要么信号未被观察到而且局中人 1 在 1.1 处错选了 x_1，要么信号被视察到了但局中人 2 在 2.6 处错选了 y_2，且二者概率相等。无论 ε 可能是多么地小，这些信念都可以通过假设局中人 1 比局中人 2 犯错误的可能性小很多而得到验证。根据这些信念，如同均衡中所确定的那样，局中人 3 将愿意在 x_3 与 y_3 之间随机化，因为他相信局中人 4 打算（在 4.7 处）选择 x_4 或（在 4.4 处）选择 y_4 具有同等可能性。这个序贯均衡与位于上面的一个机会事件的均衡（$[y_1]$, $[y_2]$, $.5\,[x_3] + .5\,[y_3]$, $[y_4]$）相一致，而这个均衡在 ε 趋于零时几乎会肯定出现。

我们曾在 4.8 节中观察到，对一个博弈添加小概率机会事件可能会显著地改变其序贯均衡集。然而，值得一提的是，在图 6·4 中新添加的机会事件具有不改变图 4·6 中给出的局中人之选择和支付的结构的特殊性质。这就是说，如果添加的机会事件的唯一影响就是创造了一个原博弈树的第二个复制品，而且有些局中人能够区分它而另一些局中人却不能，则在这个意义上说，所添加的机会事件是**支付无关**的（payoff irrelevant）。（图 4·12 中的机会事件在这种意

义上就不是支付无关的。）对一个博弈“具有通信”之假定意味着这些支付无关的机会事件即使没有被显性地表示出来，也应该可以被考虑为博弈隐性结构的一部分。

因此，通信可能性或许弱化了我们序贯理性的概念。迈尔森（1986b）针对具有通信的多阶段博弈定义了一个序贯理性的概念，并且证明了（就像具有通信的策略型博弈的可接受性一样）这种序贯理性可以通过剔除不合理的行动来表征，而剔除的依据是满足一种广义占优准则。

习　题

6.1　考虑表 6－8 所示的策略型博弈

a. 求出使两个局中人支付的期望和最大的相关均衡。

表 6－8　　**一个策略型博弈**

	C_2	
C_1	a_2	b_2
a_1	4，4	1，6
b_1	6，1	－3，－3

b. 求出使两个局中人支付的期望和最小的相关均衡。

6.2　表 6－9 中的两个博弈具有唯一的纳什均衡［参看莫林和维亚尔（Vial），1978］，其中每个局中人的期望支付是 3。

a. 证明这个博弈具有一个其中两个局中人都得到严格大于 4 的期望支付 300
的相关均衡。

表 6－9　　**一个策略型博弈**

	C_2		
C_1	x_2	y_2	z_2
x_1	0，0	5，4	4，5
y_1	4，5	0，0	5，4
z_1	5，4	4，5	0，0

b. 找出最大化了局中人 1 的期望支付的相关均衡。

6.3 局中人1和2分别是某单件不可分物品的卖主和买主。此物品对局中人1的价值可以是0或80美元，而对局中人2的价值可以是20或100美元。事先，所有4种可能的价值组合被认为有同等可能性。当这两个局中人碰面议价时，每个局中人都知道他自己对此物品的个人评价值，并相信对方对此物品的个人评价值可能是其两个可能评价值之一，概率各为1/2。我们令每个局中人的类型都是其对此物品的个人评价值，所以 $T_1 = \{0.80\}$，$T_2 = \{20, 100\}$。令 $t = (t_1, t_2)$ 表示局中人的类型组合，那么，如果此物品被以 y 美元卖给买主，则两个局中人的支付（从交易中得到的净收益）将是

$$u_1\{(1, y), t\} = y - t_1 \quad 且 \quad u_2\{(1, y), t\} = t_2 - y$$

如果没有成交，则支付将是

$$u_1\{(0, 0), t\} = 0 = u_2\{(0, 0), t\}$$

301 交易失败 $(0, 0)$ 是此讨价还价问题的不一致同意结果。假定不存在延期交易的问题；这个物品要么必须今天卖掉，要么永远也卖不掉。

让我们用一对函数 $Q: T_1 \times T_2 \to [0, 1]$ 和 $Y: T_1 \times T_2 \to \mathbf{R}$ 表示此贝叶斯讨价还价问题的一个机制，其中如果 t 是局中人向调解人报告的类型组合，则 $Q(t)$ 就是此物品将卖给买主的概率，$Y(t)$ 是买主向卖主期望净支付。

a. 写出一个激励相容的个人理性机制所必须满足的4个信息激励约束和4个参与约束。

b. 此物品对买者比对卖者更有价值的概率是3/4。证明：在任何一个激励相容的个人理性机制中，此物品被卖给买者的概率不可能大于2/3。[提示：对于任意的正数 α 和 β，成交的可能性不可能大于

$$\begin{aligned}&(1/4)\{Q(0, 100) + Q(0, 20) + Q(80, 100) + Q(80, 20)\}\\&+\beta U_1(Q, Y|80) + \beta U_2(Q, Y|20)\\&+\alpha\{U_1(Q, Y|0) - U_1^*(Q, Y, 80|0)\}\\&+\alpha\{U_2(Q, Y|100) - U_2^*(Q, Y, 20|100)\}\end{aligned}$$

为了简化这个公式，可试令 $\beta = 2\alpha$ 及 $\alpha = 1/120$。]

6.4 在一个违反合同的诉讼案件中，局中人1是原告，局中人2是被告。如果他们诉诸法院，那么预期法院判决局中人2支付给局中人1的赔偿额依赖于双方辩护的强弱如表6-10所示。此外，如果他们诉诸法院，那么每一方都必须付10 000美元的审判费用。因此，举例来说，如果双方都很强，并且他们诉诸法院，那么，局中人2的预期总费用是90 000美元，每个局中人1的预期净收益只是70 000美元，每个局中人都知道自己是强还是弱，而且每方都相信另一方有同等可能为强或弱。假定两个局中人都是风险中性的。局中人也可以通过私下（法院外）调解而避免交付审判费用。不过，在审判前的讨价还

价中，无从防止一个局中人关于其辩护力量的撒谎，只要他有撒谎的动机。诉诸法院是任何一个审判前讨价还价的不一致同意结果。

302

表 6－10　预期法院判给局中人 1 的赔偿（以美元计）与双方辩护力量强弱的关系

局中人 1 的辩护力量	依赖于局中人 2 的辩护力量的判决	
	强	弱
强	\$ 80 000	\$ 144 000
弱	\$ 16 000	\$ 80 000

a. 设想你已被请来调解这两个局中人之间在审判前的讨价还价，请你提出一个具有下列性质的激励相容调解计划：(1) 如果他们要私下调解，那么给定他们对你关于其辩护实力的报告，局中人 2 将付给局中人 1 等于预期法院对他判决的赔偿额；(2) 如果两人报告给你的全都是弱的类型，那么他们以概率 1 在法院外调解；(3) 如果一方所报告的类型是弱的，而另一方所报告的类型是强的，那么他们将以概率 q 在法院外调解，并且 q 不依赖于是哪一方报告的类型为弱的。在不破坏任何信息激励约束的条件下使 q 尽可能地大。（提示：当你计算期望支付时，不要忘记从诉诸法院所得到的净支付。即使他们不同意法院外调解，局中人 1 也预期能从局中人 2 那里得到赔偿金！）

b. 设想知道己方辩护实力确实很强的局中人 1 从其律师那里得到如下建议："给定我们的辩护实力很强，我们的预期法院判决赔偿金是 $.5\times 80\ 000+.5\times 144\ 000=112\ 000$（美元）。所以，让我们告诉局中人 2 我们的辩护实力很强，并要求她提供这个赔偿额而在法院外调解。"证明：即使局中人 2 相信局中人 1 所声称的其辩护实力，但当局中人 1 的辩护实力确实很强时，他以索要 112 000 美元来调解仍将是一个错误。

6.5　证明：满足一般参与约束（6.14）的所有机制组成的集是一个凸集。

6.6　考虑 6.5 节中模型的如下推广。与前面一样，每个局中人 j 的类型都是与其余所有局中人的类型相互独立的随机变量，并且按照连续的正概率密度函数 f_j 从区间 $T_j=[L(j), M(j)]$ 上抽取的。令 D 表示可能结果集，对于某个局中人 i，假设存在函数 $q_i: D\to\mathbf{R}$ 和 $y_i: D\times T_{-i}\to\mathbf{R}$ 使得局中人 i 的支付函数可以表示成　303

$$u_i(c, t)=q_i(c)t_i-y_i(c, t_{-i}),\ \forall c\in D,\ \forall t=(t_{-i}, t_i)\in T$$

也就是说，i 的支付以系数 $q_i(c)$ 线性于其类型 t_i。

给定任一随机机制 $\mu: T\to\Delta(D)$，令

$$Q_i(t) = \int_{c \in D} q_i(c) d\mu(c \mid t)$$

$$\overline{Q}_i(t_i) = \int_{t_{-i} \in T_{-i}} Q_i(t) \Big(\prod_{j \in N-i} f_j(t_j) \Big) dt_{-i}$$

也就是说，当局中人 i 的类型为 t_i 且所有的局中人都诚实地参与机制 μ 时，$\overline{Q}_i(t_i)$ 是对所选择结果 c 而言的 $q_i(c)$ 的期望值。

证明：如果 μ 是激励相容的，那么 $\overline{Q}_i$ 就是一个非减函数，并且局中人 i 在 μ 下的可能类型的期望支付满足条件（6.10），即

$$U_i(\mu \mid t_i) = U_i(\mu \mid \theta_i) + \int_{\theta_i}^{t_i} \overline{Q}_i(s_i) ds_i, \quad \forall t_i \in T_i, \quad \forall \theta_i \in T_i$$

6.7 回顾在习题3.7（第3章）中所描述的具有独立个人价值的拍卖局势。证明：即使我们改变拍卖规则，对任何一个激励相容的机制 μ，其中拍卖物品总是卖给具有更高类型的投标人，而且类型为0的投标人有着零期望收益，则在给定投标人 i 的类型为 t_i 的情况下，其条件期望支付一定是 $0.5\ (t_i)^2$。

6.8 回顾在习题3.8（第3章）中所描述的具有共同价值和独立类型的拍卖局势。证明：即使我们改变了拍卖规则，使得对于任一激励相容的机制 μ，其中物品总是卖给具有更高类型的投标人，并且类型为0的投标人有着零期望收益，则在给定投标人 i 的类型 t_i 的条件下，其条件期望支付一定是 $0.5\ (t_i)^2$。（提示：你可以利用习题6.6的结果。）

304

6.9 （福格斯所举一例，1985。）考虑一个发送－接收博弈，其中 $C_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$，$T_1 = \{1.a, 1.b\}$，$p(1.a) = .5 = p(1.b)$，效用支付对局中人1的类型和局中人2的行动的依赖关系如表6－11所示。

a. 证明：只要局中人被限制在完全可靠的无噪音通信信道，则在这个博弈的任一均衡中，局中人1与局中人2之间不会有实质性的通信发生，因而局中人1的类型1.a的期望效用支付一定是0。

b. 现在假设一个调解人可以引入某种随机性或噪音到这个通信信道。写出刻划一个激励相容的调解计划 μ 的所有约束，并证明存在一个激励相容的调解计划，其中局中人1的类型1.a得到的期望支付是 $U_1(\mu|1.a) = 5$。

表6－11　　一个发送－接收博弈的支付表

局中人1的类型	C_2		
	x_2	y_2	z_2
1.a	6, 6	0, 4	9, 0
1.b	6, 0	9, 4	0, 6

6.10　局中人1是某单件不可分物品的卖主，而局中人2是唯一潜在的买主。依据该物品的质量，其对局中人1的价值可以是 L 与 M（其中 $L<M$）之间的任一数。局中人1知道该物品的质量，故我们可以把他的类型 t_1 等同于该物品对他的价值。局中人2并不知道该物品的质量，但是，如果它对局中人1的价值为 t_1，那它对局中人2的实际价值就为 $g(t_1)$。因此，若局中人2买这个物品则令 $q=1$，若局中人1保留了这个物品则令 $q=0$，并且设 y 表示由局中人2付给局中人1的净支付额，我们于是可以写出局中人的支付函数为 $u_1((q, y), t_1)=y-t_1q$，$u_2((q, y), t_1)=g(t_1)\ q-y$。不一致同意的结果是没有成交 $(0, 0)$。局中人2没有私人信息且对局中人1的类型确定了一个主观概率分布，这个概率分布在区间 $[L, M]$ 上具有连续的正概率密度函数 f_1。对于 $[L, M]$ 中的任一数 r，令 $F_1(r)=\int_L^r f_1(s)ds$ 表示对应于 $f_1(\cdot)$ 的累积概率分布。

a. 考虑一个机制 (Q, Y)，其中在局中人1的类型为 t_1 时，局中人2买这个物品的概率是 $Q(t_1)$，并且由局中人2付给局中人1的期望支付是 $Y(t_1)$。证明：如果 (Q, Y) 是激励相容而又个人理性的，那么 $Q(t_1)$ 就是 t_1 的一个非减函数，并且 305

$$Y(t_1)\geqslant t_1Q(t_1)+\int_{t_1}^{M}Q(s)ds,\quad \forall t_1\in[L,M]$$

所以局中人2的期望支付一定满足

$$U_2(Q,Y)\leqslant\int_L^M(g(t_1)-t_1-F_1(t_1)/f_1(t_1))Q(t_1)f_1(t_1)dt_1$$

（提示：须注意在这个模型中的 q 和 $Q(t_1)$ 对应于6.5节中的记号应该是 $-q_1$ 和 $-\bar{Q}_1(t_1)$。也可参见迈尔森，1985b。）

b.［阿克洛夫（Akerlof）的**旧货市场问题**（lemon problem），1970］现在假设可能的卖主类型分布是区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布，并且该物品对买主的价值总是比对卖主的价值高出50%，故

$$L=0,\ M=1,\ f_1(t_1)=1,\quad 及\quad g(t_1)=1.5t_1,\ \forall t_1\in[0,1]$$

证明：对于每个正的 t_1，一个激励相容的个人理性机制都必须有 $Q(t_1)=0$。（因此，尽管该物品对买主总是比对卖主更有所值，但发生交易的概率却必然为0。）

c. 假设卖主的可能类型之分布是区间 $[L, M]$ 上的均匀分布，并且该物品对买主的价值是其对买主的价值的线性函数，故存在参数 A 和 B 使得

$$f_1(t_1)=1/(M-L)\quad 和\quad g(t_1)=At_1+B,\ \forall t_1\in[L,M]$$

假定局中人2（买主）能规定任意一个一口咬定的要约价格 R。如果局中人1对该物品的评价值小于 R，则他将接受要约并以这个价格出售，但如果局中人

1 对该物品的评价值高于 R，那他又将拒绝这个要约并持有该物品。作为参数 L，M，A 及 B 的一个函数，买者的最优要约价格是什么？（可以证明，我们可以假定 R 属于区间 $[L, M]$ 而又不失一般性。）

证明：不存在另外一个激励相容的个人理性机制能向局中人 2 提供一个高于她从其最优一口咬定的要约价格所能得到的期望支付。[回顾 $Q(t_1)$ 一定是 t_1 的一个非减函数，同时要注意到 $F_1(t_1)/f_1(t_1) = t_1 - L$ 对 $[L, M]$ 中的任一 t_1 都成立。]

306 对于（b）部分中的特殊情形，其中 $L=0$，$M=1$，$A=1.5$ 及 $B=0$，你应该得到最优的一口价 $R=0$。参考 3.11 节中所讨论过的赢者诅咒，解释一下为什么对买主来说，没有更高的要约价格将会更好。

6.11 考虑如图 6·5 所示的展开型博弈。

a. 找出两个纯策略均衡，证明其中只有一个是序贯均衡的局方案［参见塞尔滕，1975；宾莫尔（Binmore，1987～1988）］。

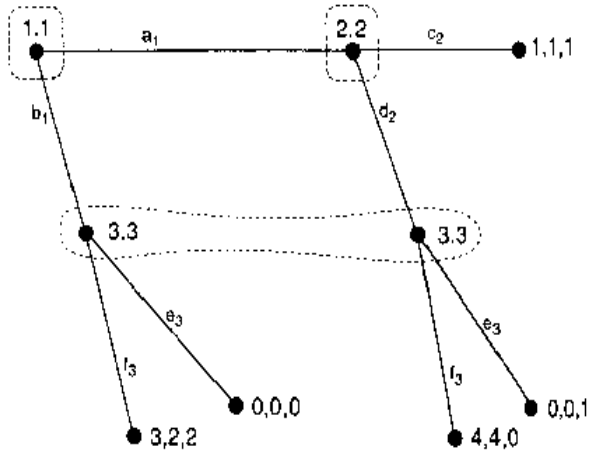

图 6·5

b. 令 ε 是一个任意小的正数。假设存在一个支付无关事件，它在这个博弈进行之前具有发生概率 ε，并且如果它发生了，则局中人 1 和 3 可以观察到，但局中人 2 却不能观察到。给出对这个事件加以考虑的展开型博弈的图示，并且证明这个修改后的博弈具有一个序贯均衡，其中如果 ε－概率事件不发生，局中人则按照由（a）得到的均衡行动，这个均衡不是原博弈的一个序贯均衡局方案。

文献注释

307 **激励相容性**一词首先为赫维茨（Hurwicz，1972）所用。在本书中，这个

术语是在多少有点不同的意义上使用的，达斯普雷蒙和杰勒德-瓦雷特（d'Aspremont and Gerard－Vret，1979）称之为**贝叶斯激励相容性**（Bayesian incentive compatibility）。

吉伯德（Gibbard，1973）第一次对非贝叶斯占优策略解概念表述了显示原理。对于不完全信息博弈之贝叶斯均衡的显示原理，达斯古普塔、哈蒙德和马斯金（Dasgupta，Hammond，and Maskin，1979）；哈里斯和汤森（Harris and Townsend，1981）；霍姆斯特龙（Holmstrom，1977）；迈尔森（1979）；及罗森泰尔（1978）加以发展。对具有道德风险的贝叶斯博弈和多阶段博弈，迈尔森（1982，1986b）提出了其显示原理的其他一些一般公式。

7

重复博弈

7.1 重复囚徒困境博弈

对待那些与其将有长期关系的人与对待那些以后不再交往的人，人们在行 308
为上可能会非常不同。理性而又智能的行为可能会受到长期关系这一结构的影响，为了理解这一点，我们要研究重复博弈。

在一个重复博弈中，存在着**回合**（rounds）或时点的一个无限序列，局中人在每个回合可以获取信息和选择行动。这就是说，与第2章所讨论的有限博弈树不同，一个重复博弈具有**无限时间水平**（infinite time horizon）。在一个重复博弈中，由于没有哪一个行动一定是最后一次行动，所以一个局中人必须总是要考虑到其目前的行动对其余局中人将来的行动和信息所可能产生的影响。这种考虑可能会让局中人在重复博弈中比在一个局中人知道他们的关系何时结束的有限博弈中更加合作或更加好战。

为了介绍对重复博弈的研究，让我们从一个众所周知的例子——重复囚徒困境博弈（表7-1）开始，其中 g_i 是 i 的慷慨行动，f_i 是 i 的自私行动。正如第3章所指出的那样，(f_1, f_2) 是这个囚徒困境博弈唯一的均衡。现在让我们考虑一下，如果局中人1和2预期在很长的时期内每天都重复地进行这一博弈，那会发生什么情况。

表7-1　　囚徒困境博弈

	D_2	
D_1	g_2	f_2
g_1	5, 5	0, 6
f_1	6, 0	1, 1

例如，假定此博弈将被重复的次数是一个随机变量，且对于局中人而言，直到博弈停止之前都是未知的，而这个随机停止时间服从期望值为100的几何分布，即此博弈连续进行的回合次数恰好是 k 的概率为 $(.99^{k-1}) \times .01$。因 309
此，在此博弈的每个回合之后，局中人1与2相遇并再次博弈的概率是.99；

而且在他们仍然进行博弈的任何时间，再进行此博弈的回合次数的期望值仍是100。在这个重复博弈中，慷慨行为是能在均衡中得以维持的。例如，考虑如下策略：每天都使用 g_i，直到某个局中人使用了 f_1 或 f_2 之后再一直使用 f_i。如果两个局中人都计划使用这个策略，那只要没有人偏离而去选择 f_i，则在此博弈的任一时间，每个局中人所得到未来总支付的期望值将是

$$\sum_{k=1}^{\infty}(.99^{k-1})(.01)(5k) = 500$$

但是，如果某个局中人 i 在特定的某一天偏离这个策略而选择了 f_i，那么，从这一天起往后，他的未来总支付的期望值将是

$$6 + \sum_{k=2}^{\infty}(.99^{k-1})(.01)(1(k-1)) = 105^{*}$$

另一方面，如果有人曾经选择了 f_1 或 f_2，则容易看出，当对方被预期遵循这一策略并因而此后总是选择自私行动时，没有一个局中人可以通过选择 g_i 而得到增益。于是，在任一时点，根据过去行动的任何历史，没有一个局中人可以通过任何单方面偏离这个策略而预期有所收获。

达到这个慷慨均衡的关键之处在于，每当局中人相遇时，他们都相信他们再次博弈的概率非常大；故对方诱导将来慷慨行为的希望会激励每个局中人都慷慨。如果局中人事先就知道博弈将何时结束的话，那我们就不可能构造出这样的一个均衡。例如，如果博弈将恰好进行 100 回合已成为共同知识，则所得
310 的 100 个回合的博弈将具有唯一的一个序贯均衡，即两个局中人在每个回合都总是使用 (f_1, f_2)。在最后一个（第 100）回合，因为对方的一个慷慨行动不可能诱导出任何将来的慷慨（因为不再有将来），所以，任何一个局中人都没有慷慨的理由。于是，无论先前的历史怎么样，局中人在第 100 回合应该选择 (f_1, f_2)。因而，在第 99 回合，由于局中人都肯定知道他们的行动对第 100 回合的行动没有影响，所以他们在第 99 回合将同样会使用 (f_1, f_2)。如此一直倒推，由归纳法容易验证，此博弈唯一的序贯均衡局方案确实是在每个回合都使用 f_1 和 f_2。

如此一来，具有潜在无限时间水平的一个重复博弈中的理性行为，与回合数很大但却有限的相应博弈中的理性行为可能大不相同。所以，对重复博弈的研究就要求我们运用超出有限展开型范围的模型。

---

*原文误为 $6+\sum_{k=1}^{\infty}(.99^{k-1})(.01)(1k) = 105$——译者注。

7.2　重复博弈的一个一般模型

在博弈论的文献中，已对各式各样的重复博弈模型做过研究。下述模型[被默顿斯、索林（Sorin）及赞米尔所应用（1989）]提供了一个一般的概念结构，它可以把大多数的重复博弈模型作为其特殊情形而包含在内。令 N 为一个非空的局中人集，又令 Θ 为一个非空集，表示可能的**自然状态**（states of nature）所组成的集。对于 N 中的每个局中人 i，用非空集 D_i 和 S_i 分别表示局中人在博弈的每个回合所能选择的**行动**（moves）集和所能收到的**信号**（signals）集。我们使用记号

$$D=\underset{i\in N}{\times} D_i, \qquad S=\underset{i\in N}{\times} S_i$$

给定了这些集，我们还必须规定 $\Delta(S\times\Theta)$ 中的一个**初始分布**（initial distribution）q、一个**转移函数**（transition function）$p: D\times\Theta\to\Delta(S\times\Theta)$ 以及对于每个局中人 i 的一个**支付函数**（payoff function）$u_i: D\times\Theta\to\mathbf{R}$。这些结构的合成

$$\Gamma^{\infty}=(N,\ \Theta,\ (D_i,\ S_i,\ u_i)_{i\in N},\ q,\ p)$$

就完成了对一个一般重复博弈的描述。

对这样一个一般重复博弈可做如下解释。这个博弈是以标号为 1，2，3，……的一个无限回合序列进行的。在每个回合，Θ 中的某个状态是[**目前的**（current）]自然状态。每个局中人 i 关于自然状态的新信息是用其在回合开始 311
时所收到 S_i 中的一个信号来概括的。作为其在当前回合和所有先前回合所收到信号的一个函数，每个局中人 i 都必须在 D_i 中选择一个行动。θ^1 为第一回合的自然状态且每个局中人 i 在第一回合开始时收到信号 s_i^1 的概率是 $q(s^1, \theta^1)$。（这里，我们使用记号 $s^k=(s_i^k)_{i\in N}$。）在任一回合 k，若目前的自然状态是 θ^k，且局中人的行动组合是 D 中的 $d^k=(d_i^k)_{i\in N}$，则 $u_i(d^k, \theta^k)$ 是局中人 i 在回合 k 中所得到的支付，而 $p(s^{k+1}, \theta^{k+1}\mid d^k, \theta^k)$ 是第 $k+1$ 回合的信号与自然状态将为 (s^{k+1}, θ^{k+1}) 的条件概率。注意，这个概率是与第 1 至 $k-1$ 回合的状态与行动及第 1 至 k 回合的信号都是无关的。

当且仅当存在某个正数 Ω 使得

$$|u_i(d,\theta)|\leqslant\Omega, \qquad \forall i\in N,\ \forall d\in D,\ \forall\theta\in\Theta$$

时，我们才称重复博弈 Γ^{∞} 中的支付是**有界的**（bounded）。当且仅当 ·

$$\sum_{s\in S} p(s,\theta \mid d,\theta) = 1, \quad \forall d \in D$$

时，我们才说 Θ 中的状态 θ 是**吸收的**（absorbing）。因此，若一个吸收的状态 θ 是第 k 回合当前的自然状态，则 θ 将是 k 之后所有回合的自然状态。

为了把上一节中的无限重复囚徒困境博弈用一般重复博弈的形式加以描述，令 $N=\{1, 2\}$，$\Theta=\{0, 1\}$，$D_i=\{f_i, g_i\}$ 及 $S_i=\Theta\cup(D_1\times D_2)$。然后，对于 N 中每个 i 和 D 中的 d，令 $u_i(d, 1)$ 如表 7—1 所示，令 $u_i(d, 0)=0$，且令

$$q(1, 1, 1)=1$$

$$p(d, d, 1\mid d, 1)=0.99, \quad p(0, 0, 0\mid d, 1)=0.01$$

及 $$p(0, 0, 0\mid d, 0)=1$$

这里，状态 1 表示现行的博弈正在继续，而状态 0 表示现行的博弈已经停止，方程 $q(1, 1, 1)=1$ 意味着在第 1 回合，以概率 1，局中人 1 和 2 每人都将收到信号“1”，且自然状态将是 1。在每个后来的回合 $k+1$，若自然状态是 1，则每个局中人都将收到告诉其前一回合所选择的行动组合信号。状态 0 是吸收的。

在一个一般重复博弈中，我们假设每个局中人在每个回合 k 都能记起其
312 在第 1 至第 k 回合所获得的信号。为了保证他能记起他自己过去的行动，只需要在每个回合令他的信号中有一个分量等于他自己在前一回合中所使用的行动即可。因此，一般重复博弈 Γ^r 中局中人 i 的所有纯策略所组成的集 C_i 是

$$C_i=\{c_i=(c_i^k)_{k=1}^{\infty} \mid c_i^k:(S_i)^k\to D_i, \ \forall k\}$$

[这里 $(S_i)^k$ 表示集 S_i 的 k 重笛卡尔积。] 类似地，局中人 i 的**行为策略**（behavioral strategies）集 B_i 是

$$B_i=\{\sigma_i=(\sigma_i^k)_{k=1}^{\infty} \mid \sigma_i^k:(S_i)^k\to\Delta(D_i), \ \forall k\}$$

也就是说，对于任一 k 和 $(S_i)^k$ 中任一信号历史 $(s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^k)$，一个行为策略 σ_i 必须确定 $\Delta(D_i)$ 中的一个概率分布 $\sigma_i^k(\cdot\mid s_i^1, \ldots, s_i^k)$，它描述了在局中人 i 观察到这个信号序列下，i 将如何随机地决定其在回合 k 的行动。我们令 $C=\times_{i\in N} C_i$ 和 $B=\times_{i\in N} B_i$。

给定 B 中任一行为策略组合 $\sigma=(\sigma_i)_{i\in N}$，令 $P^k(d, \theta\mid\sigma)$ 表示这样的概率，即若每个局中人 i 遮所有回合都使用卿行为策略 σ_i，则在回合 k，θ^k 将是当前的自然状汰，且局中人所选择的行动组合将是 d 的概率为 $P^k(d, \theta\mid\sigma)$。为使这个定义形式上更为明确，我们可以用下列方程归纳地定义 $Q^1(\cdot\mid\sigma)$，$Q^2(\cdot\mid\sigma)$，…和 $P^1(\cdot\mid\sigma)$，$P^2(\cdot\ \sigma)$，…：

$$Q^1(s^1, \theta^1\mid\sigma)=q(s^1, \theta^1)$$

$$Q^{k+1}(s^1,\cdots,s^{k+1},\theta^{k+1}\mid\sigma)=\sum_{s^k\in\Theta}\sum_{d\in D}Q^k(s^1,\cdots,s^k,\theta^k\mid\sigma)$$

$$\left(\prod_{i\in N}\sigma_i^k\ (d_i\mid s_i^1,\ \cdots,\ s_i^k)\right)\ p\ (s^{k+1},\ \theta^{k+1}\mid d,\ \theta^k)$$

$$P^k(d,\theta^k\mid\sigma)=\sum_{(s^1,\cdots,s^k)}Q^k(s^1,\cdots,s^k,\theta^k\mid\sigma)\prod_{i\in N}\sigma_i^k(d_i\mid s_i^1,\cdots,s_i^k)$$

[因而，如果每个局中人 i 都使用行为策略 σ_i，那么在回合 k，$(s^1,\ \cdots,\ s^k)$ 将是各个局中人所收到的信号组合历史且 θ^k 将是当前自然状态的概率为 $Q^k(s^1,\ \cdots,\ s^k,\ \theta^k\mid\sigma)$。]

在对有限展开型博弈的分析中，我们曾假设每个局中人的目标都是使其在博弈结束时所得到的期望效用支付值最大。对于重复博弈来说，由于允许无限时间水平，我们必须放弃所有支付都是在博弈结束时得到的这一假定，而代之以假设局中人在博弈的每个回合都得到支付。这就是说，重复博弈中对一个局中人的支付结果是一个无限支付序列。为了描述局中人的目标，我们必须规定某个准则以便对这种支付序列进行排序。

在上面描述的例子中，存在一个吸收的状态，而此时对局中人的支付总是0，并且直至达到这个吸收状态的期望回合数也总是有限的。对于此类例子，我们可以利用**支付和准则**（sum-of-payoffs-criterion）决定局中人的目标。也就是说，我们可以定义每个局中人的目标是使其在博弈的所有回合所得到的期望 313
支付并最大。根据这个支付和准则，我们可以定义一个均衡为这样一个行为策略组合 σ，使得对于 N 中每个局中人 i 和 B_i 中的每个行为策略 $\hat{\sigma}_i$，均有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{d\in D}\sum_{\theta\in\Theta}P^k(d,\theta\mid\sigma)u_i(d,\theta)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{d\in D}\sum_{\theta\in\Theta}P^k(d,\theta\mid\sigma_{-i},\hat{\sigma}_i)u_i(d,\theta)$$

不幸的是，如果不存在零支付的且期望到达的时间又有限的吸收状态，则期望支付和可能对所有的行为策略组合都是无穷大，那样就无法应用这个支付和准则。

对于任一满足 $0\leqslant\delta<1$ 的数 δ，支付序列 $(w_i(1),\ w_i(2),\ w_i\ (3),\ \cdots)$ 的 **δ-贴现平均**（δ-discounted average）是

$$(1-\delta)\sum_{k=1}^{\infty}(\delta)^{k-1}w_i(k)$$

[在本章中，上标既用作指标又用作指数。在可能产生混淆之处，当上标表示指数时，我们把底放在括号内。因而，举例来说，$(\delta)^3=\delta\times\delta\times\delta$。] 值得指出的是，若 $w_i(k)$ 是与 k 无关的一个常数，则由于

$$(1-\delta)\sum_{k=1}^{\infty}(\delta)^{k-1}=1$$

所以这个δ-贴现平均等于同一常数。在这个表达式中，数δ被称为**贴现因子**(discount factor)。对于任何一个一般重复博弈，如果支付是有界的，那么，每个局中人之支付序列的δ-贴现平均是一个有限数，并且其绝对值被界定支付的同一个数所界定。因此，我们可以更一般地应用δ-贴现平均准则，并且假
314 设每个局中人的目标是使其支付序列的期望δ-贴现平均最大［关于δ-贴现平均准则及推广的公理化推导参见爱泼斯坦（Epstein，1983）］。根据δ-贴现平均准则，一个行为策略σ是一个均衡，其充要条件是对于每个局中人i和每个行为策略$\hat{\sigma}_i$，均有

$$(1-\delta)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{d\in D}\sum_{\theta\in\Theta}P^k(d,\theta\mid\sigma)(\delta)^{k-1}u_i(d,\theta)$$

$$\geqslant(1-\delta)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{d\in D}\sum_{\theta\in\Theta}P^k(d,\theta\mid\sigma_{-i},\hat{\sigma}_i)(\delta)^{k-1}u_i(d,\theta)$$

给定一个支付序列$\{w_i(k)\}_{k=1}^{\infty}$和一个贴现因子δ，令$\bar{w}_i(2,\delta)$表示从第2回合开始的此支付（子）序列的δ-贴现平均，即

$$\bar{w}_i(2,\delta)=(1-\delta)\sum_{k=1}^{\infty}(\delta)^{k-1}w_i(k+1)$$

那么下面这个有用的递归方程（recursive equation）成立：

$$(1-\delta)\sum_{k=1}^{\infty}(\delta)^{k-1}w_i(k)=(1-\delta)w_i(1)+\delta\bar{w}_i(2,\delta)\qquad(7.1)$$

即，从回合1开始的支付序列的δ-贴现平均是权重为$(1-\delta)$的回合1之支付与权重为δ的从回合2开始的支付序列之δ-贴现平均的加权平均。

在前述具有几何分布停止时间（到达零支付吸收状态的时间）的例子中，当δ=.99时，局中人在回合k为非零支付而仍将进行博弈的概率是$(\delta)^{k-1}$。因此，这个例子实质上等价于一个没有停时（即没有吸收状态"0"）的具.99-贴现平均准则的一个无限重复囚徒困境博弈。

一般而言，贴现因子δ表示了对局中人耐心或远见的一种度量。若δ接近于0，则δ-贴现平均准则把主要权重加于局中人在重复博弈的前几个回合所得到的支付上，因而更适用于局中人没有耐心或主要关心当前的和不久的将来的支付这一类重复博弈。而当δ接近于1时，δ-贴现平均中任何两个回合所给出支付的权重比都收敛于1，即对任意的k和l，都有

315 $$\lim_{\delta\to1}\frac{(1-\delta)(\delta)^{k-1}}{(1-\delta)(\delta)^{l-1}}=1$$

因此，若δ接近于1，则δ-贴现平均准则近似于一个耐心准则，其中的局中人对他们在任一特定将来回合所得到的支付的关心并不明显少于他们对当前回合所得到支付的关心。

对支付序列进行排序的另一个准则是**平均支付极限**（limit of average payoffs）。根据这个准则，局中人 i 的一个支付序列 $w=(w_i(1), w_i(2), \cdots)$ 就 i 来说优先于另一支付序列 $\hat{w}=(\hat{w}_i(1), \hat{w}_i(2), \cdots)$，当且仅当

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{M} w_i(k)}{M} \geqslant \lim_{M\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{M} \hat{w}_i(k)}{M}$$

关于这个准则的一个困难是，这些极限可能不存在，甚至在支付有界的情况下亦是如此。当这种极限不存在时，一种选择方案是弱化此准则，而把 $(w_i(1), w_i(2), \cdots)$ 排序优先于 $(\hat{w}_i(1), \hat{w}_i(2), \cdots)$，当且仅当

$$\operatorname{liminf}_{M\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{M} w_i(k)}{M} \geqslant \operatorname{limsup}_{M\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{M} \hat{w}_i(k)}{M}$$

[一个序列的**下极限**（liminf 或 limit-infimum）是该序列所有收敛子序列之极限中的最小数，而**上极限**（limsup 或 limit-supremum）是所有收敛子序列之极限中的最大数。] 另一种选择方案是用**超过准则**（overtaking criterion），按照这个准则，一个支付序列 $(w_i(1), w_i(2), \cdots)$ 排序优先于另一个支付序列 $(\hat{w}_i(1), \hat{w}_i(2), \cdots)$ 当且仅当

$$\operatorname{liminf}_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} (w_i(k) - \hat{w}_i(k)) > 0$$

不过，在这些准则中的每一个准则之下，都可能有某些序列是不可比较的。此外，上极限与下极限都是非线性运算，它们与期望值运算是不可交换的。避免这些困难的一个技术方法是利用巴拿赫极限来对重复博弈中的支付序列进行评价。本节的最后四段对这个高深的专题给予简略的介绍，但本书以后的内容并不用到它。

令 l_∞ 表示有界的实数序列集。一个**巴拿赫极限**（Banach limit）被定义为 316
一个线性算子 $L: l_\infty \to \mathbf{R}$ 使得，对于 l_∞ 中任意两个序列 $w=(w(1), w(2), \cdots)$ 和 $x=(x(1), x(2), \cdots)$，均有

$$L(\alpha w+\beta x)=\alpha L(w)+\beta L(x), \quad \forall \alpha\in\mathbf{R}, \ \forall \beta\in\mathbf{R}$$

$$\operatorname{limsup}_{k\to\infty} w(k) \geqslant L(w) \geqslant \operatorname{liminf}_{k\to\infty} w(k)$$

若　$w(k+1)=x(k), \ \forall k\in\{1, 2, 3, \cdots\}$，则　$L(w)=L(x)$

巴拿赫极限的存在性可以用**哈恩－巴拿赫定理**（Hahn－Banach theorem 参见罗伊登，1968，p.186—192）加以证明，但这个证明不是构造性的。再则，存在很多个巴拿赫极限，这就可能导致支付序列的不同排序。

利用源于非标准分析的思想［例如，参见赫德和洛布（Hurd and Loeb,

1985)]，我们可以指出如何直接从平均支付极限准则定义一类巴拿赫极限。集 I 上的一个**滤子**（filter）被定义为 I 的任一非空子集族 $\mathcal{F}$ 满足下列条件：

若 $A_1\in\mathcal{F}$ 和 $A_2\in\mathcal{F}$，则 $A_1\cap A_2\in\mathcal{F}$，
若 $A_1\in\mathcal{F}$ 和 $A_1\subseteq A_2\subseteq I$，则 $A_2\in\mathcal{F}$，
及 $\varnothing\notin\mathcal{F}$。

I 上的一个**超滤子**（ultrafilter）是 I 上任何一个滤子 $\mathcal{F}$ 使得对于 I 的任一子集 A，若 $A\notin\mathcal{F}$，则 $I\setminus A\in\mathcal{F}$。这就是说，在 I 的任何一对互补的子集中，必有一个子集属于超滤子。如果 I 是一个无限集，那 I 上的一个超滤子 $\mathcal{F}$ 是**自由的**（free），当且仅当它不包含 I 的有限子集。

现在，令 I 是正整数集。I 上自由超滤子的存在性是可以用选择公理予以保证的，因为定义一个自由超滤子需要无限多次选择。任何一个有限集一定被排斥在一个自由超滤子之外，而任何一个含有 I 中除有限个之外的所有正整数的集一定被包含在一个自由超滤子内。但对于 I 的任何一对都含有无限多个正整数的互补子集，比如偶数集和奇数集，我们必须在这两个中取一个属于我们的自由超滤子。

给定正整数集上的任一自由**超滤子** $\mathcal{F}$，我们可以定义一个巴拿赫极限 $L_{\mathcal{F}}(\cdot)$，使得对于 l_∞ 中任一 w，$L_{\mathcal{F}}(w)=z$ 的充分必要条件是，对于每个正数 ε，都有

$$\{M\mid z-\varepsilon\leqslant\sum_{k=1}^{M}w(k)/M\leqslant z+\varepsilon\}\in\mathcal{F}$$

317 可以证明，一旦取定了一个自由超滤子，则这个极限 $L_{\mathcal{F}}(w)$ 对每个有界序列 w 是唯一确定的，且算子 $L_{\mathcal{F}}:l_\infty\to\mathbf{R}$ 满足巴拿赫极限的所有条件。因此，滤子极限这一概念使我们能将无限重复博弈中一个局中人所得到的总支付定义为其在此博弈的有限重复变型中所得到的平均支付的极限；而且在做出这个定义时，我们不必担心极限的存在性。事实上，一个自由超滤子对任一不收敛的有界序列确定了一个选择其收敛子序列的规则。

7.3 具有完全状态信息和贴现的重复博弈之平稳均衡

一个一般重复博弈具有**完全状态信息**（complete state information），当且仅当在每个回合，每个局中人都知道目前的自然状态。也就是说，对于 N 中的每个局中人 i 和 S 中的每个信号 s_i，存在 Θ 中的某个状态 $\omega(s_i)$，使得对于 Θ 中任意 θ 和 $\hat{\theta}$、D 中每个 d 及 $\times_{j\in N-i}S_j$ 中的每个 s_{-i}，均有

若　$\hat{\theta}\neq\omega(s_i)$，　则　$p(s,\hat{\theta}|d,\theta)=0$；

故除非目前的状态是 $\omega(s_i)$，否则信号 s_i 就决不可能发生［这里 $s=(s_{-i},s_i)$］。

在一个具有完全状态信息的重复博弈中，一个行为策略是**平稳的**（stationary）当且仅当行动概率只依赖于当前的状态。也就是说，行为策略 σ_i 是平稳的当且仅当存在某个 $\tau_i:\Theta\to\Delta(D_i)$，使得对于每个 k 和 $(S_i)^k$ 中的每个信号历史 $(s_i^1,\cdots,s_i^k)$，都有

$$\sigma_i^k(\cdot|s_i^1,\cdots,s_i^k)=\tau_i(\cdot|\omega(s_i^k))$$

由于当上述方程成立时，τ_i 完全刻划了 σ_i，所以我们也可以称任何这样的函数 $\tau_i:\Theta\to\Delta(D_i)$ 为局中人 i 的一个**平稳策略**（stationary strategy）。这里 $\tau_i(d_i|\theta)$ 表示在每个回合，当 θ 是自然状态时，局中人 i 将选择行动 d_i 的概率。我们说，一个平稳策略组合 $\tau=(\tau_i)_{i\in N}$ 是一个均衡，当且仅当相应的行为策略组合（如上所述的 $(\sigma_i)_{i\in N}$）构成一个均衡。对于任一平稳策略组合 τ，我们还能写成

$$\tau_i(\theta)=(\tau_i(d_i|\theta))_{d_i\in D}\quad\text{和}\quad\tau(\theta)=(\tau_j(\theta))_{j\in N}\in\underset{j\in N}{\times}\Delta(D_j)$$

给定一个平稳策略组合 τ 如上，如果局中人计划总是使用这些平稳策略，且在回合 1，初始的自然状态是 θ，则令 $v_i(\theta)$ 表示局中人 i 在重复博弈中所得到的期望 δ－贴现平均支付。记 $v_i=(v_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$。假设除了只在回合 1，局中人 i 计划选择行动 d_i 之外，每个局中人在每个回合都计划执行平稳策略 τ，又假设当前的自然状态是 θ，那局中人 i 所得到的期望 δ－贴现平均支付是 318

$$Y_i(\tau,d_i,v_i,\theta,\delta)=\sum_{d_{-i}\in D_{-i}}\Big(\prod_{j\in N-i}\tau_j(d_j|\theta)\Big)\Big((1-\delta)u_i(d,\theta)+\delta\sum_{\zeta\in\Theta}\sum_{s\in S}p(s,\zeta|d,\theta)v_i(\zeta)\Big)$$

［这里 $D_{-i}=\times_{j\in N\ i}D_j$，$d_{-i}=(d_j)^*{}_{j\in N-i}$ 及 $d=(d_{-i},d_i)$。］这个公式是从基本的递归方程（7.1）导出的。当所有局中人都使用平稳策略时，给定 ζ 是回合 2 的自然状态，则从回合 2 开始的支付序列的条件期望 δ－贴现平均，与 ζ 为在回合 1 给定的自然状态时从回合 1 开始的支付序列的条件期望 δ－贴现平均是一样的。在每个回合都使用 τ 时，期望 δ－贴现平均支付必须满足

$$v_i(\theta)=\sum_{d_i\in D_i}\tau_i(d_i|\theta)Y_i(\tau,d_i,v_i,\theta,\delta),\ \forall\theta\in\Theta\qquad(7.2)$$

当 $0\leqslant\delta<1$ 时，给定 τ，则方程组（7.2）对 v_i 总是至多只有一个有界解。［为了证明唯一性，假设相反，v_i 和 $\tilde{v}_i$ 是方程组（7.2）的两个不同解。由于概率

* 原文误为 $d_i=(d_j)_{j\in N-i}$——译者注。

分布 $p(\cdot|d,\theta)$ 及 $\tau_i(\cdot|\theta)$ 的各自分量之和必等于 1，所以 (7.2) 和 Y_i 的定义蕴涵着

$$\begin{aligned}0 &< \max_{\theta\in\Theta}|\nu_i(\theta)-\hat{\nu}_i(\theta)| \\ &\leqslant \max_{\theta\in\Theta}\max_{d_i\in D_i}|Y_i(\tau,d_i,\nu_i,\theta,\delta)-Y_i(\tau,d_i,\hat{\nu}_i,\theta,\delta)| \\ &\leqslant \delta\max_{\zeta\in\Theta}|\nu_i(\zeta)-\hat{\nu}_i(\zeta)| < \max_{\zeta\in\Theta}|\nu_i(\zeta)-\hat{\nu}_i(\zeta)|\end{aligned}$$

319 但这是不可能的。] 因此，对重复博弈中任一平稳策略组合 τ 而言，局中人 i 从每个状态开始的期望 δ-贴现平均支付总是可以通过求解方程组 (7.2) 找到。

一个平稳策略组合 τ 要成为具有完全状态信息的重复博弈的一个均衡，应该是没有一个局中人可以预期在此博弈所能发生的某个状态通过某个回合使用另外一个行动而做得更好。这个要求意味着

$$\nu_i(\theta)=\max_{d_i\in D_i}Y_i(\tau,d_i,\nu_i,\theta,\delta),\quad \forall\theta\in\Theta \tag{7.3}$$

对于每个局中人 i，要使 (7.3) 式成为均衡的一个必要条件，我们就应该在局中人使用策略 τ 时，把 θ 的范围限制在所有可能以正概率发生的状态所组成的集内。然而，作为一个在所有状态下都是序贯理性的均衡，正如上面所述，条件 (7.3) 关于 Θ 上变动的 θ 都是必要的。

作为动态规划 [例如，参见布莱克韦尔 (Blackwell, 1965)；霍华德 (Howard, 1960)] 基本结论的一个应用，可以证明，如果没有一个局中人能够预期只在某个回合偏离平稳策略组合 τ 而得到增益的话，那就没有一个局中人会从这个策略组合改变到任何一个更复杂的策略。亦即，我们有下述定理。

定理7.1 *给定一个具有完全状态信息和有界支付的重复博弈，并给定一个平稳策略组合 τ，如果存在一个有界向量 $\nu=\{\nu_i\in(\theta)\}_{\theta\in\Theta,i\in N}$ 使得条件 (7.2) 和 (7.3) 对于每个局中人 i 都是满足的，则 τ 是此重复博弈在 δ-贴现平均支付准则下的均衡。在这个均衡中，当初始自然状态为 θ 时，$\nu_i(\theta)$ 是此重复博弈中局中人 i 所得到的期望 δ-贴现平均支付。*

证明 用反证法，假设 τ 和 ν 对每个局中人 i 都满足条件 (7.2) 和 (7.3)，但 τ 不是一个均衡。那么，对于某个局中人 i，存在某个正数 ε 和某个策略 σ_i (未必是平稳的) 使得，若 i 的策略从 τ_i 改变为 σ_i 而所有其他局中人都遵循 τ 中的策略，则局中人 i 的期望 δ-贴现平均支付将有大于 ε 的增加。对于任一 K，令 $\hat{\sigma}_i^K$ 表示这样的一个策略，其在回合 K 之前的所有回合都与 σ_i 相同，而在回合 K 及 K 之后的所有回合都与平稳策略 τ_i 相同。

320 现在，在预期其余局中人都遵循 τ 时，比较局中人 i 的策略 $\hat{\sigma}_i^K$ 与 $\hat{\sigma}_i^{K+1}$。对这两个策略而言，局中人 i 在回合 K 之前的所有回合所得到的期望支付是一样的；此外，i 的行为在回合 $K+1$ 及其后的所有回合也都与 τ_i 相同，因

此，若回合 $K+1$ 的自然状态是 ζ，则 $v_i(\zeta)$ 将是局中人 i 从回合 $K+1$ 开始的支付序列的期望 δ－贴现平均。于是，若回合 K 的状态是 θ，且局中人 i 选择行动 d_i，则 i 从回合 K 开始的支付序列的期望 δ－贴现平均将是 $Y_i(\tau, d_i, \nu_i, \theta, \delta)$，如同前面所定义的那样。但是，条件（7.2）和（7.3）意味着

$$\tau_i(d_i|\theta) > 0 \quad \text{仅当} \quad d_i \in \underset{e_i \in D_i}{\operatorname{argmax}} Y_i(\tau, e_i, \nu_i, \theta, \delta)$$

这就是说，在 $\hat{\sigma}_i^K$ 与 $\hat{\sigma}_i^{K+1}$ 不同的那个回合，$\hat{\sigma}_i^K$ 总是为局中人 i 选择一个最优的行动。因而对于任一正数 K，就局中人 i 对付 τ_{-i} 来说，$\hat{\sigma}_i^K$ 一定至少与 $\hat{\sigma}_i^{K+1}$ 一样好。于是，根据归纳法，对于局中人 i 对付 τ_{-i} 而言，没有策略 $\hat{\sigma}_i^K$ 能够好于 $\hat{\sigma}_i^1$，而 $\hat{\sigma}_i^1$ 是与 τ_i 相同的。

现在选取 K 使得 $\Omega(\delta)^{K-1} < \varepsilon/2$，其中 Ω 是支付的界。由于策略 $\hat{\sigma}_i^K$ 与 σ_i 在回合 K 之前没有差异，所以局中人 i 在使用 $\hat{\sigma}_i^K$（从回合 1 开始）所得到的支付序列的期望 δ－贴现平均，与其在使用 σ_i 所得到的支付序列的期望 δ－贴现平均之间的差不大于 $\varepsilon/2$。根据我们对 ε 的选取，这个事实意味着，对于 i 对付 τ_{-i} 来说，$\hat{\sigma}_i^K$ 比 τ_i 要好。这一矛盾证明了定理的正确性。 ■

为了充分利用定理 7.1，我们应该认识到，很多初看不是平稳的策略在考虑具有更大状态空间的等价模型下可以成为平稳的。举例来说，回顾 7.1 节重复囚徒困境博弈中的策略，其中局中人 i 使用 g_i 直到某个局中人在某个回合会使用 f_i 为止，其后 i 就使用 f_i。只要存在表示“现行的博弈继续”的唯一一个状态，则这个策略就不是平稳的，正如 7.2 节提出的模型中所表述的那样。不过，我们可以考虑一个等价的模型，其 $\boldsymbol{\Theta}$ 中包含两个状态 1a 和 1b，其中 1a 表示“现行的博弈继续，且没有一个局中人曾经选择了 f_1 或 f_2”，而 1b 表示“现行的博弈继续，但某个局中人在过去的某个时间选择了 f_1 或 f_2”。在这个模型中，1a 是初始状态，每当行动组合不是 (g_1, g_2) 时便发生了从 1a 到 1b 321
的转移，但从 1b 到 1a 的转移是决不可能发生的，并且在两个状态 1a 和 1b 下，支付是相同的。在这个模型中，上面所描述的策略是平稳的，且有

$$\tau_i(g_i|1a) = 1, \quad \tau_i(f_i|1b) = 1$$

就这个增大了状态的模型而言，若 δ 不是太小，则可用定理 7.1 证明两个局中人都应用这个策略是一个均衡。当两个局中人都执行这个策略时，条件（7.2）和（7.3）对每个局中人 i 都成为

$$\begin{aligned}
\nu_i(1a) &= (1-\delta)5 + \delta\{.99\nu_i(1a) + .01\nu_i(0)\} \\
&\geqslant (1-\delta)6 + \delta\{.99\nu_i(1b) + .01\nu_i(0)\} \\
\nu_i(1b) &= (1-\delta)1 + \delta\{.99\nu_i(1b) + .01\nu_i(0)\} \\
&\geqslant (1-\delta)0 + \delta\{.99\nu_i(1b) + .01\nu_i(0)\}
\end{aligned}$$

$$v_i(0)=(1-\delta)0+\delta v_i(0)$$

举例而言，第一个不等式表明，在状态 1a，在这个回合慷慨（得到支付 5）并因此以概率 .99 在下一回合保持状态 1a（除非向状态 0 的转移发生，其概率 .01），就不比在这个回合自私（得到支付 6）并因此下一回合以 .99 的概率转移到状态 1b 差。这 3 个方程的唯一解是

$$\begin{aligned} v_i(1a) &= \frac{5(1-\delta)}{1-.99\delta} \\ v_i(1b) &= \frac{1-\delta}{1-.99\delta} \\ v_i(0) &= 0 \end{aligned}$$

并且若 $\delta \geqslant 20/99$，则两个不等式也成立。

一般地，假定“自然状态”的定义已被充分地加工完善，使得在一个给定的行为策略组合中，所有局中人的策略都是平稳的。如果在任何一个状态，没有一个局中人可以预期通过只在一个回合偏离其策略而得到增益，那这个行为策略组合就是一个均衡（即没有一个局中人会预期通过在多个不同回合计划偏离其策略而得到增益）。

作为一个有趣的例子，考虑布莱克韦尔和弗格森（Ferguson，1968）所提
322 出的下述博弈，称之为**争大比赛**（Big Match）。令 $N=\{1,2\}$，$\Theta=\{0,1,2\}$，$D_1=\{x_1,y_1\}$，$D_2=\{x_2,y_2\}$，$S_1=S_2=(D_1\times D_2)\cup\Theta$。在这个博弈中，初始状态是状态 1，且每个局中人的初始信号都确认这个状态，故 $q(1,1,1)=1$。只要这个博弈处于状态 1，支付 $\{u_1(d,1),u_2(d,1)\}$ 就如表 7—2 所示。自然状态停留在状态 1 直到局中人 1 选择了 y_1；而在局中人 1 首次选择 y_1 的那个回合，若局中人 2 选择 x_2，则状态 1 变为状态 0，或者若局中人 2 选择 y_2，则状态 1 变为状态 2。状态 0 和 2 都是吸收的，并且在这两个状态下，支付总是与处于状态 1 的最后一个回合的支付相同，故有

表 7-2　当 y_1 尚未被选择过时，争大比赛在任一回合对所有行动组合的支付

D_1	D_2	
	x_2	y_2
x_1	2，-2	0，0
y_1	0，0	2，-2

$$u_1(d,0)=0,\quad u_2(d,0)=0,\quad u_1(d,2)=2,\quad u_2(d,2)=-2,\forall d\in D$$

只要博弈停留在状态 1，局中人就能观察到彼此的过去行动，故

$$p(d,d,1|d,1)=1 \quad \text{若} \quad d_1=x_1$$

而

$$p(0,\ 0,\ 0|\ (y_1,\ x_2),\ 1)=1,\quad p(2,\ 2,\ 2|\ (y_1,\ y_2),\ 1)=1,$$

及

$$p(0,\ 0,\ 0|d,\ 0)=1,\quad p(2,\ 2,\ 2|d,\ 2)=1,\ \forall d\in D$$

这个博弈的趣味性来自这样一个事实，即在局中人 1 首次选择 y_1 的那个回合，局中人 2 要避免被陷于 y_2；但是，如果局中人 2 用总是选择 x_2 来避免这个陷阱的话，那局中人 1 通过总是选择 x_1 就能同样严重地打击她。为了找出争大比赛在 δ-贴现平均支付准则下的一个平稳均衡，令 $\alpha=\tau_1(x_1|1)$，$\beta=\tau_2(x_2|1)$。显而易见，不存在纯策略均衡，故我们可以假设 $0<\alpha<1$ 和 $0<\beta<1$。现在，令 $z=v_1(1)$ 表示此博弈对局中人 1 的 δ-贴现平均支付。由于此博弈是一个零和博弈，所以它对局中人 2 的 δ-贴现平均支付一定是 $-z$。若局中人 1 在回合 1 选择 y_1，则他要么以概率 β 永远得到 0，要么以概率 $1-\beta$ 永远 323
得到 2，若局中人 1 在回合 1 选择 x_1，则他得到当前的期望支付为 $2\beta+0\ (1-\beta)$，且随后在回合 2，此博弈继续处于状态 1，故方程 (7.2) 和 (7.3) 意味着

$$z=0\beta+2(1-\beta)=(1-\delta)\ 2\beta+\delta z$$

因此 $\beta=1/2$ 和 $z=1$。类似地，为使局中人 2 乐意于在 x_2 与 y_2 之间随机化，我们必须有

$$\begin{aligned}-z&=\alpha\ \{\ (1-\delta)\ (-2)\ +\delta\ (-z)\}+(1-\alpha)\ (0)\\&\quad-\alpha\ \{\ (1-\delta)\ (0)\ +\delta\ (-z)\}+(1-\alpha)\ (-2)\end{aligned}$$

故 $\alpha=1/\ (2-\delta)$。值得注意的是，随着 δ 趋近于 1，局中人 1 趋向于在均衡策略中总是使用 x_1；但这样的策略不可能成为一个均衡，因为局中人 2 将通过总是选择 y_2 对此做出反应。

布莱克韦尔和弗格森 (1968) 在平均支付极限准则下研究了争大比赛，并证明出，在这个两人零和博弈中，局中人 1 的最小化最大值是 +1，而局中人 2 的最小化最大值（或安全水平）是 -1，正如在贴现平均支付准则下的情况一样。当自然状态是 1 时，局中人 2 能够通过在每个回合于 x_2[①] 和 y_2 之间各以概率 1/2 随机加以选择，以保证局中人 1 不能预期得到大于 +1 的支付。不过，在平均支付极限下，由于局中人 1 没有罪小化最大策略来对付局中人 2，所以不存在均衡。布莱克韦尔和弗格森证明了，对于任一正整数 M，局中人 1 能够使用下述策略保证自己得到的期望平均支付极限不小于 $M/\ (M+1)$（从而局中人 2 的平均支付极限不大于 $-M/\ (M+1)$）：在每个回合，以概率 $1/(1+M+x^*-y^*)^2$ 选择 y_1，其中 x^* 是局中人 2 过去选择过 x_2 的次数，而

① 原文误为 x_1——译者注。

y^* 是 2 过去选择过 y_2 的次数。

7.4 具有标准信息的重复博弈：一些例子

一个**具有标准信息的重复博弈**（repeated game with standard information），或者一个**标准重复博弈**［standard repeated game，有时也被称为**超博弈**（supergame）］，就是一个其中只有一个可能的自然状态且局中人知道彼此过去行动的重复博弈。这就是说，在一个标准重复博弈中，$|\Theta|=1$，对每个 i 均有 $S_i=\times_{j\in N}D_j$，以及

324 $$p(d,\cdots,d,\theta|d,\theta)=1,\quad \forall d\in D$$

在具有标准信息的重复博弈所表示的局势中，一群人无限多次面临着完全相同的竞争局势，且对彼此过去的行为总是具有完全的信息。于是，标准信息结构使局中人相互间的反应能力达到最大。

标准重复博弈的平稳均衡恰好就是相应单回合博弈均衡在每个回合的重复。由于局中人相互反应的能力及相互对偏离预想均衡路径的惩罚能力，所以一般来说，标准重复博弈的非平稳均衡集更大一些。事实上，在一些弱假设之下，几乎任何一个至少给每个局中人以其最小化最大值的可行支付配置，都能在标准重复博弈的某个均衡中得以实现。对这一结论的一般陈述将在下一节给出并加以证明；在本节中，我们通过对两个例子的详尽讨论来揭示这一重要结论背后的基本直觉。

为了说明对标准重复博弈的分析，考虑**斗鸡**（chicken）的重复博弈，其对局中人 1 和 2 的支付示于表 7－3 中。每个局中人 i 在每一回合都有两个行动可供选择："谨慎"行动 a_i 和"大胆"行动 b_i。每个局中人在另一局中人选择谨慎时更喜欢选择大胆，但两个人都选择大胆对双方来说都是最差的结果。最好的对称结果是两个人都谨慎的时候。

表 7－3　在重复斗鸡博弈中，任一回合对所有行动组合的支付

	D_2	
D_1	a_2	b_2
a_1	4，4	1，6
b_1	6，1	－3，－3

如果局中人只玩一次此博弈，那这个博弈就有 3 个纳什均衡：一个给出支付（6，1），一个给出支付（1，6），再一个则是给出期望支付（3，3）的随机均

衡。当允许有通信时，这个博弈存在一个相关均衡，其中 (a_1, a_2) 的概率等于 .5，且期望支付配置是 (3.75, 3.75)；但在单回合博弈的一个相关均衡中不可能达到更高的对称期望支付。特别地，由于如果局中人 i 预期另一个局中 325
人为谨慎（即选择 a_i），则他将喜欢为大胆，所以 (a_1, a_2) 不是这个单回合博弈的一个均衡。

现在，假定这个博弈重复进行无限多回合，具有标准信息，并且每个局中人都应用 δ－贴现平均支付准则，其中 δ 是 0 与 1 之间的某个数。在这个重复博弈中，一个局中人的策略是一个规则，将他在每个回合的行动决定为以前每个回合所用行动的历史的一个函数。例如，像本例这样的重复博弈（或重复囚徒困境博弈）的一个著名策略即所谓**针锋相对**（tit-for-tat）。在这个策略下，一个局中人在第一回合选择谨慎行动，而此后则选择与其对手在前一个回合所选择的行动相同的行动。

如果两个局中人都遵循针锋相对策略，那么每个回合的实际结果将是 (a_1, a_2)，给每个局中人的贴现平均支付为 4。针锋相对不应与策略“总是选择 a_i”混淆。在后一策略下，不论过去发生了什么，局中人在每个回合都选择 a_i。为了看出其究竟，首先假设局中人 1 遵循“每个回合都使用 a_1”的策略，那么局中人 2 的最佳反应是一直使用 b_2 而得到贴现平均支付 6。另一方面，如果局中人 1 遵循针锋相对策略，且贴现因子接近于 1，那么由于局中人 2 因局中人 1 在下个回合的报复行为所损失的要大于她在这一回合选择 b_2 所得的多，故局中人 2 决不会选择 b_2。因此，一个策略中规定如何惩罚对手的非预期行为的成分可能是至关重要的，即使这种惩罚在均衡中不会被实施。

让我们检验说明，必须是多大的 δ 才能让针锋相对的策略制止对手的大胆行为。假定局中人 1 执行针锋相对策略，但局中人 2 思考是否在第一回合大胆而后再回到谨慎。如果她这样做了，则她得到的支付在第 1 回合是 6，第 2 回合是 1，以后的每个回合是 4，因而她的 δ－贴现平均支付是

$$(1-\delta)(6+1\delta+\sum_{k=3}^{\infty}4\delta^{k-1})=6-5\delta+3\delta^2$$

另一方面，如果她总是使用谨慎行动来对付局中人 1 的针锋相对策略，则她得到的贴现平均支付是 4。于是，为阻止局中人 2 的大胆行为，我们需要

$$4\geqslant(1-\delta)(6+1\delta+\sum_{k=3}^{\infty}4\delta^{k-1}), \qquad 326$$

或 $\delta\geqslant 2/3$。事实上，若 $\delta\geqslant 2/3$，则只要预期另一个局中人总是使用针锋相对，就没有一个局中人能够通过成为第一个偏离这个针锋相对策略而得到增益；因此针锋相对就是一个均衡。

尽管两个局中人都使用针锋相对策略是一个均衡，但这个均衡并不是一个子博弈完美均衡。作为一个子博弈完美均衡，局中人必须始终选择序贯理性的

行动，即使在所给定策略下具有零概率的行动在历史上发生了，也理应如此。试考虑，如果局中人2在第1回合偶然地选择了b_2，局中人1将会面临怎样的局势。在两个人此后都遵循针锋相对策略这一假定之下，每个偶数回合的结果将是(b_1, a_2)，而每个奇数回合的结果将是(a_1, b_2)；并且对局中人1的贴现平均支付是

$$(1-\delta)(1+6\delta+1\delta^2+6\delta^3+\cdots) = (1+6\delta)/(1+\delta)$$

另一方面，如果局中人1在回合2选择a_1而偏离了针锋相对，且其后两个局中人都遵循针锋相对，那么在回合1之后，每个回合的结果都将是(a_1, a_2)；因而，对局中人1的贴现平均支付是

$$(1-\delta)(1+4\delta+4\delta^2+4\delta^3+\cdots) = 1+3\delta$$

借助于一些简单的代数运算，可以证明

$$\text{当 } \delta>2/3 \text{ 时，} 1+3\delta>(1+6\delta)/(1+\delta)$$

再则，对于任一δ，由于支付1与6之间轮流选择要比总是得到-3好一些，所以在两个局中人选择了(b_1, b_2)之后，任何一个局中人都能从单方面偏离针锋相对策略而得到增益。因此，如果预期一个局中人此后也执行针锋相对策略，则另一个局中人执行针锋相对中的惩罚行动将是非理性的。即两人都实施针锋相对策略的局方案不是一个子博弈完美均衡。

不过，存在一个修改针锋相对策略的方法可以克服这个困难。考虑局中人i的下述策略：在每个回合，除非对方过去选择b_{-i}的次数严格大于i选择b_i的次数，此时i会选择b_i之外，否则i将总是选择a_i。我们称这个策略为**扯平**（getting-even）策略。可以证明，只要δ大于2/3，两个局中人都使用扯平策略是一个子博
327 弈完美均衡。例如，如果局中人2在第1回合偏离了这一策略而选择了b_2，但预计她此后会应用这一策略，那局中人1在第2回合予以报复而选择b_1就是理性的。局中人1认为，在扯平策略之下，局中人2会把他的报复b_1看作一个正当的反应；故局中人2应该不会在第3回合回以反报复b_2。条件$\delta\geqslant 2/3$只是为了保证在两人过去大胆行动的次数相等时，没有一个局中人会去选择b_i。

由于针锋相对与扯平策略只是在犯了一个错误之后才有所不同，所以二者之间的差别很微小。令$r_i(k)$表示局中人i在回合k之前选择b_i的次数。如果局中人1正确地应用扯平策略，那么，不论局中人2使用什么策略，在任一回合k，$r_2(k)-r_1(k)$将总是等于0或1，且等于1的充分必要条件是局中人2在上一回合选择了b_2时。因此，根据扯平策略，当且仅当局中人2在上一回合选择了b_2*时，局中人1才会选择b_1。这两个策略之间的差别只有在局中人1自己偶然偏离了其策略但随后又回过来实施那个策略的情况下，才变

* 原文误为b_1——译者注。

得明显。

如果 $\delta<2/3$，则针锋相对策略与扯平策略都不能作为此博弈的一个均衡得以持续。然而，只要 $\delta\geqslant.4$，此博弈仍有其他能在每个回合都以概率 1 实现结果 (a_1, a_2) 的子博弈完美均衡。

在假设两个局中人都在均衡中选择 a_i 时，局中人 1 能够阻止局中人 2 选择 b_2 的唯一条件是，他具有某种报复或惩罚的置信威胁，一旦实施这一威胁，局中人 2 将来要付出比当前回合收益从 4 增加到 6 更大的代价（以贴现平均计）。不过，由于随着贴现因子越来越小，以后支付的损失较之于当前支付的增益也就越来越无关紧要，所以就越来越难以阻止局中人 2 向 b_2 的偏离。针对最低可能的贴现因子，为设计一个阻止这种偏离的策略，我们需要找出对局中人 2 来说代价最大的置信威胁。

在最坏的情况下，局中人 2 总可以通过在每一回合都选择 a_2 来保证自己在每一回合都能得到支付 +1。因此，局中人 2 在为偏离而受到惩罚时所得到的贴现平均支付不可能低于 1。如果在局中人 2 第一次选择 b_2 之后，局中人 1 永远选择 b_1 而局中人 2 永远选择 a_2，这样的一种支付将确实可以实现。而且，局中人 1 永远选择 b_1 和局中人 2 永远选择 a_2 也是理性的，只要每个局中 328
人都预期对方会这样做。因此，对局中人 2 最差的置信惩罚将是局中人 1 永远选择 b_1 而局中人 2 永远选择 a_2 作为反应。

考虑局中人 i 的下述**冷酷策略**（grim strategy）：如果有任一过去的回合，其中一个局中人大胆而另一个局中人谨慎［即结果为 (b_1, a_2) 或 (a_1, b_2)］，则在第一个其中 i 是谨慎局中人的这种回合，那 i 在当前合回及以后都选择 b_i；否则 i 就选择 a_i。也就是说，在冷酷策略之下，i 一直合作（即“谨慎”）到对手背叛去选择大胆，在这种情况下，i 通过永远大胆去惩罚对手。只要 $\delta\geqslant.4$，两个局中人都遵循冷酷策略是一个子博弈完美均衡。

这种无穷的不宽恕的惩罚看起来相当极端。所以，我们或许有兴趣去寻找其他的策略，像针锋相对策略那样，能在贴现因子小于 2/3 时，在子博弈完美均衡中，只有一个回合的惩罚，而以后又能永远维持在 (a_1, a_2)。确实存在一种这样的策略，我们称之为**相互惩罚**（mutual punishment）。对于局中人 i，这个策略可被描述如下：如果是在第一回合，或上一回合的行动是 (a_1, a_2) 或 (b_1, b_2)，则 i 选择 a_i；如果上一回合的行动是 (b_1, a_2) 或 (a_1, b_2)，则 i 选择 b_i。如果两个局中人都被认为在遵循这一策略，但一个局中人在某个特定的回合偏离了这个策略，则在下一回合，局中人应该选择 (b_1, b_2)，而这对他们双方都是最差的可能结果（“相互惩罚”由此得名）。如果局中人 2 在正确地遵循这一策略，而局中人 1 偏离去选择了 b_1，那局中人 2 将在下一回合选择 b_2 作为报复，并将如此持续到局中人 1 再次选择 b_1。其思想是，局中人 2 惩罚局中人 1 的偏离直至局中人 1 也参与对自己的惩罚之中，或在鞭

子之下要露出胸膛。

为了检验两个局中人都遵循相互惩罚策略是否是一个子博弈完美均衡，我们必须考虑两种可能的偏离：在策略需要 a_i 时选择了 b_i 和在策略需要 b_i 时选择了 a_i。如果策略需要 a_i 但局中人 i 在某个回合偏离了，而另一个局中人遵循相互惩罚策略，则 i 所得到的支付在这个回合是 $+6$，下一个回合是 -3；若他不偏离，则两个回合都得到支付 $+4$。由于下一个回合的支付要被一个附加因子 δ 贴现，所以若 $4+4\delta \geqslant 6+(-3)\delta$，即 $\delta \geqslant 2/7$，则这种偏离会被制止。另一方面，如果策略需要 b_i 但局中人 i 在某个回合偏离了，而另一个局中人遵
329 循相互惩罚策略，则 i 所得到的支付在这个回合是 $+1$，下个回合是 -3；若他不偏离，则他在这个回合所得到的支付是 -3，下个回合是 $+4$。因此，若 $-3+4\delta \geqslant 1+(-3)\delta$，即 $\delta \geqslant 4/7$，则这个偏离会被制止。这样一来，只要贴现因子至少是 $4/7$，两个局中人都遵循相互惩罚策略就是一个子博弈完美均衡。

到目前为止，我们只讨论了这样的均衡，其实际结果总是在每个回合都是合作的 (a_1, a_2)，除非有某个人犯了错误而偏离了这个均衡。然而，这个重复博弈存在许多其他的均衡。原来一个回合博弈的任何一个均衡（在重复时）都可能成为重复博弈的一个均衡。例如，存在一个局中人 1 总是选择 b_1 而局中人 2 总是选择 a_2 的均衡。这是一个对局中人 1 来说最好但对局中人 2 来说最坏的一个均衡。

这个重复博弈还有一些福利性质很差的均衡，并且对两个局中人来说都接近于最坏的情形。而且，其中的某些均衡又具有自然的或逻辑的吸引力，使得它们在某些情形下会成为人们实际实施的焦点均衡。为了看出导致这些坏均衡的逻辑，注意到扯平均衡与冷酷均衡两者都具有这样的性质：以前越胆大的局中人以后应该越胆小。有些人或许认为相反的原理更合乎逻辑：过去越胆大的局中人应该被认为是将来更胆大的局中人。

因而，考虑一个我们称之为 **q－阵地**（q-positional）的策略，对每个局中人 i 来说此策略可定义如下：若 i 已选择 b_i 的次数严格大于另一局中人已选择 b_{-i} 的次数，i 就选择 b_i；若另一局中人已选择 b_{-i} 的次数严格大于 i 曾选择 b_i 的次数，i 就选择 a_i；而如果 b_i 和 b_{-i} 曾被选择的次数相同，i 现在就以概率 q 选择 b_i 并以 $(1-q)$ 的概率选择 a_i。对这个策略的直觉阐释就是，已确立较强的大胆声誉的局中人在将来可能是大胆的，而已有较多谨慎行为模式的局中人应该保持其所创造的谨慎形象。当没有一个局中人有更为大胆的声誉时，则他们可以独立地以某种方式在大胆与谨慎之间随机化。

给定 0 与 1 之间贴现因子 δ 的任意一个值，存在一个 q 使得两个局中人都遵循 q－阵地策略是一个子博弈完美均衡。为了计算这个 q，首先注意到，尽管在这个重复博弈中并不存在内在定义的备择自然状态，但局中人的阵地策略可用隐性状态的术语来定义，这个隐性状态就是在过去的回合中，局中人 1 选

择 J b_1 的次数与局中人 2 选择 b_2 的次数之差。在任一回合，若隐性状态为 330
正，且两个局中人都遵循这个 q - 阵地策略，则从现在起每个回合给出的支付都将是 (6, 1)。类似地，若隐性状态为负，则从现在起，每个回合给出的支付都将是 (1, 6)。当隐性状态在第 1 个回合为 0（当然，正如实际上那样），且两个局中人都应用 q 阵地策略时，令 z 表示每个局中人预期得到的期望 δ - 贴现平均支付（根据对称性，对两个局中人是相同的）。那么，当隐性状态为 0 时，局中人 1 乐意于在 b_1 与 a_1 之间随机化的充分必要条件是

$$\begin{aligned} & q\{(1-\delta)(-3)+\delta z\}+(1-q)\{(1-\delta)(6)+\delta(6)\} \\ & =q\{(1-\delta)(1)+\delta(1)\}+(1-q)\{(1-\delta)(4)+\delta z\} \\ & =z \end{aligned}$$

这些等式表明，在局中人 2 是大胆的概率为 q 时，局中人 1 在第 1 回合不论是大胆的（第一个表达式）还是谨慎的（第二个表达式），他在截断的博弈中所得到的期望 δ - 贴现平均支付都一样的，且事实上等于 z（正如我们定义 z 时所要求的那样）。给定 δ，由这两个方程可以解得 q 和 z，结果如表 7-4 所示。因此，假如局中人有着长期目标，故 δ 接近于 1，那么，阵地均衡给每个局中人的期望 δ - 贴现平均支付，只略好于局中人在最差的均衡中也能保证自己得到的最低支付。实际上，建立一个大胆型声誉的动机把两个局中人推向了接近于双方最差可能均衡的**消耗战**（war of attrition）之中。

表 7-4　在重复斗鸡博弈的阵地均衡中，对于 4 个贴现因子 (δ) 的期望 δ - 贴现平均支付 (z) 和初始的大胆概率 (q)

δ	q	z
.99	.992063	1.0024
.90	.925	1.024
.667	.767	1.273
.40	.582	1.903

这里所讨论的各种均衡，可以被看作是那些能在长期关系中形成的行为类型的例子。当具有长期关系的人们察觉到他们当前的行为将对彼此未来的行为产生影响时，他们可能会根据当前行为与未来行为之间所预期的联系形式，而理性地变得更合作（如在扯平均衡中）或更好战（如在阵地均衡中）。定性地 331
讲，更合作的均衡看起来涉及到彼此之间的互惠联系（例如，“你今日之所为，正是我明日之所行”），而更好战的均衡则涉及到个人行为的外推联系（例如，“我今天这么做，明天我还会这么做”）。

重复博弈的均衡可能对两个局中人来说都差于相应单回合博弈的任何均衡，作为一个简单的例子，考虑表7-5中的博弈。容易看出，单回合博弈唯一

表7-5 在一个重复博弈中，在任一回合对所有行动组合的支付

	D_2	
D_1	a_2	b_2
a_1	8，8	1，2
b_1	2，1	0，0

的均衡是 (a_1, a_2)，并给出支付 (8, 8)。然而，对于重复博弈，考虑如下局方案：如果过去出现 (a_1, a_2) 的总回合数是偶数，则局中人1选择 a_1 而局中人2选择 b_2；若过去出现 (a_1, a_2) 的总回合次数为奇数，则局中人1选择 b_1 而局中人2选择 a_2。在局中人实施这些策略时，决不会出现 (a_1, a_2)；所以 (a_1, b_2) 为每一回合的结果（因为0是偶数）且支付为 (1, 2)。如果 $\delta \geqslant 6/7$，这个局方案还是一个子博弈完美均衡。例如，若局中人2在第1回合通过选择 a_2 而偏离这个局方案，那她的期望贴现平均支付将是

$$(1-\delta)(8+1\delta+1\delta^2+1\delta^3+\cdots)=8-7\delta$$

注意，若 $\delta \geqslant 6/7$，则 $2 \geqslant 8-7\delta$。

7.5 标准重复博弈的一般可行性定理

我们从上一节的例子中所领会到的一般直觉是，在标准重复博弈中，当局中人有充分的耐性时，几乎任何一个至少给每个局中人其最小化最大值（即安全水平）的可行支付配置都可以在此重复博弈的某个均衡中实现。也就是说，
332 就一个标准重复博弈而言，其均衡中可行的支付配置一般可能会与相应具有合同的单回合博弈中的可行支付相一致，如6.1节中所研究的那些博弈。事实上，表达这一直觉的一般可行性定理已在一系列弱技术假设之下得以叙述并证明。在博弈论的文献中，这些可行性定理已被称为**无名氏定理**（folk theorems），这是因为，某些弱可行性定理，在任何严格的陈述发表之前，作为口头习俗的一部分，已被许多博弈理论家所知道或相信。在这里，我们用**一般可行性定理**（general feasibility theorem）这一短语来代替“无名氏定理”，因为一个定理由于其未曾被发表而命名并不能向外行读者传递有用的信息。

罗宾斯坦（1979）在超过准则下对标准重复博弈的子博弈完美均衡证明了

一个一般可行性定理。富登伯格和马斯金（1986）在贴现平均支付准则下对标准重复博弈的子博弈完美均衡证明了一个一般可行性定理。用相关均衡代替纳什均衡，这里我们叙述并证明富登伯格和马斯金结论的一个形式。为了加强这个结论，这里我们假设存在一个调解人或相关装置，该调解人或相关装置在每个回合只是公开宣布所有局中人共同观察到的信息（这就是说，不存在与个别局中人的秘密私人通信）。

这个博弈的一个相关策略是任一 $\mu=(\mu^k)_{k=1}^{\infty}$，使得对于每个 k，μ^k 是从 $(D)^{2k-2}$ 到 $\Delta(D)$ 的一个函数。[这里 $(D)^m$ 表示 D 的 m - 重笛卡尔积，其中 $D=\times_{i\in N}D_i$ 是每个回合可能的行动组合所组成的集。] 对于任一 k 和 $(D)^{2k-1}$ 中的任一 $(d^1, \cdots, d^{k-1}, c^1, \cdots, c^k)$，数 $\mu^k(c^k \mid d^1, \cdots, d^{k-1}, c^1, \cdots, c^{k-1})$ 表示在以前回合所推荐的历史为 $(c^1, \cdots, c^{k-1})$ 和过去行动历史为 $(d^1, \cdots, d^{k-1})$ 的条件下，$c^k=(c_i^k)_{i\in N}$ 为调解人在回合 k 推荐给局中人的行动组合的条件概率。对于每个 k，如果推荐是按照相关策略 μ 生成的，且每个局中人总是服从推荐，则令 $P^k(d^k \mid \mu)$ 是在回合 k 所执行的行动组合为 d^k 的概率。为使其形式上更明确，我们可归纳地定义

$$Q^k(d^1, \cdots, d^k \mid \mu)=$$
$$\mu^k(d^k \mid d^1, \cdots d^{k-1}, d^1, \cdots, d^{k-1})\ Q^{k-1}(d^1, \cdots, d^{k-1} \mid \mu)$$

其中 $Q^1(d^1)=\mu^1(d^1)$，再令 333

$$P^k(d^k \mid \mu)=\sum_{(d^1,\cdots,d^{k-1})\in D^{k-1}} Q^k(d^1,\cdots,d^k \mid \mu)$$

当每个回合所推荐行动都被公开宣布时，局中人 i 的一个**操纵策略**（manipulative strategy）是任一 $e=(e^k)_{k=1}^{\infty}$，其中对每个 k，e^k 都是从 $(D)^{2k-1}$ 到 D_i 的一个函数。这里 $e^k(d^1, \cdots, d^{k-1}, c^1, \cdots, c^k)$ 表示，若 $(d^1, \cdots, d^{k-1})$ 是局中人在回合 k 之前实际所选择的过去行动历史，且 $(c^1, \cdots, c^k)$ 是直到回合 k 的所有回合所推荐的行动历史，则它就是局中人 i 按照策略 e 在回合 k 所选择的行动。如果所推荐的行动是按照 μ 决定的，除 i 之外的每个局中人都服从推荐，但 i 使用了操纵策略 e，则令 $P_i^k(d^k \mid \mu, e)$ 是局中人在回合 k 实际所选择的行动组合为 d^k 的概率。为使其形式上更明确，我们令

$$Q_i^1(d^1, c^1 \mid \mu, e)=\mu(c^1) \qquad 若\ \ d^1=(c^1{}_i, e^1(c^1))$$
$$Q_i^1(d^1, c^1 \mid \mu, e)=0 \qquad 若\ \ d^1\neq(c^1{}_i, e^1(c^1))$$

并对所有 $k>1$，归纳地定义

$$Q_i^k(d^1, \cdots, d^k, c^1, \cdots, c^k \mid \mu, e)=0$$
$$若\ d^k\neq(c^k{}_i, e^k(d^1, \cdots, d^{k-1}, c^1, \cdots, c^k))$$
$$Q_i^k(d^1, \cdots, d^k, c^1, \cdots, c^k \mid \mu, e)=$$

$$\mu^k(c^k \mid d^1,\cdots,d^{k-1},c^1,\cdots,c^{k-1})Q_i^{k-1}(d^1,\cdots,d^{k-1},c^1,\cdots c^{k-1}\mid \mu,e)$$

若 $d^k=(c^k_{-i},e^k(d^1,\cdots,d^{k-1},c^1,\cdots,c^k))$

然后令

$$P_i^k(d^k\mid\mu,e)=\sum_{(d^1,\cdots,d^{k-1},c^1,\cdots,c^k)\in D^{2k-1}} Q_i^k(d^1,\cdots,d^k,c^1,\cdots,c^k\mid\mu,e)$$

为了描述期望 δ－贴现平均支付，令

$$U_i(\mu,\delta)=(1-\delta)\sum_{k=1}^{\infty}(\delta)^{k-1}\sum_{d\in D}P^k(d\mid\mu)u_i(d)$$

$$U_i^*(\mu,e,\delta)=(1-\delta)\sum_{k=1}^{\infty}(\delta)^{k-1}\sum_{d\in D}P_i^k(d\mid\mu,e)u_i(d)$$

334 相关策略 μ 是标准重复博弈在 δ－贴现平均支付准则下的一个**公开相关均衡**（publicly correlated equilibrium）的充要条件是，对于每个局中人 i 和 i 的每个操纵策略 e，均有

$$U_i(\mu,\delta)\geqslant U_i^*(\mu,e,\delta)$$

对于任一 k 和 $(D)^{2k}$ 中的任一 $(d^1,\cdots,d^k,c^1,\cdots,c^k)$，我们定义 $\mu\setminus(d^1,\cdots,d^k,c^1,\cdots,c^k)$ 使得 $\mu\setminus(d^1,\cdots,d^k,c^1,\cdots,c^k)=(\hat{\mu}^m)_{m-1}^{\infty}$，当且仅当对于每个 m 和 D^{2m-1} 中的每个 $(\bar{d}^1,\cdots,\bar{d}^{m-1},\bar{c}^1,\cdots,\bar{c}^m)$，均有

$$\hat{\mu}^m(c^m\mid\bar{d}^1,\cdots,\bar{d}^{m-1},\bar{c}^1,\cdots,\bar{c}^{m-1})$$
$$=\mu^{m+k}(c^m\mid d^1,\cdots,d^k,\bar{d}^1,\cdots,\bar{d}^{m-1},c^1,\cdots,c^k,\bar{c}^1,\cdots,\bar{c}^{m-1})$$

因此，如果一个调解人使用相关策略 μ，那么 $\mu\setminus(d^1,\cdots,d^k,c^1,\cdots,c^k)$ 是其在跟随推荐历史 $(c^1,\cdots,c^k)$ 和实际行动历史 $(d^1,\cdots,d^k)$ 之后的子博弈中将使用的相关策略。一个公开相关均衡是子博弈完美的，当且仅当对于每个 k 和 $(D)^{2k}$ 中的每个 $(d^1,\cdots,d^k,c^1,\cdots,c^k)$，相关策略 $\mu\setminus(d^1,\cdots,d^k,c^1,\cdots,c^k)$ 仍是一个公开相关均衡。

令 $\hat{v}_i$ 是在仅考虑纯策略时局中人 i 在单回合博弈中的最小化最大值，即

$$\hat{v}_i=\min_{d_{-i}\in\times_{i\in N-i}D_i}\ \max_{d_i\in D_i}u_i(d) \tag{7.4}$$

令 F 表示相应的单回合博弈中用相关策略所能达到的期望支付配置集，即 $x=(x_i)_{i\in N}$ 属于 F 的充要条件是 $\Delta(D)$ 中存在某个 η 使得

$$x_i=\sum_{d\in D}\eta(d)u_i(d),\qquad \forall i\in N$$

于是，我们可以叙述富登伯格和马斯金（1986）所提出的下述一般可行性定理。

定理7.2　对于任一具有有界支付的标准重复博弈，设 x 是 F 中任一向量使得集 $F\cap\{z\in\mathbf{R}^N \mid \hat{v}_i\leqslant z_i\leqslant x_i,\ \forall i\in N\}$ 相对于 $\mathbf{R}^N$ 有非空的内部，则存在某个数 $\bar{\delta}$，使得 $0<\bar{\delta}<1$，且对于满足 $\bar{\delta}\leqslant\delta<1$ 的每个 δ，都存在一个相关策略 μ，使得 μ 是该重复博弈在 δ－贴现平均支付准则下的一个子博弈完美的公开相关均衡，并且

$$U_i(\mu,\delta)=x_i,\qquad \forall i\in N$$

证明　由于支付是有界的，所以存在某个数 Ω，使得对于每个 i 和 d，均有 335
$-\Omega<u_i(d)<\Omega$。$F\cap\{z\in\mathbf{R}^N \mid \hat{v}_i\leqslant z_i\leqslant x_i,\ \forall i\in N\}$ 相对于 R^N 有非空内部的假设意味着，存在 F 中的某个 y 和某个正数 ε 使得

$$\hat{v}<y_i-\varepsilon<y_i\leqslant x_i,\ \forall i\in N$$

并且对 N 中每个 j，向量 $(y_{-j},\ y_j-\varepsilon)$ 仍在 F 中。

相关策略 μ 的结构最好用 $2|N|+1$ 个行为模式描述：一个初始模式，以及对每个局中人 i 都有两个模式，一个被我们称之为“对 i 严厉惩罚”模式，另一个被我们称之为“对 i 温和惩罚”模式。在初始模式中，调解人在每个回合推荐的行动，都是按照 $\Delta(D)$ 中的一个概率分布使每个局中人 j 都得到期望支付 x_j 来决定的。当模式是对 i 严厉惩罚时，调解人向除 i 之外的所有局中人推荐其应使用来对付局中人 i 的最小化最大策略，以达到上述 $\hat{v}_i$ 之定义(7.4)式中的最小值，而局中人 i 应使用其最佳反应。当模式是对 i 温和惩罚时，调解人在每个回合推荐的行动是按照 $\Delta(D)$ 中的一个概率分布使局中人 i 得到期望支付 $y-\varepsilon$，而使每个其他局中人 j 都得到期望支付 y_j。

调解人停留在初始模式直至某个回合恰有一个局中人不服从他做出的推荐。在任何一个有且仅有一个局中人不服从调解人推荐的回合之后，调解人打算做出的推荐是，“在紧接着的 K 个回合中的每个回合都对此局中人严厉惩罚，其后的每个回合对此局中人温和惩罚”。这些调解计划只是在一个局中人不服从推荐的某个回合之后才有所改变，在这种情况下，上述的那句话为调解人决定新的调解计划。

在任一回合，如果局中人 i 不服从调解，而其余局中人总是服从，那 i 的 δ 贴现平均未来支付不大于

$$(1-\delta)\{\Omega+(\delta)^1\hat{v}_i+\cdots+(\delta)^K\hat{v}_i+(\delta)^{K+1}(y_i\quad\varepsilon)+(\delta)^{K+2}$$
$$(y_i-\varepsilon)+\cdots\}=(1-\delta)\Omega+\{\delta-(\delta)^{K+1}P\}\hat{v}_i+(\delta)^{K+1}(y_i-\varepsilon)$$

当模式是对 i 严厉惩罚时，由于在当前回合推荐给 i 的行动是其对所有其余局中人使用的最小化最大策略的最佳反应，并且不服从只会推迟其计划的期望支 336
付从 $\hat{v}_i$ 增至 $y_i-\varepsilon$ 的时间，故局中人 i 不可能通过单方面不服从推荐而受益。因为 $x_i\geqslant y_i\geqslant y_i-\varepsilon$，所以局中人 i 在初始模式和对其他某个局中人严厉惩罚的模式中要比在对他自己严厉惩罚的模式中更好。因而，为了验证 μ 是一个子

博弈完美的公开相关均衡，只需证实局中人 i 不会在模式是对 i 温和惩罚或对某个其他局中人严厉惩罚时想要偏离即可。

当模式是对 i 温和惩罚时，如果没有局中人不服从，那么对 i 的未来支付的期望 δ-贴现平均是 $y_i-\varepsilon$。当模式是对其他某个局中人严厉惩罚时，i 未来支付的期望 δ-贴现平均不小于

$$\begin{aligned}&(1-\delta)\{-\Omega-(\delta)^1\Omega-\cdots-(\delta)^{K-1}\Omega+(\delta)^K y_i+(\delta)^{K+1}y_i+\cdots\}\\&=-\Omega\ (1-\ (\delta)^K)\ +\ (\delta)^K y_i\end{aligned}$$

因而，若对每个局中人 i，均有

$$y_i-\varepsilon\geqslant(1-\delta)\Omega+(\delta-\ (\delta)^{K+1})\hat{v}_i+(\delta)^{K+1}\ (y_i-\varepsilon) \tag{7.5}$$

和

$$\begin{aligned}-\Omega(1-\ (\delta)^K)+(\delta)^K y_i\geqslant&(1-\delta)\Omega+(\delta-\ (\delta)^{K+1})\hat{v}_i\\&+\ (\delta)^{K+1}\ (y_i-\varepsilon)\end{aligned} \tag{7.6}$$

则 μ 是一个子博弈完美的相关均衡。当

$$\frac{y_i-\varepsilon-\hat{v}_i}{\Omega-\hat{v}_i}\geqslant\frac{1-\delta}{1-(\delta)^{K+1}}$$

时，不等式 (7.5) 成立。这个不等式的左边是严格为正，而右边在 δ 收敛于 1 时收敛于 $1/(k+1)$。让我们选取 K，使得

$$\frac{y_i-\varepsilon-\hat{v}_i}{\Omega-\hat{v}_i}>\frac{1}{K+1}$$

那么，存在某个 δ，使得只要 $\delta\leqslant\delta<1$，(7.5) 式就满足。又注意到，固定 K 而令 δ 收敛于 1，(7.6) 式的左边收敛于 y_i，而右边收敛于 $y_i-\varepsilon$。因而一定存在某个 $\bar{\delta}$，使得只要 $\bar{\delta}\leqslant\delta<1$，(7.6) 和 (7.5) 式就同时满足。 ■

337 值得注意的是，由于惩罚行为对惩罚者带来的损害可能大于对被惩罚者带来的损害，所以在局中人 i 迫使某个其他局中人 j 降到其最小化最大值的那个回合，i 可能自己会得到小于最小化最大值的支付。于是，在一个局中人偏离之后，对他的惩罚可能是不可靠的，除非给予惩罚者某种激励去实施惩罚。在证明过程中所描述的均衡里，对施惩者在严励惩罚中的努力表现的奖励就是不会成为随后温和惩罚的对象。$F\cap\{z\in\mathbf{R}^N\mid\hat{v}_i\leqslant z_i\leqslant x_i,\ \forall i\in N\}$ 相对于 $\mathbf{R}^N$ 有非空内部的假设意味着，不同的局中人的支付之间有着足够的独立性，因此可以在对一个局中人进行温和惩罚时，不致于把另外的某个局中人推向其受温和惩罚时的支付水平。

方程 (7.4) 所定义的纯策略最小化最大值 $\hat{v}_i$ 一般要大于 6.1 节 (方程 6.1) 所定义的随机策略最小化最大值 v_i。利用调解人可以秘密地把推荐传送

给不同的局中人（因而在每个回合，没有一个局中人知道调解人目前向其他局中人推荐的行动）这一假设，我们就能够证明定理7.2的一个翻版，其中用 v_i 代替 $\bar{v}_i$ 并删掉“公开”一词。证明过程中唯一的变化是，在对局中人 i 严厉惩罚的模式中，调解人向 i 之外的局中人所推荐的行动是他们按照实现方程（6.1）中最小值的相关策略那样随机地选择行动。但是，这个向 i 之外的局中人所推荐的行动对局中人 i 本人是隐蔽的。

7.6　有限重复博弈和初始怀疑的作用

正如7.1节中所注意到的那样，有限重复囚徒困境博弈与其无限重复变形之间有引人注目的反差。如果囚徒困境博弈只重复有限多次，且重复次数的有限上界在博弈开始时对局中人来讲是共同知识，那唯一的均衡就是两个局中人总是选择自私；他们的平均支付配置因而一定是（1，1）。但是，如果时间水平无限且局中人的贴现因子接近于1，那么任何一个能给每个局中人多于其最小化最大值1的可行支付配置，都可以在一个子博弈完美均衡中得以实现。

不过，无限重复博弈与长期有限重复博弈之间的显著差异，对于囚徒困境 338
博弈实际上是相当特殊的。贝努瓦和克里施纳（Benoit and Krishna，1985）证明了，如果一个策略型博弈具有多重均衡（当它不是重复博弈时），并给每个局中人两个或两个以上的不同支付，那么，任何一个满足定理7.2的条件的支付配置向量 x，都能与在该博弈的充分多次但有限重复变形的子博弈完美均衡中，作为其平均支付配置而实现的向量任意接近。

例如，考虑表7-6中所示的博弈，不重复时，这个博弈有3个均衡，分别给出支付配置（1，6），（6，1）和（3，3）。每个局中人的最小化最大值是0。为了在一个有限重复博弈中接近帕累托有效配置（4，4），考虑下述均衡。只要两人都用这个策略，每个局中人 i 就使用 a_i 直至最后两个回合。若两个局中人在最后两个回合之前总是使用 (a_1, a_2)，则他们在最后两个回合采用每个回合都给出期望支付（3，3）的随机均衡。另一方面，如果某个局中人在最后两个回合之前的某个回合就偏离了 (a_1, a_2)，那局中人此后就采用每一回合都给先偏离者支付为1的均衡。（如果双方在同一回合同时偏离，那就让我们视同局中人1先偏离。）在支付和准则下，对于任一正整数 K，两个局中人在 K 回合有限重复博弈中都按照这个局方案行动是一个子博弈完美均衡。而且，此均衡给出的每回合期望平均支付为 $[(K-2)4+6]/K$，它随着 K 趋于无穷大时收敛于4。

这个有限重复博弈还有一些对两个局中人来说都差于单回合博弈中任一均 339

衡的均衡（但当然不会差于最小化最大值）。例如，考虑如下局方案，此时博弈重复了 $7K+M$ 次，K 和 M 为任意正整数且 $2\leqslant M\leqslant 8$。局中人实施前 4 回合为 (b_1, b_2)，后 3 回合为 (a_1, a_2) 的 7 回合循环，直至某个局中人偏离或

表 7-6　　在一个有限重复博弈中，每一回合对所有行动组合的支付

D_1	D_2		
	a_2	b_2	x_2
a_1	4, 4	1, 6	0, 5
b_1	6, 1	-3, -3	-4, -4
x_1	5, 0	-4, -4	-5, -5

直至最后 M 回合。注意，这个循环给每个局中人每回合为 0 的平均支付。如果无人偏离这个循环，那在最后 M 个回合中，他们采用在每个回合都给出期望支付配置（3, 3）的随机均衡。但如果任一局中人偏离了 (b_1, b_2) 和 (a_1, a_2) 的 7 回合循环，作为对首先偏离的局中人 i（其中若两人在同一回合偏离，则令 i 等于 1）的“惩罚”，被惩罚的局中人 i 此后选择 a_i，而另一个局中人（惩罚者）j 除最后一个回合选择 b_j 外，每个回合都选择 x_j。在这个惩罚方案下，被惩罚的局中人 i 除最后一个回合得到 1 之外每个回合都得到 0。为了对施罚局中人 j 使用行动 x_j（在非重复博弈中是劣策略）予以鼓励，我们必须约定，若施罚局中人 j 在应该选择 x_j 时选择了 b_j，则对 i 的惩罚旋即终止，且他们此后转换到按照均衡 (b_i, a_j) 进行博弈。此时，以前的施罚局中人 j 得到 1，而以前被惩罚的局中人 i 得到 6。这个局方案在支付和准则下是有限重复博弈的一个子博弈完美均衡，且当 K 趋向无穷大时，它对每个局中人给出的每回合期望平均支付收敛于最小化最大值 0。

在无限重复囚徒困境博弈（见表 7-1）中，人们或许会想，两个局中人都始终选择他们的自私行动 (f_1, f_2) 多少比其他均衡“更理性些”，因为它是对应于该博弈有限重复变型的序贯均衡的唯一均衡。然而，克雷普斯、米尔格龙、罗伯茨和威尔逊（1982）已经证明，另外存在构造囚徒困境有限重复变型的一些方法，这些有限重复博弈也都具有唯一的均衡，且随着有限重复的次数趋向于无穷大时，收敛于无限重复博弈的非常不同的均衡。他们的基本思想是考虑这样的一些有限重复
340 博弈，其中存在一个小概率备择状态，而某些局中人关于这个状态又具有不完全信息。他们指出，在重复很多次但有限的博弈中，关于该博弈这个状态的小初始怀疑（small initial doubts）可以在根本上影响其序贯均衡集。

克雷普斯、米尔格龙、罗伯茨和威尔逊（1982）在支付和准则下考虑了一个有限重复囚徒困境博弈，其中局中人 2 有一个很小的概率 ε 并不真正是一个理性的局中人，而代之是一个总是实施针锋相对策略的机器。局中人 1 不可能

知道局中人2不是这样一个机器，直至她确实偏离了针锋相对。克雷普斯等人证明了，存在某个依赖于ε但与博弈回合次数无关的有限数$M(\varepsilon)$使得在每个序贯均衡中，以概率1，两个局中人会在每个回合都使用她们的慷慨行动(g_1, g_2)直至最后$M(\varepsilon)$个回合。其本质思想在于，即使局中人2不是针锋相对的机器，她也有培育局中人1的怀疑的动机，这是因为，假如1对她是针锋相对的机器这一事件赋予充分大的概率，则他在最后一个回合之前将总是慷慨大方。在任一序贯均衡中，如果局中人2偏离了针锋相对策略，那两个局中人在此后的每个回合都将采用自私行动(f_1, f_2)，因为在任一子博弈中，局中人2是理性的将成为共同知识。因而，为了保持局中人1的怀疑，局中人2一直像一个针锋相对的机器那样行动直至最后$M(\varepsilon)$个行动；所以局中人1在最后$M(\varepsilon)$个行动之前一直慷慨。在最后$M(\varepsilon)$个行动之前，由于预期局中人2不论如何都会使用针锋相对策略，所以局中人1对局中人2的类型一无所知，从而继续对局中人2是一个针锋相对的机器这个随机事件赋予概率ε。但在最后$M(\varepsilon)$个回合期间，若局中人2不是一个机器，则她可能随机地偏离针锋相对策略；因而局中人1对2是一个机器所赋予的信念概率，在她不偏离针锋相对的条件下，将在这最后的回合期间增大ε。在一个序贯均衡中，局中人2的随机偏离概率必须恰好充分大到局中人1的一致信念将使他乐意于以这样一个方式在g_1与f_1之间随机化，即若局中人2不是一个机器而是理性的局中人，则她的确会乐意于在继续实行针锋相对策略与偏离它之间随机化。例如，为使局中人1在倒数第二个回合乐意于随机化，若局中人2以前没有偏离针锋相对，则1对2是一个机器这个事件的信念概率在倒数第二个回合必须是1/5(对于表7-1所给定的支付而言)。

克雷普斯、米尔格龙、罗伯茨和威尔逊（1982）给出的详尽证明和对序贯 341
均衡的构造相当复杂，但类似的结论可更容易地从图4·9（第4章）所示的例子中推导出来。在这个例子中，局中人1和2轮流从慷慨和自私这两个选项中加以选择，直至某个局中人选择了自私或完成了有限博弈的回合数。任一自私行动都结束这个博弈（或使博弈进入一个所有支付都是0的吸收状态），但一个慷慨行动带给慷慨者的支付为-1（即损失为1），而对另一局中人给出支付+5。如果两个局中人都一直使用慷慨行动，那让我们给局中人编号使局中人2做出最后的行动。正如4.5节中所讨论的那样，若两个局中人都是理性的已是共同知识，则在该博弈的任一有限重复变形的唯一序贯均衡中，每个局中人在每个回合都会自私（因为最后做出行动的局中人肯定自私的话，倒数第二个做出行动的局中人不会有慷慨的动机，如此等等）。最早研究这个博弈的罗森塔尔（1981）认为，如果博弈论分析导出在这样的一个博弈中局中人应该总是自私的结论，那它一定有某种问题。不过，让我们转而考虑此博弈的一个修改变形，其中局中人2确实是一个只会慷慨的机器的小概率为ε（只要现行博弈在继续，意即两个局中人过去总是慷慨的），但局中人1不可能观测到局中人

2是一个理性局中人还是一个机器（直至她自私并停止现行博弈）。假定对某个整数 M 有 $1/5^M<\varepsilon<1/5^{M-1}$，那就存在唯一的一个序贯均衡，其中两个局中人一直是慷慨的，直至局中人1从博弈树末端倒数第 M 个行动之后的叫合（即直至局中人 i 还留有小于 M 个可能行动）。此后，局中人1自私的行动概率是0.8；而局中人2以这样的方式随机化，即对于每个小于 M 的 k，局中人1对局中人2是慷慨机器的一致信念概率在他从树末端倒数数到第 k 个行动处是 $\frac{1}{5}^k$。这个序贯均衡的唯一性已经在4.5节对于 $\varepsilon=0.05$ 的情形证明过。

正如囚徒困境中的针锋相对策略一样，如果对某个局中人是使用这个策略的机器这一事件引入小的正概率，将会通过鼓励此局中人在即使不是机器时也要模仿机器并培育其余局中人的怀疑，来显著地改变该博弈的序贯均衡集，我们就称
342 这个策略为该局中人在有限重复博弈中的一个**有吸引力的**（attractive）策略。由于并非每个用小初始怀疑来扰动博弈的方法都会对均衡集产生这种影响，所以并非每个策略都是有吸引力的。例如，如果我们代之以假设局中人1只对局中人2过去是一直使用慷慨行动这个事件赋予小的正概率，那在囚徒困境的任一有限重复变形中，唯一的序贯均衡将是每个局中人都始终自私（当然，除非局中人2是一个机器而必须慷慨之外）。局中人1对总是慷慨策略的最佳反应是总是自私，因而局中人2没有理由要去培育局中人1关于她将会像慷慨机器那样运作的信念。从而总是慷慨（类似的，总是自私）在重复囚徒困境中不是一个有吸引力的策略。

这样一来，当我们研究重复很多次但次数有限的博弈时，序贯均衡中所能达到的期望平均支付配置集可能小于或不小于相应的无限重复博弈的均衡中所能达到的支付配置集；但若是小于，则它可能会对引入小概率事件的扰动相当敏感。富登伯格和马斯金（1986）已经证明，在某些弱假定条件之下，无限重复博弈按照定理7.2可实现的任何支付配置，在此博弈以小概率扰动的长期有限重复变形的一个序贯均衡中，也可能会作为其期望平均支付配置而近似实现。

7.7 行动的不完全可观测性

7.5节中所讨论的一般可行性定理，对只有一个可能的自然状态且局中人又能观测到彼此所有过去行动的博弈成立。当所有行动都完全可观测时，局中人可以威胁去惩罚彼此的偏离均衡，并且相信在均衡中，这些威胁实际执行的概率为零。然而，当不做出这种完全可观测性假定时，制止自私行为的惩罚威胁可能在均衡中不得不以正概率实际发生，因为局中人即使在没有偏离时，也有可能看似偏离到其自私行动。因此，均衡中的威胁可能会有被实施的正的期
343 望成本，也有制止自私行为的期望收益。要为局中人找出最好的均衡可能要求

在这些成本与收益之间进行权衡或平衡。

为了说明这种权衡，现在让我们考虑一类具有贴现而又只有一个可能自然状态的无限重复博弈，其中的局中人不能观察到彼此的行动。本节中所提出的思想已经由阿布罗（Abreu，1986）；阿布罗、皮尔斯及斯塔克切蒂（Stacchetti，1986）；拉德纳、迈尔森及马斯金（1986）；以及阿布罗、米尔格龙和皮尔斯（1988）探讨过。这里所讨论的特殊例子源于阿布罗、米尔格龙和皮尔斯（1988）。

考虑 $N=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中5个局中人的问题，他们都为防止某种不幸事故的发生而独立工作。在每个时点，每个局中人必须选择一个努力水平，它是0与1之间的一个数。在任一很短的时间区间内，事故发生的概率正比例于区间长度，并是局中人努力水平的减函数。每个局中人在每次事故发生时损失一个单位的效用支付，他还必须付出只取决于其努力水平的单位时间努力成本。虽然局中人不能观察到彼此的努力水平，但只要发生事故，则每个人都能观察到。同时，为简化分析，我们假设局中人能在每个回合之前利用可公开观察到的随机变量关联他们的策略，因此他们就能够实施公开的相关均衡。

如果我们把这个博弈设想为实际上是在连续时间上进行的话，则由于我们仅知道如何分析时间为离散变量的重复博弈模型，即用“回合”来度量（见7.10节），那我们就遇到一个问题。为此，我们必须令每个回合表示某个正持续时间的区间，譬如说 ε 年（其中 ε 可以远小于1）。理想地说，这个时间长度 ε 应该是个人重新考虑或改变其行动所需的时间长度。让我们把 ε 作为分析中的一个参数，以便我们能研究改变时间长度的效果。在我们的离散时间模型中，时间长度用一个回合来表示。

让我们做如下假设：若 $e=(e_i)_{i\in N}$ 表示5个局中人在 $[0, 1]^5$ 中选择的努力水平组合，则在一个长度为 ε 的回合中发生一个事故的概率为 $\varepsilon(6-\sum_{i\in N}e_i)$，而且局中人 i 每一回合做出水平为 e_i 的努力的成本是 $\varepsilon\{e_i+(e_i)^2\}/2$。因此，$i$ 的努力成本是其努力程度递增的凸函数，并正比于我们视为一个“回合”的区间长度。为确保发生事故的概率小于1，我们应该假定 $\varepsilon\leqslant 1/6$。我们假定局中人在重复博弈中决定他们的最优策略时都使用期望贴现 344
平均支付的准则。每回合的贴现因子 δ 可能按照某个递减的指数函数依赖于回合长度，且随着回合长度趋于0时 δ 趋于1，因而让我们假定每个回合的贴现因子是 $\delta=.1^{\varepsilon}$（故 $\varepsilon\leqslant 1/6$ 意味着 $\delta>.681$）。

由于每个局中人在一次事故中的成本是1个单位的支付，在一个用 e 表示努力组合的回合中，每个局中人 i 的期望支付是

$$-\varepsilon\left(6-\sum_{j\in N}e_j\right)-\varepsilon\left(\frac{e_i+(e_i)^2}{2}\right)$$

这个期望支付通过令 $e_i=1/2$ 而达到最大值，所以唯一的平稳均衡是所有局中人都选择努力水平1/2。当所有局中人都选择某一共同的努力水平 c 时，对每

个局中人的期望支付是 $\varepsilon(4.5c-6-0.5c^2)$，在区间 0 到 1 上是 c 的增函数。因此，局中人会乐意相互给予某种激励以将他或她的努力水平增加到 1/2 的平稳均衡水平之上。

因为局中人可以观察到事故，但不能观察到彼此的努力，所以相互激励以提高对方的努力水平的唯一途径就是以事故发生时会出现某种惩罚相威胁。注意到，事故发生的概率对称地依赖于每个人的努力，而且即使每个人都选择最大的努力水平 1，此概率仍然为正。因而当事故发生时，无法说清楚是谁（如果有某个人的话）没有尽到足够的努力所致。再则，在这个博弈中，惩罚（或奖励）某个人的唯一途径是减少（或增大）其努力以改变事故的发生概率，而这又同等地影响着每个人。因此，在均衡中的每个回合，我们可以预期所有局中人都理性地选择相同的努力水平；也就是说，我们可以预期相对于局中人来讲均衡是**对称的**（symmetric）。于是让我们假设有对称性，并看出如何计算这个具有不完美监察的重复博弈之最好与最坏的对称公开相关均衡。

令 y 表示在最好的对称公开相关均衡中对每个局中人的期望贴现平均支付，又令 z 表示在最坏的对称公开相关均衡中对每个局中人的期望贴现平均支付。现
345 在考虑在最好的对称均衡的第一个回合会发生什么情况。每个局中人都将选择某个努力水平 b。由于努力成本函数的严格凹性，可以证明，局中人在任一回合都不会将他们的努力选择随机化。但是，在每一回合中事故可能发生也可能不发生。局中人在未来任一回合中的行为可能会依赖于回合 1 是否发生了事故，但不可能另外依赖于他们的个人努力选择，这些个人努力选择是不能共同观察到的。所以，令 x_1 表示如果回合 1 出现了事故，每个局中人从第 2 回合开始的支付序列的期望贴现平均；再令 x_2 表示如果回合 1 未出现事故，每个局中人从第 2 回合开始的支付序列的期望贴现平均。由于不论回合 1 发生了什么情况，这个博弈的内在结构从回合 2 起与从回合 1 起是相同的，故 x_1 和 x_2 都必定是由原博弈的某个对称公开相关均衡而引出的支付序列的期望贴现平均。于是，由 y 和 z 的定义，我们一定有

$$y\geqslant x_1\geqslant z \quad 和 \quad y\geqslant x_2\geqslant z \tag{7.7}$$

事实上，满足 (7.7) 式的任何期望贴现平均支付 x_j 都能够通过按照最好的均衡［以概率 $(x_j-z)/(y-z)$］与最坏的均衡［以概率 $(y-x_j)/(y-z)$］之间的公开随机化来实现。用 x_1 和 x_2 表示 y 的基本递归公式是

$$y=\varepsilon(6-5b)\{(1-\delta)(-1-\varepsilon(b+b^2)/2)+\delta x_1\} \tag{7.8}$$
$$+\{1-\varepsilon(6-5b)\}\left((1-\delta)(-\varepsilon(b+b^2)/2)+\delta x_2\right)^{*}$$

当其余局中人在第一回合都选择努力水平 b 时，为使局中人 i 乐意选择努力水平 b，则我们必须有

---

* 原文在 $(b+b^2)/2$ 项前未乘 ε——译者注。

$$b\in\underset{e_i\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\Big(\varepsilon(6-4b-e_i)\Big((1-\delta)\Big(-1-\varepsilon(e_i+(e_i)^2)/2\Big)+\delta x_1\Big)+(1-\varepsilon(6-4b-e_i))\Big((1-\delta)\Big(-\varepsilon(e_i+(e_i)^2)+\delta x_2\Big)\Big)^{①} \tag{7.9}$$

这样一来，给定 z，当 x_1、x_2 及 b 满足约束（7.7）和（7.9）时，y（即最好均衡的贴现平均支付）一定是满足方程（7.8）的最大数。

通过一个类似的证明，给定 y，z 一定是满足

$$z=\varepsilon(6-5c)\Big((1-\delta)(-1-\varepsilon(c+c^2)/2)+\delta x_3\Big)+(1-\varepsilon(6-5c))\Big((1-\delta)(-\varepsilon(c+c^2)/2)+\delta x_4\Big)^{②} \tag{7.10}$$

346

的最小数，其中 c、x_3 及 x_4 满足约束

$$c\in\underset{e_i\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\Big(\varepsilon(6-4c-e_i)\Big((1-\delta)\Big(-1-\varepsilon(e_i+(e_i)^2)/2\Big)+\delta x_3\Big)+(1-\varepsilon(6-4c-e_i))\Big((1-\delta)\Big(-\varepsilon(e_i+(e_i)^2)/2\Big)+\delta x_4\Big)\Big)^{③} \tag{7.11}$$

$$y\geqslant x_3\geqslant z \text{ 和 } y\geqslant x_4\geqslant z \tag{7.12}$$

等价地，最好与最坏的对称支付 y 与 z 可通过对满足（7.7）～（7.12）式的所有（y，z，b，c，x_1，x_2，x_3，x_4）最大化 $y-z$ 而计算得到。

对每个 x_j，令 $q_j=(x_j-z)/(y-z)$，那么，这个重复博弈中最好与最坏的公开相关均衡的结构，可以用每个回合只有两个可能的行为模式——奖励模式和惩罚模式所描述的一个相关策略而得以实现。在回合 1，局中人以奖励模式开始最好的均衡，而以惩罚模式开始最坏的均衡。在局中人处于奖励模式的任一回合，每个局中人选择某个高努力水平 b。在局中人处于奖励模式的任一回合末端，如果出现一个事故，则他们将以概率 $1-q_1$ 在下一回合转换到惩罚模式（利用像太阳黑子之类的某个可公开观察的随机变量）；而如果未出现事故，则他们将以概率 $1-q_2$ 在下一回合转换到惩罚模式；在其他情况下，他们下一回合将停留在奖励模式上。在局中人处于惩罚模式的任一回合的末端，如果出现一个事故，则他们将以概率 q_3 在下一回合转换到奖励模式；而如果未出现事故，则他们将以概率 q_4 在下一回合转换到奖励模式；在其他情况下，他们在下一回合将停留在惩罚模式上。另外，更复杂的均衡也能被设计出来，其中局中人必须记清过去所有事故发生的次数和时间，但这些均衡不会

① 原文在 $(e_i+(e_i)^2)/2$ 项未乘 ε——译者注。

② 原文在 $(c+c^2)/2$ 项前未乘 ε——译者注。

③ 原文在 $(e_i+(e_i)^2)$ 项前未乘 ε——译者注。

生成更大或更小的期望支付。

不难看出，这个解一定有 $q_2=1$，故 $x_2=y$。也就是说，为了在奖励模式中最有效地鼓励高努力，局中人应该计划只在事故发生后才转换到惩罚模式。类似地，为了在惩罚模式中最有效地鼓励低努力，局中人应该计划只在事故发
347 生后才转换到奖励模式，故作为一个解，必须有 $q_4=0$ 和 $x_4=z$。此外，事故后的转换概率 $1-q_1$ 和 q_3 在给定其余变量下应该选得尽可能小，因而（7.9）和（7.11）式中最大化的一阶最优性条件即使最大值在区间 $[0, 1]$ 的边界处取得仍会满足。也就是说，当 e_i 是（7.9）和（7.11）式中的最大值点时，我们可以令表达式对 e_i 的导数为0；因此，对 q_1 和 q_3 求解，我们得到

$$1-q_1=\frac{(1-\delta)(b-1/2)}{\delta(y-z)}$$

$$q_3=\frac{(1-\delta)(1/2-c)}{\delta(y-z)}$$

代回到（7.8）和（7.10）式并化简，我们得到

$$y=\varepsilon(4.5b^2-4b-3),\quad z=\varepsilon(4.5c^2-4c-3)$$

于是，当 $\delta=.1^{\epsilon}$ 且 $\varepsilon\leqslant 0.158$ 时，可以证明，通过令 $b=1$ 和 $c=4/9$，$y-z$ 在这些约束条件下达到最大，故所有局中人在奖励模式中选择他们最大可能的努力水平，而在惩罚模式中选择的努力水平小于平稳均衡中所给出的（1/2）。当 $\varepsilon=0.158$ 时，这个解是通过在奖励模式中有一个事故发生后以概率1转换到惩罚模式和在惩罚模式中有一个事故发生后以概率 .111 转换到奖励模式而实现的。当我们划分回合的时间长度越来越短时（譬如说 $\varepsilon=0.001$），这个解实质上保持不变，只是转换概率略变小一些（$1-q_1=.83$ 和 $q_3=.092$）。

现在，遵循阿布罗、米尔格龙及皮尔斯（1988），让我们考虑一个与之相关的问题，其中的5个局中人正尽力提高做出某种合意销售的概率（而不是减小不合意事故发生的概率）。为保持可能事件概率的变化范围相同（ε 到 6ε），让我们假设，在任一回合销售的概率按照如下公式依赖于当前的努力 $(e_i)_{i\in N}$：

$$\varepsilon\Big(1+\sum_{i\in N}e_i\Big)$$

如同前例，每个局中人的努力水平都必须从区间 $[0, 1]$ 上选取，且在每个回合的成本为 $\varepsilon\{e_i+(e_i)^2\}/2$。我们假定每个局中人从每次销售中得到支付
348 增量+1，并且每个人都能观察到销售，但不能观察到彼此间的努力水平。

类似于（7.7）～（7.12）式，方程（7.13）～（7.17）刻画了在对称公开相关均衡中所能实现的最好的（y）和最坏的（z）期望贴现平均支付：

$$y\geqslant x_1\geqslant z,\ y\geqslant x_2\geqslant z,\ y\geqslant x_3\geqslant z,\ y\geqslant x_4\geqslant z \tag{7.13}$$

$$y=\varepsilon(1+5b)\Big((1-\delta)(1-\varepsilon(b+b^2)/2)+\delta x_1\Big) \tag{7.14}$$

$$+\ (1-\varepsilon\ (1+5b))\ \Big(\ (1-\delta)\ \{-\varepsilon\ (b+b^2)\ /2\}\ +\delta x_2\Big)$$

$$b\in \underset{e_i\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\Big\{\varepsilon(1+4b+e_i)\Big((1-\delta)\Big(1-\varepsilon(e_i+(e_i)^2)/2\Big)+\delta x_1\Big) \tag{7.15}$$

$$+\{1-\varepsilon(1+4b+e_i)\}\Big\{(1-\delta)\Big(-\varepsilon(e_i+(e_i)^2)/2\Big)+\delta x_2\Big\}\Big\}$$

$$z=\varepsilon(1+5c)\Big((1-\delta)(1-\varepsilon(c+c^2)/2)+\delta x_3\Big) \tag{7.16}$$

$$+\{1-\varepsilon(1+5c)\}\Big((1-\delta)(-\varepsilon(c+c^2)/2)+\delta x_4\Big)$$

$$c\in \underset{e_i\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\Big\{\varepsilon(1+4c+e_i)\Big((1-\delta)\Big(1-\varepsilon(e_i+(e_i)^2)/2\Big) \tag{7.17}$$

$$(+\delta x_3\Big)^{*}+\{1-\varepsilon(1+4c+e_i)\}\Big\{(1-\delta)\Big(-\varepsilon(e_i+(e_i)^2)/2\Big)+\delta x_4\Big\}\Big\}$$

可以对这些条件进行类似于对（7.7）～（7.12）所进行的分析。分析中的主要差别在于，这里要最大化 $y-z$，在销售后的转换概率应该被置于 0，因而 $x_1=y$ 和 $x_3=z$。也就是说，为了在奖励模式中最有效地鼓励努力，在发生销售时，局中人决不应该从奖励模式转换到惩罚模式；而为了在惩罚模式中最有效地劝阻努力，在发生销售时，局中人决不应该从惩罚模式转换到奖励模式。

当 $\delta=.1^{\varepsilon}$ 且 $\varepsilon\leqslant 1/6$ 时，这些方程没有 $y>z$ 的解。唯一的解具有 $y=z$ 和 $=c=1/2$。这就是说，唯一的均衡就是所有局中人都总是选择努力水平1/2且独立于过去历史的平稳均衡。

通过对比这两个例子，阿布罗、米尔格龙和皮尔斯（1988）已对行动具有不完美监察的重复博弈如何设计激励体制提供了重要见解。在每个例子中，最好的奖励模式与最坏的惩罚模式之间的转换应该只发生在有坏消息的时候：在第一个例子中是指发生了事故，而在第二个例子中是指没有销售。不过，坏消 349
息所传递的关于不可观察的努力水平的信息在第二个例子要比第一个例子少。对不可观察变量的任何一对可能值和任一可观察事件，**似然比**（likelihood ratio）可被定义为：给定该不可观察变量的两个可能值之一时该事件发生的条件概率与给定另一可能值时该事件发生的条件概率之比。统计学家已经证明，事件关于不可观察变量的信息量在某种意义上可以用似然比离开 1 的程度来度量。在第二个例子中，对于任意两个可能的努力水平组合 e 和 $\hat{e}$，坏消息事件（没有销售）的似然比是

$$\frac{1-\varepsilon\Big(1+\sum_{i\in N}e_i\Big)}{1-\varepsilon\Big(1+\sum_{i\in N}\hat{e}_i\Big)}$$

* 原文(7.14)～(7.17)式中的成本函数都漏了一个系数ε——译者注。

若 ε 很小，这个似然比总是接近于 1。然而，在第二个例子中，坏消息事件（一个事故）中 e 与 $\tilde{e}$ 的似然比是

$$\frac{\varepsilon\left(6-\sum_{i\in N}e_i\right)}{\varepsilon\left(6-\sum_{i\in N}\tilde{e}_i\right)}$$

这个似然比与 ε 无关，并且只要 $\sum_{i\in N}e_i\neq\sum_{i\in N}\tilde{e}_i$，它就不等于 1。因此，有效的沟通在第一个例子中有可能，但在第二个例子中不太可能，这是因为，坏消息只在第一个（避免事故）例子中才传递了关于局中人的不可观察努力水平的有效消息。好消息（有销售）在第二个例子中传递了关于努力水平的有效信息；但这个信息对局中人是没有帮助的，因为在一个最优的激励体制下，他们应该只在有坏消息时才转换模式。

7.8 大分散群体的重复博弈

一般可行性定理（定理 7.2）可被解释为对诸如家庭、合伙和小集团的小群体中社会规范功能的一种陈述。根据一般可行性定理，如果一个群体中的个
350 人能很好地相互了解、能彼此观察到对方的行为、并且预期继续相互的关系，那么，社会规范就能够维持群体行为的任何模式，只要它使每个人都比没有这个群体要更好。不过，当我们从小群体进入到较大的社会结构时，每个人能观察到其他每个人的假设就不再成立，从而一般可行性定理也就失效了。因此，大社会的匿名性和保密性可以减小均衡集并排除行为的合作模式。

作为说明这个问题的一个例子，这里我们考虑米尔格龙、诺斯（North）和瓦因加斯特（1989）曾研究过的一个博弈的简化形式。在这个重复博弈中，对于某个正整数 n，局中人集为 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$。在每个回合，局中人成对进行囚徒困境博弈。当两个局中人在回合 k 相配对博弈时，他们在这个回合所得到的支付按照表 7－1 依赖于他们的行动：慷慨（g_i）或自私（f_i）。在回合 1，$\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的每个局中人 i 与局中人 $n+i$ 配对。在每个以后的回合 k，局中人 1 与在回合 $k-1$ 中与局中人 n 配对的那个局中人配成一对，而 $\{2, \cdots, n\}$ 中的每个局中人 i 与在回合 $k-1$ 中与局中人 $i-1$ 配成对的局中人配对。因而，在回合 k 配成对的两个局中人直至回合 $k+n$ 之前不会再配成对。在任何一个回合，每个局中人都知道自己过去的行动和曾与其配对的局中人所选择的过去行动，但不能观察到没有与其配成对的其他局中人所采用的行动。局中人都是根据 δ－贴现平均的准则来评价他们的支付序列。

现在试问一下，对怎样的 n 和 δ 值，存在一个所有局中人在所有回合都以概

率1慷慨（选择 g_i）的均衡（即除非某个人偏离了均衡，否则每个局中人在每个回合都慷慨）。为制止任一局中人 i 在回合 k 以自私对付任一局中人 j，局中人 i 必须预料到，他目前的自私将使与其配对的局中人在以后的一些回合中自私地行动。由于局中人 j 是唯一能观察到局中人 i 自私行动的局中人，所以一个明显的惩罚方案是：若 i 在回合 k 以自私对付 j，则将来每当 i 与 j 配对时，他们都将以自私相对付。然而，由于他们在每 n 个回合只有一个回合配成对，故仅当

$$(6-5)+\sum_{l=1}^{\infty}(1-5)\delta^{ln}\leqslant 0$$

时，这个惩罚方案才能制止局中人 i 的初始自私。也就是说，把 i 的支付从5 351
增大到6对其贴现平均支付的影响，一定抵消不了 i 与 j 将来每次配成对时他的支付从5减小到1的影响。这个不等式成立的充分必要条件是

$$\delta^n\geqslant 1/5$$

也可以设计另外的惩罚方案，但有信息结构所施加的限制。在回合 $k+1$ 到 $k+n$ 期间与 i 配成对的那些局中人无法拥有任何依赖于局中人 i 在回合 k 的行为的信息，故 i 在回合 k 中的偏离最早要到 $k+n+1$ 回合才能被惩罚。不过，存在一个惩罚方案迫使局中人 i 从回合 $k+n+1$ 起每个回合都得到其最小化最大值。假定每个局中人在每个回合都慷慨直至他观察到某个人的自私行为，且此后他在每个回合都采用自私行动［如同坎多里（Kandori，1988）所研究的**传染局方案**（contagious scenarios）那样］。如果 i 在回合 k 用自私对付 j 而偏离了这个局方案，则 j 将转换成自私地对待其以后所有的伙伴，并且间接地诱导每个局中人在回合 $k+n+1$ 之前去自私地行动；因而，局中人 i 在回合 $k+n+1$ 及以后的每个回合都将面临自私的行为。在这个局方案下，如果局中人 i 在某个回合自私，那么此后所有的回合都自私对他来说是最好的选择（因为他不能使他的惩罚更坏）；故初始自私的偏离能被制止的充分必要条件是

$$\sum_{l=1}^{n}(6-5)\delta^{l-1}+\sum_{l=n+1}^{\infty}(1-5)\delta^{l-1}\leqslant 0$$

这个不等式也是当且仅当 $\delta^n\geqslant 1/5$ 时成立；所以，即使是最极端的威胁也不能增大维持合作的参数的范围。于是，对任意给定的 δ，如果局中人数 $2n$ 大于 $2\log(5)/\log(1/\delta)$，则即使最极端的惩罚方案（瓦解整个社会中的所有合作）也不能制止一个局中人会偏离到自私行为上去。这个模型说明了，在小群体中能得以维持的慷慨或合作行为在大群体中是如何中断的。

米尔格龙、诺斯和瓦因加斯特（1989）指出，如果通过增加一个中央调解人来改变信息结构，该调解人（像一个简单的司法系统那样运作）持有一份所有曾违犯过合作规范的局中人的名单，那么无论局中人的数量有多大，合作都可以得以维持。作为这样一个例子，若一个局中人在与不在此名单上的局中人 352

配成对时自私，那他就进入了调解人所持有的名单。在每个回合，调解人只是对每一配成对的局中人讲他们之中是否有某个人在名单上。若 $\delta \geqslant 1/5$，则这个博弈有一个均衡，其中每个局中人都总是慷慨，除非（在某个偶然偏离之后）他在名单上或与某个名单上列出的局中人配成对，此时他将是自私的。

7.9 不完全信息下的重复博弈

在对具有不完全信息的贝叶斯博弈的研究中，局中人彼此关于对方类型的信念被假定为外生给定的。但在现实生活的许多局势中，个人关于对方的信念来自于过去长期相互交往的经验。在这种情况下，某些信息结构可能比另一些更可能发生。这就是说，对那些与其有着长期关系的人，他可能有些关于自己的事情愿意显露出来，另有一些又倾向于隐匿。粗略地说，我们可能会预料到，一个人一般会力图让其他人知道他的强项，但关于其弱处又尽量维持其不确定性。对不完全信息下的重复博弈的研究为阐释和分析类似于这样的假设提供了一个框架。

奥曼和马施勒（1966）提出了研究不完全信息下的重复博弈。在有关这些博弈的大多数文献中，都假定了如下结构。存在两个或两个以上的可能自然状态，而实际的自然状态是按照在回合 1 开始时所给定的概率分布来决定的。对于每个局中人，都存在某个自然状态的函数，我们称之为此局中人的**类型**（type），而此局中人在回合 1 开始时便知道自己的类型。此后，这个自然状态在整个博弈中保持不变。每个局中人在回合 1 知道自己的类型后，其后只能观察到局中人在以前回合的行动。每一回合对每个局中人的支付既依赖于自然状态又依赖于局中人目前的行动。至于一个局中人的支付会在多大程度上依赖于自然状态对其而言是未知的，故他并不知道他在过去任一回合所得到的实际支付。每个局中人的目标都是在给定其信息下最大化其长期平均支付的某种度量（譬如说，平均支付的极限，或 δ－贴现平均在 δ 趋向于 1 时的极限，或如 7.2 节中所讨论的一些其他准则）的期望值。迄今为止，有关不完全信息下重复博弈方面的大多数工作都是针对两人零和博弈这一特例［有一个引人注目的例外，参见哈特（Hart，1985*a*）］。

353

这里，我们考虑一个不完全信息下重复两人零和博弈的经典例子，来自于奥曼和马施勒（1966）。对 $\{1, 2\}$ 中的每个局中人 i，每个回合的可能行动集是 $D_i = \{a_i, b_i\}$。自然状态或为 α 或为 β，但在此重复博弈的所有回合中都是不变的。对局中人 1 和 2 的支付取决于行动和自然状态，如表 7－7 所示。令 q 表示实际自然状态是 α 的先验概率，这个参数 q 是局中人中间的共同知识。在回合 1 开始时，两个局中人之一知道哪个自然状态是实际自然状态。因此，这个博弈有两个形式要求我们予以考虑。在第一个形式中，局中人 1 知道自然

状态但局中人 2 不知道。而在形式 2 中，局中人 2 知道自然状态，但局中人 1 不知道。在这两个形式中，局中人彼此都能观察到对方过去所有的行动，而不知情的局中人可以利用这些观测力图对自然状态做一推断。

表 7－7　在一个不完全信息下的重复博弈中，对所有行动组合和自然状态，在每一回合的支付

状态为 α		
	D_2	
D_1	a_2	b_2
a_1	$-1, 1$	$0, 0$
b_1	$0, 0$	$0, 0$
状态为 β		
	D_2	
D_1	a_2	b_2
a_1	$0, 0$	$0, 0$
b_1	$0, 0$	$-1, 1$

让我们首先考虑形式 1，其中只有局中人 1 知道状态（且这一事实也是共同知识）。这个博弈很容易分析。如果局中人 1 知道自然状态是 α，则他应该总是选择 b_1 以保证自己得到最好的可能支付 0。类似地，如果自然状态是 β， 354
则局中人 1 应该总是选择 a_1。当局中人 1 遵循这一策略，那局中人 2 当然将有可能从局中人的行动推断出他的类型：若 1 选择 b_1 则为 α，而若 1 选择 a_1 则为 β。一旦局中人 2 从局中人 1 在回合 1 的行动知道了状态是什么，则局中人 2 可以很好地使用其弱占优的行动：若状态是 α 则选择 a_2，若状态是 β 则选择 b_2；但局中人 1 仍将得到其最优支付 0。因此，局中人 1 在这个博弈中泄露其信息是不受损害的。

下面再让我们来考虑形式 2，其中局中人 2 知道状态。为了有某种得到高于 0 的支付的希望，局中人 2 必须力图阻止局中人猜出状态。局中人 2 这样去做的一个办法就是避免使用她关于状态的信息，就像没有一个局中人知道状态那样行动。如果没有一个局中人知道自然状态，那在仅给出状态为 α 的概率是 q，他们两人都只关心他们的期望支付。这些期望支付如表 7－8 所示。

表 7－8　对所有行动组合的期望支付

	D_2	
D_1	a_2	b_2
a_1	q, q	$0, 0$
b_1	$0, 0$	$q-1, 1-q$

作为一个策略型博弈，表 7－8 具有唯一的一个均衡 $\{(1-q)[a_1]+q[b_1], (1-q)[a_2]+q[b_2]\}$。这个均衡中对局中人 1 的期望支付是 $-q(1-q)$，而对局中人 2 的支付是 $q(1-q)$。因此，在此博弈局中人 2 知道状态的形式 2 中，如果她在每个回合都使用以概率 $1-q$ 选择 a_2 而以概率 q 选择 b_2 的策略，并与其关于状态的信息和以前的所有行动无关，那她就能保证其期望支付（只给出先验概率）将是 $q(1-q)$。奥曼和马施勒（1966）证明了，这个不泄露的平稳策略是局中人 2 在这个博弈中所能做得最好的策略。

这样一来，在这个博弈的形式 1 中，知情局中人（即 1）应该利用其关于状态的信息并泄露出去；但在这个博弈的形式 2 中，知情局中人（即 2）应该
355 无视其关于状态的信息并隐匿它。还要注意到，在表 7－8 所示的博弈中，局中人 1 的均衡支付是 q 的一个凸函数，而局中人 2 的均衡支付却是 q 的一个凹函数。[设 X 是某向量空间的一个凸子集，又设 $f: X \to \mathbf{R}$ 是 X 上任一实值函数，则 f 是**凹的**（concave），当且仅当

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
$$\forall x \in X,\ \forall y \in X,\ \forall \lambda \in [0,1]$$

另一方面，f 是**凸的**（convex），当且仅当

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
$$\forall x \in X,\ \forall y \in X,\ \forall \lambda \in [0,1]]$$

奥曼和马施勒指出，一般来说，这种均衡支付函数的凸凹性可以告诉我们，在一个不完全信息下的重复两人零和博弈中，一个知情局中人是应该泄露还是应该隐匿其信息。

为了更准确地叙述奥曼和马施勒的结论，考虑下面这个不完全信息下两人零和重复博弈的一般模型。局中人集是 $N=\{1, 2\}$。可能的自然状态集和局中人 1 与 2 的可能行动集都是非空集，分别用 Θ、D_1 和 D_2 表示。在每个回合中，对局中人 1 的支付按照函数 $u_1: D_1 \times D_2 \times \Theta \to \mathbf{R}$ 依赖于自然状态和两个局中人的行动。对局中人 2 的支付恰好与局中人 1 的支付符号相反，即 $u_2(d_1, d_2, \theta) = -u_1(d_1, d_2, \theta)$。实际的自然状态是不变的，并且按照 $\Delta(\Theta)$ 中的一个初始概率分布 Q 在回合 1 之前就被确定了。在回合 1，局中人 1 知道实际的自然状态，而局中人 2 没有得到信息信号。因而局中人 1 是**知情**（informed）局中人，而局中人 2 是不知情的（uninformed，只知道概率分布 Q）。在回合 1 之后的每个回合，两个局中人都能观察到前一个回合所选择的行动。

令 K 为某个正整数。假设在这个单方非完全信息下的两人零和重复博弈中，每个局中人都简单地应用最大化其在前 K 个回合所收到支付的期望平均准则。根据这个准则，我们的无限重复博弈能够模型化为有限展开型两人零和博弈，其中每个局中人都恰好行动 K 次，且终端支付是 K 个回合中支付的平

均。令 $v_1(K)$ 表示在这个 K 回合博弈的一个均衡中对局中人 1 的期望支 356
付。

现在考虑一回合博弈，其中没有一个局中人知道状态，并且他们的支付按照公式

$$\hat{u}_i(d_1,d_2)=\sum_{\theta\in\Theta}q(\theta)u_i(d_1,d_2,\theta)$$

依赖于他们在 $D_1\times D_2$ 中的行动，上式中的 q 是 $\Delta(\Theta)$ 中某个概率分布。在这个一回合的两人零和博弈中，令 $w_1(q)$ 表示在任一均衡中对局中人 1 的期望支付，并令 $\tau_1(\cdot|q)=(\tau_1(d_1|q))_{d_1\in D_1}$ 表示局中人 1 在 $\Delta(D_1)$ 中的一个均衡策略。

令 $w_1^*:\Delta(\Theta)\to\mathbf{R}$ 是函数 $w_1:\Delta(\Theta)\to\mathbf{R}$ 的**凹包**（concave hull），即 w_i^* 是 $\Delta(\Theta)$ 上最小的凹函数使得，对于 $\Delta(\Theta)$ 中的每个 q，均有 $w_1^*(q)\geqslant w_1(q)$。可以证明，对 $\Delta(\Theta)$ 中任一 q，存在概率分布的一个有限族 $r_1,\cdots,r_J$，其中每一个都在 Θ 中，以及非负数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_J$ 使得

$$\sum_{j=1}^{J}\lambda_j=1,\quad\sum_{j=1}^{J}\lambda_j r_j=q,\text{及}\sum_{j=1}^{J}\lambda_j w_1(r_j)=w_1^*(q)\qquad(7.18)$$

事实上，定义凹包的一个等价方法就是令 $w_1^*(q)$ 对于分布 $r_1,\cdots,r_J$ 及非负数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_J$ 为能够满足（7.18）式的最大数。

令 $r_1,\cdots,r_J$ 是 $\Delta(\Theta)$ 中的分布，并令 $\lambda_1,\cdots,\lambda_J$ 是当 $q=Q$ 时满足条件（7.18）的非负数。现在，在局中人 1 知道实际的自然状态而局中人 2 只知道自然状态所抽取的概率分布 Q 的重复博弈中，考虑局中人 1 的下述策略：在回合 1，知道实际的状态之后，局中人 1 在 1 到 J 之间随机地选择一个数，使得在给定实际状态是 θ 的条件下，$\lambda_j r_j(\theta)/Q(\theta)$ 是其选择 j 的条件概率；此后，给定其所选择的数 j，局中人 1 在每个回合按照分布 $\tau_1(\cdot|r_j)$ 独立地选择其行动（即以概率 $\tau_1(d_1|r_j)$ 选择行动 d_1）。因此，局中人 1 选择数 j 的无条件概率是 $\sum_{\theta\in\Theta}Q(\theta)\{\lambda_j r_j(\theta)/Q(\theta)\}=\lambda_j$。注意到，只给出 j 是局中人 1 所选择的数字，则任何一个 θ 是实际状态的条件概率为 $Q(\theta)\{\lambda_j r_j(\theta)/Q(\theta)\}/\lambda_j=r_j(\theta)$。所以，如果我们只知道局中人 1 在每个回合执行随机策略 $\tau_1(\cdot|r_j)$，那么我们将能推断出未知状态上的分布是 r_j，并且我们能确定局中人 1 在每个回合的期望支付为 $w_1(r_j)$。这样一来，在局中人 1 知道实际状态和所选择的数之 357
前，他在这个策略下的期望支付一定至少是 $\sum_{j=1}^{J}\lambda_j w_1(r_j)=w_1^*(Q)$。因此，这个策略保证局中人 1 在这个重复博弈的每个回合中都能得到期望支付 $w_1^*(Q)$。

如果局中人 1 执行这个策略，且每当 $h\neq j$ 时便有 $\tau_1(\cdot|r_j)\neq\tau_1(\cdot|r_h)$，那局中人 2 将最终有可能推断出局中人 1 所选择的数 j。但是，局中人 2 决不可能

通过观察1的行动来推断出任何有关自然状态的信息，因为局中人1的行动像是忘记了状态而只记得所选择的数一样。于是，在长时间观察到局中人1执行这个策略之后，局中人2对未知自然状态的后验概率分布应该收敛于 r_j。

当局中人只关心前 K 个回合所得到的平均支付时，这个策略对局中人1来说可能不是最优的。这是因为，局中人1有着利用其到这 K 个回合结束期间的关于状态的更多信息的动机，只要由此而泄漏给局中人2的信息与以前一样不会损害到局中人1。然而，随着水平 K 趋于无穷，这个策略是渐近最优的。这一定理是奥曼和马施勒（1968）的主要结论，可叙述如下。

定理 7.3

$$\lim_{K\to\infty} v_i(K) = w_1^*(Q)$$

完整的证明也可以在索林（1980）中找到。这里，我们只勾勒一下证明过程。我们所要证明的是局中人2具有一个策略，保证局中人1从长期来看不可能得到好于 $w_1^*(Q)$ 的期望平均支付。为此，我们必须首先给出布莱克韦尔（1956）的一个重要定理。

对 $\mathbf{R}^{\Theta}$ 的任一闭凸子集 Z 及 $\mathbf{R}^{\Theta}$ 中任何一点 $y=(y_\theta)_{\theta\in\Theta}$，$Z$ 中存在唯一的一点 $\xi(y)=(\zeta_\theta(y))_{\theta\in\Theta}$ 到 y 的距离最短，即

$$\{\xi(y)\} = \operatorname*{argmin}_{z\in Z}\Big(\sum_{\theta\in\Theta}(z_\theta - y_\theta)^2\Big)^{1/2}$$

从 Z 到 y 的**距离**（distance）被定义为这个最短距离。

358 我们可以用通常的方法把函数 $u_1(\cdot)$ 延拓到 $\Delta(D_1)\times\Delta(D_2)\times\Theta$，使得

$$u_1(\rho_1, \rho_2, \theta) = \sum_{d_1\in D_1}\sum_{d_2\in D_2}\rho_1(d_1)\rho_2(d_2)u_1(d_1, d_2, \theta)$$

局中人2在这个重复博弈中的一个行为策略是一个序列 $\sigma_2=\{\sigma_2^k\}_{k=1}^{\infty}$，其中 $\sigma_2^1\in\Delta(D_2)$，而对每个大于1的 k，σ_2^k 是从 $(D)^{k-1}$ 到 $\Delta(D_2)$ 的一个函数。因此，$\sigma_2^k(d_2|c^1, \cdots, c^{k-1})$ 表示，在策略 σ_2 下，若 $c^1, \cdots, c^{k-1}$ 是两个局中人在回合1至回合 $k-1$ 的行动历史，则局中人2将在回合 k 选择行动 d_2 的概率［此处每个 $c^l=(c_1^l, c_2^l)$］。在知道了实际的自然状态之后，局中人1应该选择一个类似定义的行为策略。一旦对每个局中人都确定了行为策略，每个局中人在每个回合实际上所将实施的行动就成为随机变量，即依赖于行为策略的完好定义的概率分布（这些概率分布的形式结构已在7.2节描述过）。在这些行为策略的一个实现中，令 $\tilde{d}_i^k$ 表示局中人 i 在回合 k 实际上将实施的行动这个随机变量，并令 $\tilde{u}_1^k(\theta)=u_1(\tilde{d}_1^k, \tilde{d}_2^k, \theta)$。局中人2不知道实际的状态，但在此博弈进行到回合 k 之后，她将知道局中人1在回合 k 对每个可能状态所得到的支付。也就是说，局中人2关于局中人1在回合 k 所实现支付的知识将由向量

$$\bar{u}_1^k = (\bar{u}_1^k(\theta))_{\theta\in\Theta}$$

描述。我们称 $\bar{u}_1^k$ 为局中人 1 在回合 k **实现的支付向量**（realized payoff vector）。令 $\bar{x}^k$ 表示局中人 1 的前 k 个实现的支付向量的平均，即 $\bar{x}^k = (\bar{x}_\theta^k)_{\theta\in\Theta}$

$$\bar{x}_\theta^k = \frac{\sum_{m=1}^{k} \bar{u}_1^m(\theta)}{k}$$

布莱克韦尔（1956）已证明了下述重要定理。

定理7.4　设 Z 是 $\mathbf{R}^\Theta$ 的任一闭凸子集，且对于 $\mathbf{R}^\Theta$ 中的每个 q，均有

$$\min_{\rho_2\in\Delta(D_2)}\max_{\rho_1\in\Delta(D_1)}\sum_{\theta\in\Theta} q(\theta)u_1(\rho_1,\rho_2,\theta) \leqslant \operatorname{supremum}_{y\in Z}\sum_{\theta\in\Theta} q(\theta)y_\theta \qquad 359$$

则局中人 2 在这个重复博弈中有某个行为策略 σ_2，使得对于局中人 1 可以使用的任一策略，当 k 趋向于无穷大时，从 Z 到 $\bar{x}^k$ 的距离以概率 1 收敛于 0。

这个定理被称为**布莱克韦尔可接近性定理**（Blackwell's approachability theorem）。当此定理的结论成立时，我们则称集 Z 是局中人 2 **可接近的**（approachable）。

现在假定满足了定理 7.4 的假设。无需给出详尽证明，我们也能轻易地为局中人 2 描述一个策略以满足定理 7.4 的结论。在回合 1，及在 $\bar{x}^{k-1}$ 属于 Z 的任一回合 k，令局中人 2 按照 D_2 上的任一分布选择其行动。在 $\bar{x}^{k-1}$ 不属于 Z 的任一回合 k，令局中人 2 按照集

$$\operatorname*{argmin}_{\rho_2\in\Delta(D_2)}\max_{\rho_1\in\Delta(D_1)}\sum_{\theta\in\Theta}(\bar{x}_\theta^{k-1} - \xi_\theta(\bar{x}^{k-1}))u_1(\rho_1,\rho_2,\theta)$$

中的任一分布选择其行动，其中 $\xi(\bar{x}^{k-1})$ 是 Z 中最接近于 $\bar{x}^{k-1}$ 的点。布莱克韦尔（1956）证明了，当局中 1、2 使用这一策略时，无论局中人 1 使用什么策略，从 Z 到平均实现的支付向量的距离一定收敛于 0。

为了理解布莱克韦尔定理的全部功能，现在让我们转而考虑定理假设不满足的情况。那么，就存在某个 q，使得

$$\begin{aligned}\sup_{y\in Z}\sum_{\theta\in\Theta} q(0)y_\theta &< \min_{\rho_2\in\Delta(D_2)}\max_{\rho_1\in\Delta(D_1)}\sum_{\theta\in\Theta} q(\theta)u_1(\rho_1,\rho_2,\theta)\\ &= \max_{\rho_1\in\Delta(D_1)}\min_{\rho_2\in\Delta(D_2)}\sum_{\theta\in\Theta} q(\theta)u_1(\rho_1,\rho_2,\theta)\end{aligned}$$

即存在 $\mathbf{R}^\Theta$ 中的某个 q 和 $\Delta(D_1)$ 中的某个 ρ_1，使得

$$\sum_{\theta\in\Theta} q(0)u_1(\rho_1,\rho_2,\theta) > \sup_{y\in Z}\sum_{\theta\in\Theta} q(0)y_\theta,\ \forall\rho_2\in\Delta(D_2)$$

因此，若局中人 1 简单地使用在每个回合都独立地由随机策略 ρ_1 决定其行动这个平稳策略，则他就能保证以概率 1 有

$$\liminf_{k\to\infty}\sum_{\theta\in\Theta}q(\theta)\bar{x}_\theta^k > \sup_{y\in Z}\sum_{\theta\in\Theta}q(\theta)y_\theta$$

360 于是，如果不能满足定理的前提，那局中人1就有一个行为策略来保证，无论局中人2使用怎样的行为策略，从 Z 到 $\bar{x}^k$ 的距离的下极限一定严格为正。此时，我们说集 Z 是局中人1**可排斥的**（excludable）。这样一来，布莱克韦尔可接近性定理断言，$\mathbf{R}^\Theta$ 中任一闭凸子集要么是局中人1可排斥的，要么是局中人2可接近的。（显而易见，一个集不可能既是局中人1可排斥的，又是局中人2可接近的！）

利用布莱克韦尔的可接近性定理，我们可以勾勒一下对定理7.3余下的证明。由于 $w_1^*(\cdot)$ 是一个凹函数，故 $\mathbf{R}^\Theta$ 中存在某向量 z 使得

$$\sum_{\theta\in\Theta}Q(\theta)z_\theta = w_1^*(Q)，且\ \sum_{\theta\in\Theta}q(\theta)z_\theta \geqslant w_1^*(q)，\quad \forall q\in\Delta(\Theta)$$

即 z 是 $\Delta(\Theta)$ 上一个线性函数的系数向量，而这个线性函数在 Q 处是与 $w_1^*(\cdot)$ 相切的，令 $z=\{y\in\mathbf{R}^\Theta \mid y_\theta\leqslant z_\theta，\ \forall\theta\in\Theta\}$。

现在我们来证明这个集 Z 满足定理7.4的前提，从而是局中人2可接近的。若 q 具有任何负分量，则前提中的上确界是 $+\infty$，故不等式对任何 ρ_2 显然是成立的。若 q 是零向量，则由于不等式的两边都是0，显然也是成立的。对于任一非负向量 q，由于不等式的两边都线性于 q，故不等式成立的充要条件是它对属于 $\Delta(\Theta)$ 的 $(1/\sum_{\theta\in\Theta}q_\theta)\,q$ 成立。但是，若 q 是 $\Delta(\Theta)$ 中的某个向量，则有

$$\begin{aligned}\sup_{y\in Z}\sum_{\theta\in\Theta}q_{(\theta)}y_\theta &= \sum_{\theta\in\Theta}q(\theta)z_\theta \geqslant w_1^*(q)\geqslant w_1(q)\\ &= \min_{\rho_2\in\Delta(D_2)}\max_{\rho_1\in\Delta(D_1)}\sum_{\theta\in\Theta}q(\theta)u_1(\rho_1,\rho_2,\theta)\end{aligned}$$

所以，此集 Z 满足了定理7.4的前提。

现在，为看出为什么局中人1不可能指望会做到长期明显地好于 $w_1^*(Q)$，假定局中人2使用接近集 Z 的策略。那么，当 k 趋于无穷大时，每个 $\bar{x}_\theta^k$ 的上极限一定以概率1小于或等于 z_θ。因此（利用支付是有界的这一事实，故无穷小概率事件在任何状态都不可能显著地影响期望支付），当 k 趋向于无穷大时，$\sum_{\theta\in\Theta}Q(\theta)\bar{x}_\theta^k$ 期望值的上极限一定小于或等于 $\sum_{\theta\in\Theta}Q(\theta)z_\theta = w_1^*(Q)$。

7.10　连续时间

尽管真正的物理时间看上去是一个连续变量，但几乎所有易处理的博弈论 361
模型都假定局中人只能在某个离散可数的时点序列上决策。

为了能在初等水平上看出为什么连续时间模型难于对付，考虑定义重复囚徒困境博弈连续时间型这一朴实的尝试。对于每个非负实数 t，每个局中人 i 必须在时刻 t 决定此时是慷慨（g_i）还是自私（f_i）。令 $e_i(t)$ 表示局中人 i 在时刻 t 所选择的行动。每个局中人都知道过去的所有行动，故局中人 i 可以执行一个策略，其中 $e_i(t)$ 是过去行动历史 $\{(e_1(s), e_2(s))\}_{0\leqslant s<t}$ 的某个函数（可能是随机函数）。每个局中人的目标就是最大化其在每个时点所得到支付之积分的平均值，譬如说

$$\int_0^\infty \delta^t u_i(e_1(t), e_2(t))dt$$

其中 $0<\delta\leqslant 1$。

这个模型看似一个定义完好的博弈，但事实上并非如此。一方面，如果行动历史有太多的间断，这个积分则有可能没有定义。因而某些会产生太多间断点的策略，如“在每个时点都在慷慨与自私之间独立地各以概率 1/2 随机选择”，便要被排除在外。

但即使是那些看来能保证支付路径可积的策略，也还存在着其他深层次的问题。举例来说，考虑策略“除非在过去存在某个正长度区间且对方在此区间是自私的而选择自私之外，其他情况下都选择慷慨”。执行这样一个策略的局中人至多只能有一次改变其行动，并且在其他所有时点处，他的行动连续地依赖于时间。但他将何时改变其行动呢？假定两个局中人都决定执行这个策略。令 K 是任一非负数，并考虑结果路径

$$\begin{aligned}(e_1(t), e_2(t)) &= (g_1, g_2) \quad \text{若} \quad t\leqslant K\\ (e_1(t), e_2(t)) &= (f_1, f_2) \quad \text{若} \quad t>K\end{aligned}$$

在任一时点，给定过去行动历史，每个局中人要选择由这个策略设计的行动。 362
因而，对于任何一个 K，这样一个结果路径看来是策略的一个协调实现。但问题是，在连续时间中，局中人可以从慷慨变为自私，而无需某个初始时点。为了有一个完好定义的博弈，要么我们必须不管怎么样限制一下每个局中人的可能策略集，以排除一些类似于这样的策略，要么我们必须找到一个更成熟的规则以对所有的可能策略组合确定实现结果的路径。二者中的任何一种方式，

看起来都是一个困难的研究问题[关于这个方面的近期工作，可参见安德森(Anderson，1983)；富登伯格和泰罗尔（1984)；卡莱和斯坦福（Stanford，1985)；西蒙（1987)；西蒙和斯廷奇库姆（Stinchcombe，1989)；以及伯金(Bergin，1987)]。

因此，博弈论的一般方法是针对离散时间模型进行研究。也就是说，我们把连续时间划分成区间的可数序列，每个区间称为一个“回合”（或“周期”或“阶段”)，并且假定每个局中人都只能在一个回合的开始处选择一个新的行动。如果一个回合的时间长度选取得近似于每个局中人对新信息做出反应并改变其行为所需要的时间长度，那这样一个模型或许能合理地描述一个实际的局势。然而，至于局中人能够快速思考并迅速做出反应的情况，我们关心的是在每个回合的长度趋于0时的极限。

西蒙和斯廷奇库姆（1989）探索了这样一个问题：这种短周期的离散时间模型是否有可能产生在真实的连续时间世界里并不存在的人为现象。例如，考虑下述的两人博弈。每个局中人必须决定他在 $\mathbf{R}_+$ 中的什么时间进入一个新市场。如果一个局中人在时间 t 第一个进入市场，那他得到的支付为 δ^t；如果对方在时间 t 第一个进入市场，则对未进入市场的局中人的支付为 $-2\delta^t$；而如果两个局中人在时间 t 同时进入市场，各自的支付均为 $-3\delta^t$，其中 $0<\delta<1$。我们可以用一个离散时间模型来描述这个博弈，其中每个回合的长度都是某个小正数 ε，故回合 k 将开始于“真实”时间 $\varepsilon(k-1)$。在每个回合开始之际，当每个局中人都在决定是否立即进入时，假设每个局中人都知道两个局中人在过去所有回合的（进入与否的）决策。

考虑下述局方案，它是此博弈离散时间模型的一个子博弈完美均衡。局中人
363 1计划在回合1进入，而局中人2计划在回合1不进入。如果局中人1在回合1未进入，那局中人2将在回合2进入而局中人1在回合2将不进入。类似地，在随后的每一回合，只要以前尚无人进入，如果回合数为奇数，则局中人1进入而2不进入；如果回合数为偶数，则局中人2进入而局中人1不进入。在这个均衡中，局中人1害怕若他不在时间0（回合1）进入，则局中人2将在随后的第一个机会（回合2，时间 ε）进入，故局中人1不会在时间0耽搁他的进入。类似地，在局中人1在时间0不进入之后，局中人2也不会耽搁她的进入，因为若她在时间0之后的第一次机会不进入，则局中人1在此后他的第一次机会肯定进入。然而，值得注意的是，这个均衡的逻辑在本质上依赖于人为的假设，即时间是被划分成离散的回合。在连续时间中，不存在对方不进入之后而进入的“第一次机会”。因而，我们有时可能想仔细检查一个我们离散时间模型的某些均衡，看看他们是否确实对应着在连续时间中也有意义的行为。

此博弈的离散时间模型也具有对称的平稳子博弈完美均衡，其中两个局中人在每个回合都在进入与不进入之间随机化，直至有人进入。为了计算这些，令 q 表示在无人进入时，每个局中人在任一回合进入的概率。在回合 k，如果

从前无人进入且预期局中人 2 会使用这个策略，那局中人 1 将会在第 k 回合（时间 $\varepsilon(k-1)$）进入与第 $k+1$ 回合（时间 εk）进入之间无差异的充要条件是

$$q(-3\delta^{\varepsilon(k-1)})+(1-q)\{-\delta^{\varepsilon(k-1)}\}=$$
$$q(-2\delta^{\varepsilon(k-1)})+(1-q)q(-3\delta^{\varepsilon k})+(1-q)^2(-\delta^{\varepsilon k})$$

这个二次方程有两个根

$$q=\frac{\delta^{\varepsilon}\pm(\delta^{2\varepsilon}+8\delta^{\varepsilon}-8)^{1/2}}{4}$$

当 ε 很小时，这两个根都在区间 0 至 1 内。

现在考虑这两个根中较大者所对应的均衡。当 ε 趋于 0 时，q 收敛于 1/2。即在每个回合，如果以前没有一个局中人已进入，则每个局中人都计划独立地以接近于 1/2 的概率进入这个新市场。在尚无人已进入市场的每个回合，下述 4 个事件都有近似于 1/4 的概率：局中人 1 单独进入，局中人 2 单独进入，两个局中人都进入，以及两个局中人都没有进入。对于任一时间 $t>0$，时间 t 之前还没有人进入这个新市场的概率近似等于 $(1/4)^{t/\varepsilon}$（因为在 t 之前大约有 t/ε 个回合），这个概率在 $t\to 0$ 和 $q\to 1/2$ 时趋向于 0。因此，在真正的时间中，这个均衡结果的极限是某个人在（或无限接近于）时间 0 肯定要进入新市场，且下述 3 个事件是同等可能的：局中人 1 首先单独进入，局中人 2 首先单独进入，以及两个局中人同时第一个进入。这就是说，在极限中，每个局中人在时间 0 以边缘概率 2/3 进入，而两个局中人同在时间 0 进入的概率是 1/3。由于 $1/3\neq(2/3)^2$，故似乎需要局中人在时间 0 的行为有相关关系；但是，我们已经看到，事实上这是一个离散时间模型中的行为极限，其中给定局中人共享关于过去行动的信息这个前提，局中人在每个时点都是独立行动的。如此看来，如果我们研究连续时间模型，假定局中人的行为策略在每个时点都必须随机独立可能不太适当，即使局中人之间不存在通信，亦是如此。 364

7.11　重复博弈的进化模拟

阿克塞尔罗德（1984）在其有关进化模拟的研究中应用了重复囚徒困境博弈的一个变型，我们在 3.7 节中曾讨论过进化模拟。在他的结论中，针锋相对策略比几乎任何一个其他策略都有更大的长期繁殖成功率。这一结论与克雷普斯、米尔格龙、罗伯茨和威尔逊（1982）关于有限重复囚徒困境博弈中针锋相对的策略有吸引力的结论，有着惊人的性质上的相似之处。基于其模拟实验，阿克塞尔罗德认为，在许多社会和生态系统中，有望逐渐形成合作互惠的行为。

当然，很难知道是否存在其他的初始分布，会在像阿克塞尔罗德所研究的进化模拟中，支持另外的某个策略。3.7 节中所定义的抵制（resistance）这一概念提供了推导并检验这种结论的另一种方法。例如，借助于 δ－贴现平均支付准则，考虑表 7－1 给出的重复囚徒困境博弈形式。让我们将两个局中人都使用针锋相对的均衡与两个局中人都总是自私的均衡加以比较。在针锋相对均衡中，两个人都得到 δ－贴现平均支付 5[①]。在总是自私的均衡中，两个局中人
365 都得到 δ 贴现平均支付 1。当一个局中人使用针锋相对策略而另一个局中人使用总是自私的策略时，他们的 δ－贴现平均支付分别是 δ 和 6－5δ。总是自私的均衡对针锋相对的抑制是最大的数 λ 使得

$$(1-\lambda)(1)+\lambda(6-5\delta)\geqslant(1-\lambda)(\delta)+\lambda(5)^{②}$$

这个 λ 是 $(1-\delta)/4\delta$[③]，在 δ 接近 1 时，λ 趋于 0。也就是说，在一个具有相当长期的贴现平均准则的囚徒困境博弈中，总是自私的均衡对针锋相对策略的抵制几乎为 0，但针锋相对均衡对总是自私策略的抵制几乎为 1。

不过，这些结论可以推广到其他重复博弈的程度并不清楚。从 7.4 节回顾那个具有 δ－贴现平均支付准则的重复斗鸡博弈（表 7－3 中），可以证明，当 δ 趋于 1 时，这个博弈（非常好战的）q－阵地均衡对针锋相对（或扯平）策略的抵制收敛于 4/11，而不是 0。因此，在个体进行重复斗鸡而不是重复囚徒困境博弈的一个生态系统中，针锋相对的合作的进化可能要困难一些。

习 题

7.1 考虑一个具有完全状态信息的重复博弈，其局中人集、可能的自然状态集和每个局中人的可能行动集都是有限集。试用不动点理论证明存在一个平稳均衡 τ 和一个值向量 v 满足条件（7.2）和（7.3）。

7.2 考虑一个具有标准信息的重复博弈，其中每个局中人对某个接近但小于 1 的 δ 最大化其期望 δ－贴现平均支付。每个回合的支付与局中人行动的依赖关系如表 7－9 所示。考虑下述局方案。在第一个回合，或前一个回合的结果是 (x_1, x_2) 或 (y_1, y_2) 的每个回合，局中人独立地随机选择行动，每个局中人 i 都以概率 q 选择 y_i 或以概率 $1-q$ 选择 x_i。而在前一个回合的结果是

① 原文误为 4——译者注。

② 原文 λ (5) 误为 λ (4) ——译者注。

③ 原文 λ (5) 误为 λ (4)，推出的 λ 也相应误为 (1－δ) / (4δ－1) ——译者注。

(x_1, y_2) 的每一个回合，局中人选择 y_1 和 x_2；在前一个回合的结果是 (y_1, x_2) 的每个回合，局中人选择 x_1 和 y_2。 366

表 7-9　一个重复博弈中，对于所有行动组合，每个回合的支付

	D_2	
D_1	x_2	y_2
x_1	2, 2	0, 6
y_1	6, 0	1, 1

写出决定这样概率 q 的一个方程组，使得一旦给定 δ，只要 δ 不是太小，则这个局方案便是一个子博弈完美均衡。证明这些方程在 $q = .664183$ 和 $\delta = .9$ 时有一个解。使得由这些方程决定的 q 能成为一个子博弈完美均衡的最小贴现因子 δ 是多少？

7.3　对表 7-5 中所描述的具有标准信息的重复博弈，在贴现因子 $\delta = .99$ 下构造一个子博弈完美均衡，其中在博弈开始时，对每个局中人的期望贴现平均支付近似于 1.0007009118 或更小。

7.4　（一个**消耗战**博弈）位于同一街区的两个食品杂货店正经受着半哩远处新建成的一个超级市场的影响。只要两个店都保持营业，则每个店每月将亏损 1000 美元。在每个月的第一天，也是店铺要交纳月租金的时候，每个仍在营业的店主必须独立地决定是继续营业一个月还是停业。如果一个店主停业，那继续营业的店主此后每个月仍有 500 美元的利润。假设一旦一个店主停止营业，那他或她的租契将被另外某个商人（但不经营食品杂货）取得，所以，即使另一个店主也停业，他或她也不再可能在这个街区重新开一个食品杂货店。每个店主都希望使他或她每月利润的期望贴现平均值最大，而每月贴现因子是 $\delta = .99$。

a. 找出此局势的一个均衡，其中两个店主每月都在营业与停业之间随机化，直至至少有一个店主停业。 367

b. 根据这个博弈的其他均衡，讨论店主可能处理这个局势的另一种方法。

c. 现在假设店主 1 比店主 2 的店铺稍大一些。只要两个店都继续营业，店主 1 每月亏损 1200 美元，而店主 2 每月亏损 900 美元。如果店主 1 拥有该街区唯一的一家食品杂货店，那他每月可赚到 700 美元的利润。如果店主 2 拥有该街区唯一的一家食品杂货店，那她每月可赚到 400 美元的利润。找出此局势的一个均衡，其中两个店主每个月都在营业与停业之间随机化，直至某个店主确实退出。在这个均衡中，哪个店主更有可能首先退出？

7.5 考虑一个具有不完全信息的两人零和博弈，其中支付与行动和状态之间的依赖关系示于表 7－10 中。令 q 表示状态为 α 的概率。

表 7－10　在一个不完全信息下的重复博弈中，对所有的行动组合和自然状态，每个回合的支付

状态 $=\alpha$

	D_2	
D_1	a_2	b_2
a_1	2，－2	0，0
b_1	2，－2	1，－1

续表 7－10

状态 $=\beta$

	D_2	
D_1	a_2	b_2
a_1	0，0	1，－1
b_1	0，0	0，0

a. 首先假设这个博弈只进行一次，没有一个局中人知道状态，且两人都认同状态为 α 的概率是 q。作为参数 q 的一个函数，画出一个曲线图来表示局中人 1 在均衡中的期望支付 $w_1(q)$。

368 b. 在图上做出你刚才在（a）中所画出的 w_1 的凹包 w_1^*。验证 $w_1^*(1/2)=3/4>w_1(1/2)$。

c. 现在来考虑一个无限重复博弈，其中每个回合具有相同的自然状态，两个可能的自然状态各有 1/2 的概率成为实际的自然状态。假设只有局中人 1 能在博弈开始时观察到自然状态。局中人 2 观察局中人 1 的行动，但不能直接观察到状态或任何依赖于状态的支付（假定局中人 2 的支付进入全权信托）。为局中人 1 描述一个策略，不论局中人 2 可能会使用什么策略，它都能保证局中人 1 在每个回合的事前期望支付将至少是 3/4。（在博弈开始时决定的自然状态确定下来之前所预估出来的期望值被称为事前期望值。）

7.6 令 $u_2: D_1\times D_2\to\mathbf{R}$ 表示在一个具有标准信息的两人重复博弈中的每个回合对局中人 2 的支付函数。这里，对每个局中人 i，D_i 是局中人 i 在每个回合的有限可能行动集。假设 $0\notin D_1$。令 $\mathbf{\Theta}=D_1\cup\{0\}$，又令

$$Z = \left\{ y \in \mathbf{R}^{\Theta} \mid y_0 \geqslant \sum_{\theta \in D_1} y_\theta u_2(\theta, c_2), \forall c_2 \in D_2 \right\}$$

对于 $D_1 \times D_2$ 中任一 (c_1, c_2) 和 Θ 中任一 θ，令

$$\begin{aligned} w_\theta(c_1, c_2) &= 1 && \text{若 } \theta = c_1 \\ &= 0 && \text{若 } \theta \in D_1 \quad \text{但} \quad \theta \neq c_1 \\ &= u_2(c_1, c_2) && \text{若 } \theta = 0 \end{aligned}$$

我们可以写成 $w(c_1, c_2) = (w_\theta(c_1, c_2))_{\theta \in \Theta}$。在进行这个重复博弈时，令 $\bar{d}_i^k$ 表示局中人 i 在回合 k 实际选择的行动，又令

$$\bar{x}^k = \frac{\sum_{m=1}^{k} w(\bar{d}_1^m, \bar{d}_2^m)}{k}$$

a. 证明：若 $\bar{x}^k \in Z$，则

$$\sum_{m=1}^{k} u_2(\bar{d}_1^m, \bar{d}_2^m) \geqslant \sum_{m=1}^{k} u_2(\bar{d}_1^m, c_2), \forall c_2 \in D_2.$$

b. 证明：对 $\Delta(D_1)$ 中任一 ρ_1，$\Delta(D_2)$ 中都存在某个 ρ_2 使得 $w(\rho_1, \rho_2) \in Z$，其中 369

$$w(\rho_1, \rho_2) = \sum_{c_1 \in D_1} \sum_{c_2 \in D_2} \rho_1(c_1)\rho_2(c_2)w(c_1, c_2)$$

c. 证明：对 $\mathbf{R}^{\Theta}$ 中的任一 q，均有

$$\min_{\rho_2 \in \Delta(D_2)} \max_{\rho_1 \in \Delta(D_1)} \sum_{\theta \in \Theta} q_\theta w_\theta(\rho_1, \rho_2) \leqslant \sup_{y \in Z} \sum_{\theta \in \Theta} q_\theta y_\theta,$$

且由定理 7.4 知 Z 是局中人 2 可接近的。于是，局中人 2 可以保证其平均支付的极限不会低于她在事先知道局中人 1 每个行动相对频率时所能得到的最优支付值。[提示：利用 (b) 和定理 3.2。也可参见卢斯和雷费，1957，p.481—483。]

8

两人博弈的讨价还价与合作

8.1 合作博弈理论的非合作基础

合作概念在博弈论中是重要的，然而又多少有点难以捉摸。合作 370
(cooperation) 一词意即“为共同的目的而一起行动”。我们可以假设，对于由两个或两个以上为共同目的而一起行动的个人所组成的一个联盟来说，个人不得不置其各自的效用函数于不顾，而创造某个全新的、用于决定他们集体行为的集体效用函数。然而，这样的一个概念方法看来难以把握，因为我们在博弈论中真正必须把握的是，我们关于每个局中人都是一个智能而又理性的决策者这一假定，而决策者的行为最终是从最大化其个人期望效用支付的目标导出的。因此，我们需要那种不放弃博弈论的个人决策论基础的合作行为模型。

纳什（1951）提出，研究局中人之间的合作，可利用纳什均衡这同一基本概念，而纳什均衡构成了我们在前几章所研究的非合作博弈理论所有领域的基础。他认为合作行动是“合作的”局中人之间某种讨价还价过程的结果，并且在这个讨价还价过程中，可以预期每个局中人都应该按照某个讨价还价策略来行动，以满足个人效用最大化的准则，就像在任何其他的博弈局势中一样。也就是说，在任何真实的局势中，如果我们仔细地考察人们为达成一个联合合作策略的协议而能做些什么的话，那么在原则上，我们就应该有可能把它模型化为一个展开型（或策略型，或贝叶斯型）博弈，然后通过分析这个博弈的均衡集来预测结果。 371

我们可以定义一个**合作变换**（cooperative transformation）为任一映射 Ψ，使得如果 Γ 是一个博弈（展开型、策略型或贝叶斯型），则 $\Psi(\Gamma)$ 为另一个博弈（或许更为复杂，但仍为展开型、策略型或贝叶斯型），在其所表示的局势中，每个局中人除了有 Γ 中明确的、给定策略选择之外，还有与其余局中人就联合计划合作策略而讨价还价的广泛选择自由。这一思想曾在第 6 章有所介绍，在那里，我们通过增加局中人签订合同或通信的选择自由讨论了变换一个博弈的概念。在那些个人选择自由的自然结构只能导致所有局中人都不好的均衡的局势中（如囚徒困境），局中人或许有一种强烈的动机，试图通过增加通

信或签订合同来改变博弈结构，当然通信或签订合同会给每个局中人对其余局中人自然决策域有某种程度的控制。这种合作变换可以把像囚徒困境或表 6－1 所示的博弈那样具有不如意均衡的博弈改变为具有对所有局中人都更好的均衡的博弈，就像表 6－2 和 6－3 所示的博弈一样。合作博弈理论的**纳什方案**（Nash' s program）是定义合作解概念，使得对于任一给定的博弈，一个合作解就是该博弈的某种合作变换的一个纳什均衡。

不幸的是，有充分理由相信，如果我们对局中人在相互讨价还价或签订合同时所能做的一切详加描述，那我们将得到一个均衡集很大的博弈；故纳什方案本身也不可能决定唯一的一个合作解。事实上，我们在 6.1 节中已经看到，任何一个个人理性的相关策略都是其中所有可能合同（正如 6.1 节数学上所定义的那样）对局中人都可用的一个合同签约博弈的均衡结果。因此，为得到更坚实的合作解概念，就需要某种**合作均衡选择**（cooperative equilibrium selection）理论。

回顾 3.5 节，对一个博弈中出现多重均衡问题的一般反应是谢林（1960）的焦点效应。该理论认为，在一个具有多重均衡的博弈中，任何以一种能被共同意识到的方式使局中人的注意力趋向聚集于某特定均衡的事物，都趋向于使
372 这个均衡成为众望所归并因而实际执行之。各种可能因素，包括环境因素和文化传统（这超出了数学博弈理论分析的范围）、各种均衡特殊的数学性质以及局中人或局外仲裁人的局前陈述等，其中任何一个都能决定焦点均衡。对博弈中的局中人能**有效合作**（cooperate effectively）这一假定，一种可能的解释是，他们可以利用局前通信，把他们的期待协调到一个对其某些或全部人都有较好福利性质的焦点均衡。因此，合作博弈理论的基础至少部分地依赖于决定具有多重均衡的博弈中焦点均衡的仲裁、谈判及福利性质的作用。

回顾一个焦点仲裁人是一个博弈中，能通过向局中人公开建议他们全部应该执行某个均衡而使其决定成为焦点均衡的人。例如，在性别之战博弈（表 3－5）中，一个仲裁人可能会宣布："基于多方面的考虑，包括掷一枚硬币在内，我已决定主张均衡（s_1，s_2）。我要求你们都执行它。"尽管这一建议未必具有约束力，但如果每个局中人都相信其余每个局中人将接受仲裁人的建议，那么只要仲裁人的建议是一个均衡，则每个局中人都会发现按照仲裁人所建议的那样去做是最好的。为了成为一个有效的仲裁人，此人必须在博弈之前，有能力用某种大家全都理解而又丰富到足以描述任何均衡的语言与所有局中人通信。此外，还由于此人的声誉和权威，所有局中人都将倾听并聚焦于他所宣布的任何均衡，这必须是局中人中间的共同知识。（例如，在夫妻之间的性别之战博弈中，岳父或许在很多局势中处于很好的仲裁人地位。）

一个不偏袒的仲裁人应该尽量把他的选择基于某种客观原则之上。因此，在任一给定的博弈中，如果一个理想无偏见的仲裁人之选择应该基于对称地对待局中人的原则上，而且又只应取决于与决策论有关的博弈结构（因而对两个

在某种意义上是决策论等价的博弈，他将选择相同的均衡，正如我们在 2.3 节中所讨论的那样），那我们要问，他将选择怎样的均衡呢？也就是说，我们要尝试研制博弈的**无偏见仲裁人**（impartial arbitration）的规范理论。

例如，回顾（3.5 节的）**分摊美元**博弈，其中有两个局中人，每人都可以 373
要求某个数量的货币。如果两人所要求的货币量之和不超过 100 美元，则每人都将得到他所要求的货币量；但如果所要求的货币量之和严格大于 100 美元，则每人得到 0 美元。此博弈具有无限多个均衡，但一个无偏见的仲裁人可能会建议局中人执行（50，50）这个均衡，因为此均衡不仅帕累托有效，且对两个局中人甚为公平。但这一事实可以使（50，50）成为局中人所预期并予以实施的焦点均衡，甚至在这样一个无偏见仲裁人实际上并未出现时亦将如此，也就是说，由于两个局中人都知道（50，50）是一个有效而又公平的均衡，且一个无偏见的仲裁人将最有可能建议这个均衡，所以即使不存在仲裁人，（50，50）也具有强有力的内在聚焦性质。一般地，只要局中人能识别一个唯一的均衡将被无偏见的仲裁人所选用，那么这个均衡就会成为焦点均衡，这只是因为该均衡具有这个特殊性质。也就是说，不管是否有仲裁人，**公平**和**效率**的福利性质可以在任何博弈中决定焦点均衡。

如果博弈中的一个局中人本身就是焦点仲裁人，那我们就称其为此博弈的**委托人**（principal）。如果一个局中人是一个完全信息博弈中的委托人，则焦点均衡将是一个给与他最高可能期望支付的均衡。例如，在性别之战博弈中，若局中人 1 是委托人，显然，他将简单地向局中人 2 宣布，他打算选择 f_1 并希望她选择 f_2。

另一种决定焦点均衡的可能性是，通过局中人之间的某种局前通信过程，使其中两个或两个以上的局中人有某种机会声明他们喜欢哪一个均衡。博弈局中人之间任何一种影响到焦点均衡选择的局前通信过程都可被称为**焦点谈判**（focals negotiation）。

建立焦点谈判的正规模型看起来是个非常困难的问题。在性别之战博弈开始前的某个时候，如果局中人 1 有机会对局中人 2 说："我认为我们应该实施（f_1，f_2）均衡"，则此局势可用一个展开型博弈加以描述，在这个博弈中，他说这句话的机会可用在早期某个决策结点处的一个显性行动来表示。但是，任一这种博弈模型都将具有泄露均衡（就像在 3.5 和 6.2 节中所讨论过的那样），其中这些声明都被忽略，且每个局中人 i 最终仍按照原博弈的某个均衡（甚至按照帕累托 374
劣随机策略）在 $\{f_i, s_i\}$ 中做出其选择，且独立于任何人的谈判声明。因此，在焦点谈判或仲裁中，局前声明的有效性只能从某个（合作）假定推导出来，以排除这些泄露均衡，而这一假定又超出了均衡的基本定义。法雷尔（1988）和迈尔森（1989）已经提出，通过假定谈判或仲裁声明具有共同理解的文字意义，并且通过了某种可靠性检验的任何声明都应该按其文字意义来解释，这种有效性就能被纳入我们的分析之中。不过，这种假定在技术上十分复杂，并且只能用于对每个局中人何时可做出谈判声明都详加规定的模型中。

奠定博弈谈判结果的理论基础，而又无需对谈判细节模型化的方法之一是，利用我们称之为**公平假设**（equity hypothesis）的下述假定：

> 局中人具有平等机会参与的有效谈判的结果，应该与一个知道局中人在谈判期间的共同知识的无偏见仲裁人所做的推荐相一致。

即，按照公平假设，在局中人具有同等谈判能力的合作博弈中，一种实证理论所做出的预测，应该与无偏见仲裁人的一种规范理论所给出的处方相一致。

我们来辨明公平假设的合理性如下。一方面，如果局中人在没有仲裁人时通过谈判所能得到的结果已知，那么，一个无偏见的仲裁人不应该使局中人转向对某些局中人可能比此结果更差的一个结局。一个在仲裁中比在公平谈判中情况更差的局中人对仲裁人具有无可非议的抱怨之词。另一方面，如果一个无偏见的仲裁人所推荐的均衡显而易见，那么谈判中最有说服力的论证可以决定这个均衡。费希尔和尤里（Fisher and Ury，1981）劝告谈判者，基于客观而又公正的标准之上的论证在真正的谈判中最为有效。于是，我们可以预期在我们关于无偏见仲裁与对称有效谈判的理论之间有着密切联系或等价性。在谈判
375 中，正如在仲裁中一样，一个焦点均衡可以在诸如公平与效率之类的福利性质的基础上予以决定或选择。

由于我们尚未对一般博弈严格定义“对称有效谈判”和“无偏见仲裁”，所以这个公平假设现在还不能被表述为一个规范的定理，它只是对这两个我们要阐述的直观概念之间的关系加以判断。公平假设的功效来源于这样的一个事实，它使我们能将对一个概念所做的任何限制施加于另一个概念之上。在分摊美元博弈的情形中，我们意识到，我们了解一个无偏见的仲裁人应该怎么做，故公平假设意味着，在博弈进行之前，若给局中人广泛的机会让他们相互在公平的基础上进行谈判，则他们应该倾向于聚焦到均衡（50，50）上。（因而，当这个博弈由实验对象在实验室进行时，为说明该理论的一滚可检验含义，我们可以预言，相对于局中人没有局前通信的情况而言，局前通信应该减少实现结果中的观测变动。）

8.2 两人讨价还价问题和纳什讨价还价解

许多讨价还价理论都是步纳什的后尘，受到了其引人注目而又具开创性的著作（1950，1953）的影响。纳什对两人讨价还价问题的阐述基于以下的隐含假定。当两个局中人谈判或一个仲裁人进行仲裁时，这两人最终得到的支付配置应该只取决于他们在谈判或仲裁不能达成和解时所期望的支付及在谈判或仲裁过程中对两人来说联合可行的支付配置集。为辨明这一假定的合理性，须注

意到公平的概念（在“我从我们的协议中所得收益应与你从中所得的相称”的意义上）通常涉及到与个人在没有协议时所得收益相比较，而效率的概念一般只涉及到与其他可行配置之间的比较。

于是，我们定义一个**两人讨价还价问题**（two-person bargaining problem）是由偶 (F, v) 组成的，其中 F 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个闭凸子集，$v=(v_1, v_2)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个向量，且集

$$F\cap\{(x_1, x_2)\mid x_1\geqslant v_1 \text{ 和 } x_2\geqslant v_2\} \tag{376}$$

是非空有界的。这里，F 是表示**可行支付配置集**（set of feasible payoff allocations）或**可行集**（feasible set），而 v 表示**不一致同意支付配置**（disagreement payoff allocation）或**不一致同意点**（disagreement point）。F 是凸集的假定可以通过假定局中人能同意联合随机策略而加以证实，因而，如果效用配置 $x=(x_1, x_2)$ 和 $y=(y_1, y_2)$ 是可行的，且 $0\leqslant\theta\leqslant1$，则期望效用配置 $\theta x+(1-\theta)y$ 可通过计划以概率 θ 实施 x 而以概率 $1-\theta$ 实施 y 得以实现。F 的闭性是一个自然的拓扑要求。非空性和有界性条件说明，存在某个可行配置对两个局中人来说至少与不一致同意点一样好，但不可能出现超过不一致同意点的无界收益。当且仅当 F 中至少存在一个配置 y 对两个局中人来说都严格好于不一致同意配置 v（即 $y_1>v_1$ 且 $y_2>v_2$）时，我们才称这个两人讨价还价问题 (F, v) 是**实质上的**（essential）。

为了解释这些结构，我们需要能在某给定的两人策略型博弈 $\Gamma=(\{1, 2\}, C_1, C_2, u_1, u_2)$ 的背景下详尽规定如何推导出这些结构。根据局中人的策略能否有具有约束力的合同加以限制，我们可以提出 F 的两种可能性。如果这种合同是可能有的，则我们应该令

$$F=\{(u_1(\mu), u_2(\mu))\mid \mu\in\Delta(C)\}$$

其中

$$u_i(\mu)=\sum_{c\in C}\mu(c)u_i(c) \tag{8.1}$$

如果在此博弈中存在道德风险，故策略不能由合同来限制，则我们应该令

$$F=\{(u_1(\mu), u_2(\mu))\mid \mu \text{ 是 } \Gamma \text{ 的一个相关均衡}\} \tag{8.2}$$

为了决定不一致同意点，有 3 种可能的选择。一是令 v_i 为局中人 i 的最小化最大值，故

$$v_1=\min_{\sigma_2\in\Delta(C_2)}\max_{\sigma_1\in\Delta(C_1)}u_1(\sigma_1, \sigma_2)$$

及

$$v_2=\min_{\sigma_1\in\Delta(C_1)}\max_{\sigma_2\in\Delta(C_2)}u_2(\sigma_1, \sigma_2)$$

另一种可能性是令 (σ_1, σ_2) 为 Γ 的某个焦点均衡，并对每个局中人 i 都设 $v_i=u_i(\sigma_1, \sigma_2)$。第 3 种可能性是从某种“理性威胁”中导出 v，而“理性威胁”的概念将在 8.5 节中定义，那时我们还将讨论，在任一给定局势中，决定

哪种方法导出 v 最有意义的一些准则。

377 对于任一这样的两人讨价还价问题 (F, v)，谈判或仲裁的一个综合理论将理想地允许我们识别出 $\mathbf{R}^2$ 中的某个配置向量，我们记之为 $\phi(F, v)$，作为在 F 为可行配置集且 v 是不一致同意配置的局势下谈判或仲裁的结果而被选择出来。从而，我们研制谈判或仲裁理论的问题可以被认为是寻找某个适当的解函数（solution function）ϕ 的问题，它把所有的两人讨价还价问题都映射成 $\mathbf{R}^2$ 中的支付配置集。

纳什公理化地探讨了这个问题。即，他形成了一个合理的讨价还价解函数所应该满足的一系列性质。

为了列出纳什的公理，我们令 $\phi_i(F, v)$ 表示 $\phi(F, v)$ 的第 i 个分量，故

$$\phi(F, v) = (\phi_1(F, v), \phi_2(F, v))$$

此外，对 $\mathbf{R}^2$ 中任意两个向量 x 和 y，我们可记

$x \geqslant y$ 当且仅当 $x_1 \geqslant y_1$ 且 $x_2 \geqslant y_2$

及 $x > y$ 当且仅当 $x_1 > y_1$ 且 $x_2 > y_2$

即，当且仅当两个向量中的每一对对应分量都满足一个不等式时，我们才能写出这两个向量之间的该不等式。现在，对任一两人讨价还价问题 (F, v)，纳什讨价还价解的公理可表述如下。

公理8.1（强有效性） $\phi(F, v)$ 是 F 中的一个配置，且对 F 中的任一 x，若 $x \geqslant \phi(F, v)$，则 $x = \phi(F, v)$。

公理8.2（个人理性） $\phi(F, v) \geqslant v$。

公理8.3（尺度协变性） 对任意 $\lambda_1 > 0$、$\lambda_2 > 0$、γ_1 及 γ_2，若

$$G = \{(\lambda_1 x_1 + \gamma_1, \lambda_2 x_2 + \gamma_2) \mid (x_1, x_2) \in F\}$$

且 $w = (\lambda_1 v_1 + \gamma_1, \lambda_2 v_2 + \gamma_2)$

则 $\phi(G, w) = (\lambda_1 \phi_1(F, v) + \gamma_1, \lambda_2 \phi_2(F, v) + \gamma_2)$

378 **公理8.4（不相干选择对象的无关性）*** 对任一闭凸集 G，若 $G \subseteq F$ 且 $\phi(F, v) \in G$，则 $\phi(G, v) = \phi(F, v)$。

公理8.5（对称性） 若 $v_1 = v_2$ 且 $\{(x_2, x_1) \mid (x_1, x_2) \in F\} = F$，则 $\phi_1(F, v) = \phi_2(F, v)$。

公理8.1表明，任一两人讨价还价问题的解都应该是可行的，且是帕累托

---

* 公理8.4也称为无关选择的独立性公理——译者注。

有效的，亦即不存在另外的可行配置会使一个局中人所得到的支付好于这个解，而另一个局中人所得到的支付又不差于这个解。一般地，给定一个可行集 F，我们称 F 中的一个点 x 是**强（帕累托）有效的**［strongly（Pareto）efficient］，其充要条件是 F 中不存在点 y，使得 $y \geqslant x$，且至少对一个局中人 i 有 $y_i > x_i$。与此相对照，我们又称 F 中的一个点 x 是**弱（帕累托）有效的**［weakly（Pareto）efficient］，其充要条件是 F 中不存在点 y，使得 $y > x$。

公理 8.2 表明，没有一个局中人会在讨价还价解中得到比其在不一致同意配置中所得到的支付更差的支付。我们说 F 中的一个配置 x 是个人理性的，其充要条件是 $x \geqslant v$。

公理 8.3 表明，如果一个两人讨价还价问题 (G, w)* 可通过递增的仿射效用变换从讨价还价问题 (F, v) 导出，而这个变换（按定理 1.3）将不会影响效用函数的任何决策论性质，因而 (G, w) 的解也应该能通过同样的变换从 (F, v) 的解导出。即，如果我们在构造一个用以表示某个现实局势的两个讨价还价问题时，改变了度量效用的方式，但保持我们新的效用尺度与原来的效用尺度在决策论上是等价的，那么，效用配置空间中的讨价还价解应该以同样的方式进行变化，以至它仍对应于同样的现实结果。

公理 8.4 表明，剔除那些不会被选取的可行的选择对象（不同于不一致同意点）不应该影响讨价还价解。如果仲裁人打算通过最大化社会收益的某个加总度量来选择一个解［故有 $|\phi(F, v)| = \operatorname{argmax}_{x \in F} M(x, v)$，其中 $M(x, v)$ 是他从选择配置 x 代替 v 所得到的社会收益的度量］，从而公理 8.4 将总被满足。

公理 8.5 表明，如果局中人 1 和 2 在讨价还价问题中的地位是完全对称的，那么解也应该对称地对待他们。

纳什的非凡结论是，恰好存在一个讨价还价解满足这些公理，我们称之为 379
纳什讨价还价解（Nash bargaining solution）。

定理8.1　*存在唯一的一个解函数 $\phi(\cdot, \cdot)$ 满足上述公理 8.1～8.5。对于每个讨价还价问题 (F, v)，这个解函数都满足*

$$\phi(F, v) \in \underset{x \in F, x \geqslant v}{\operatorname{argmax}} (x_1 - v_1)(x_2 - v_2)$$

证明　暂且，令 (F, v) 是任一实质上的两人讨价还价问题，故 F 中存在某个 y 使得 $y_1 > x_1$ 和 $y_2 > x_2$。

在 F 中所有满足 $x \geqslant v$ 的 x 中，令 x 是 F 中使函数 $(x_1 - v_1)(x_2 - v_2)$ 达到最大值的唯一一点，这个函数被称为**纳什积**（Nash product）。F 中使纳什积的值严格为正是有可能的，为实现这个严格正的值，这个点 x 必须满足 $x >$

---

* 原文把 (G, w) 误为 (G, v) ——译者注。

v。给定 F 和 v，由于最大化纳什积也就等价于最大化其对数，而其对数则是 x 的一个严格凹函数，故这个最大化点 x 是唯一的。

对每个 i，令 $\lambda_i = 1/(x_i - v_i)$ 和 $\gamma_i = -v_i/(x_i - v_i)$。定义一个函数 L：$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 使得

$$L(y) = (\lambda_1 y_1 + \gamma_1, \lambda_2 y_2 + \gamma_2)$$

再令 $G = \{L(y) \mid y \in F\}$。对 $\mathbf{R}^2$ 中任一 y，若 $z = L(y)$，则 $z_1 z_2 = \lambda_1\lambda_2 (y_1 - v_1)(y_2 - v_2)$，且 $\lambda_1\lambda_2$ 是一个正的常数。因此，由于 x 在 F 上最大化纳什积，所以 $L(x)$ 一定对 G 中所有 z 最大化积 $z_1 z_2$。但是 $L(x) = (1, 1)$，而双曲线 $\{z \in \mathbf{R}^2 \mid z_1 z_2 = 1\}$* 在点 $(1, 1)$ 处具有斜率 -1。从而斜率为 -1 且过点 $(1, 1)$ 的直线 $\{z \mid z_1 + z_2 = 2\}$ 一定在凸集 G 的上方并与之相切于 $(1, 1)$。令 $E = \{z \in \mathbf{R}^2 \mid z_1 + z_2 \leqslant 2\}$，则 $G \subseteq E$。

为满足公理 8.1 和 8.5（有效性和对称性），我们必须有

$$\phi\{E, (0, 0)\} = (1, 1)$$

然后，为满足公理 8.4（不相干选择对象的无关性），我们需要

$$\phi\{G, (0, 0)\} = (1, 1)$$

380 随后公理 8.3（尺度协变性）要求 $L(\phi(F, v)) = \phi\{G, (0, 0)\}$，故

$$\phi(F, v) = x$$

因此，为了满足这些公理，ϕ 必须在 F 的所有个人理性配置中选择那个最大化纳什积的配置。

现在，转而假设 (F, v) **是非实质上的**（unessential），即 F 中不存在点 y 使得 $y > v$。根据 F 的凸性，至少必有一个局中人 i，使得对于 F 中的每个 y，若 $y \geqslant v$，则 $y_i = v_i$。（如果我们能找到 F 中的 y 和 z 满足 $y \geqslant v$，$z \geqslant v$，$y_1 > v_1$ 及 $z_2 > v_2$，则 $.5y + .5z$ 将是 F 中的一个对两个局中人都严格好于 v 的点。）在 $x_i = v_i$ 的约束条件下，令 x 为 F 中对 i 以外的一局中人最好的配置。那么，这个向量 x 就是 F 中唯一强帕累托有效的点，且相对于 v 而言是个人理性的。于是，为了满足公理 8.1 和 8.2，我们必须有 $\phi(F, v) = x$。显然，在这个非实质上的讨价还价问题中，x 使纳什积达到了最大值，而这个最大值对所有人理性的配置都是 0。

我们就这样证明了，只有一个解函数 ϕ 能满足上述 5 个公理，且 ϕ 总是在所有可行的个人理性配置中选择唯一能最大化纳什积的强有效配置。余下要证明的只是这个解函数确实满足所有上述公理，这是一个易于验证的结论，故留作一个习题。 ■

---

* 原文误为 $\{z \in R^2, z_1 z_2 = 2\}$ ——译者注。

有效性公理的一个较弱的形式可表述如下。

公理8.1′（弱有效性）　$\phi(F, v) \in F$，且 F 中不存在任何 y，使得 $y > \phi(F, v)$。

在前面的证明中，将强有效性公理换成弱有效性公理，在一个实质上的两个讨价还价问题的情形下毫无分别。而且，个人理性公理在对实质上的情形的证明中也未被用到。于是，任何满足了公理 8.1′、8.3、8.4 及 8.5 的解函数，对所有实质上的两人讨价还价问题来说都一定与纳什讨价还价解相一致。

8.3　个人之间加权效用的比较

在现实的讨价还价局势中，人们时常要在个人之间做出效用比较，而他们 381
一般有两种不同的方法。一种方法是应用**均等收益**（equal gains）原理，就像一个人争辩时说："你应该为我做这个，因为我正在为你做更多。"对任一两人讨价还价问题 (F, v)，我们定义**平等主义解**（egalitarian solution）为 F 中唯一弱有效且满足如下均等收益条件的点 x：

$$x_1 - v_1 = x_2 - v_2$$

如果在谈判或仲裁中，个人由均等收益原则所引导，则结果将是平等主义解。

另一种在讨价还价中做出人与人之间比较的方法是应用最大利益（greatest good）原则，正如一个人争辩时说："你应该为我做这个，因为它带给我的好处比对你的伤害要多。"对任一两人讨价还价问题，我们定义**功利主义解**（utilitarian solution）为任一解函数，它对每个两人讨价还价问题 (F, v) 都选择配置 x 使得

$$x_1 + x_2 = \max_{y \in F} (y_1 + y_2)$$

如果在谈判或仲裁中，个人被最大利益原则所引导，则结果应该是一个功利主义解［这里，"功利主义"是在边沁和穆勒（Bentham and Mill）的经典意义上使用的。］

尺度协变性公理所基于的假定是，只有效用尺度的个人决策论性质才是紧要的，而个人之间的效用比较只要没有局中人被要求于他自己或另外某个人之中做出抉择，就不具有决策论上的重要性。因此，平等主义解与功利主义解违背尺度协变性公理应无足为奇。给定任意 λ_1，λ_2，γ_1 及 γ_2，使得 $\lambda_1 > 0$、$\lambda_2 > 0$，令

$$L(y) = (\lambda_1 y_1 + \gamma_1, \lambda_2 y_2 + \gamma_2), \quad \forall y \in \mathbf{R}^2$$

给定任一两人讨价还价问题 (F, v)，令

$$L(F) = \{L(y) \mid y \in F\}$$

382 于是 $\{L(F), L(v)\}$ 的平等主义解为 $L(x)$，其中 x 是 F 中唯一弱有效的点，且使得

$$\lambda_1 (x_1 - v_1) = \lambda_2 (x_2 - v_2)$$

我们称其为 (F, v) 的 **λ-平等主义解** (λ-egalitarian solution)。平等主义解不满足尺度协变性公理是因为 λ－平等主义解一般都不同于简单平等主义［或 $(1, 1)$ －平等主义］解。类似地，$\{L(F), L(v)\}$ 的功利主义解一定是某个点 $L(z)$，其中 z 是 F 中的一个点使得

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \max_{y \in F} (\lambda_1 y_1 + \lambda_1 y_2)$$

我们称这样的一个点 z 为 (F, v) 的 **λ-功利主义解** (λ－utilitarian solution)。功利主义解*不满足尺度协变性公理是因为 λ－功利主义解一般不同于简单功利主义［或 $(1, 1)$ －功利主义］解。

因此，为了适应尺度协变性，我们必须准许均等收益和最大利益原则各自表示了一族讨价还价解，即 λ－平等主义解和 λ－功利主义解。当不同局中人的支付是用某些 λ－**加权效用尺度** (λ－weighted utility scales)（其中每个局中人 i 的效用乘以某个正数 λ_i）进行比较时，这些 λ－加权效用尺度与原效用尺度在决策论上是等价的，而这些讨价还价解中的每一个都相应运用了一个均等收益原则或最大利益原则。随着 λ_1 的增大和 λ_2 的减少，λ－平等主义解描绘出了个人理性的弱有效前沿，且沿使局中人 1 的支付随之渐减的方向运动。同样，随着 λ_1 的增大和 λ_2 的减小，λ－功利主义解描绘出了整个弱有效前沿，且沿使局中人 1 的支付随之渐增的方向运动。

于是，当人们要在讨价还价中运用个人之间效用比较时，一般有两个问题必须予以回答：在众多决策论等价的效用尺度中，局中人应该考虑哪一个是个人之间可能比较的？这种比较应该在均等收益还是最大利益的意义上运用？然而，对任一实质上的两人讨价还价问题，都存在第一个问题的一个答案使第二个问题显得没有必要。即，对任一实质上的 (F, v)，存在一个向量 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ 使得 $\lambda > (0, 0)$，且 (F, v) 的 λ－平等主义解同时也是 (F, v) 的 λ－功利主义解。满足这个性质的数 λ_1 和 λ_2 被称为 (F, v) 的**自然尺度因子**
383 (natural scale factors)。F 中在自然尺度因子的意义上既是 λ－平等主义解又是 λ－功利主义解的配置，就是纳什讨价还价解。这一结论表明，纳什讨价还价解

---

* 原文误为“平等主义解”——译者注。

可被视为均等收益和最大利益这两个原则的一个自然综合。

定理8.2　令 (F, v) 为一个实质上的两人讨价还价问题，并令 x 为一个满足 $x \in F$ 且 $x \geqslant v$ 的配置向量，则 x 为 (F, v) 的纳什讨价还价解的充要条件是，存在严格正的数 λ_1 和 λ_2，使得

$$\lambda_1 x_1 - \lambda_1 v_1 = \lambda_2 x_2 - \lambda_2 v_2$$

及

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \max_{y \in F} (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$$

证明　令 $H(x, v)$ 表示双曲线

$$H(x, v) = \{y \in \mathbf{R}^2 \mid (y_1 - v_1)(y_2 - v_2) = (x_1 - v_1)(x_2 - v_2)\}$$

当且仅当双曲线 $H(x, v)$ 与 F 在 x 处相切时，配置 x 才是 (F, v) 的纳什讨价还价解。但双曲线 $H(x, v)$ 在 x 处的斜率为 $-(x_2 - v_2)/(x_1 - v_1)$，故 $H(x, v)$ 在 x 处与直线

$$\{y \in \mathbf{R}^2 \mid \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}$$

相切，其中 λ_1 和 λ_2 是任意两个正数使得

$$\lambda_1 (x_1 - v_1) = \lambda_2 (x_2 - v_2) \tag{8.3}$$

因此，x 是 (F, v) 的纳什讨价还价解的充要条件是，对于某个满足 (8.3) 式的 (λ_1, λ_2)，F 在 x 处与形如 $\{y \in \mathbf{R}^2 \mid \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}$ 的直线相切。■

作为一个简单的例子，令 v (0, 0)，且令

$$F = \{(y_1, y_2) \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant 30, \quad 0 \leqslant y_2 \leqslant (30 - y_1)^{1/2}\}$$

(F, v) 可以被理解为这样一个局势：局中人能以任何他们同意的方式去分 30 美元，而如果他们不能达成一致，则每人得到 0 美元，并且局中人 1 是风险中性的（对货币具有线性效用），但局中人 2 是风险厌恶的，具有一个正比例于其所得货币价值的平方根的效用尺度。为找出纳什讨价还价解，注意到

$$0 = \frac{d}{dy_1} \{y_1 (30 - y_1)^{1/2}\} = (30 - y_1)^{1/2} - \frac{y_1}{2 (30 - y_1)^{1/2}} \tag{384}$$

意味着 $y_1 = 20$，因而纳什讨价还价解是效用配置 $(20, 10^{1/2}) = (20, 3.162)$，它对应于局中人 1 得到 20 美元，而风险厌恶的局中人 2 只得到 10 美元货币配置。因此，按照纳什讨价还价解可知，风险厌恶的局中人处于某种不利的地位（关于这一结论的推广，参见罗思，1979）。

这个问题的自然尺度因子是 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 40^{1/2} = 6.325$。若我们令局中人 2 得到 κ 美元的货币收益的效用为 $6.325\kappa^{1/2}$ 而不是 $\kappa^{1/2}$（这在决策论上是一个无关紧要的改变），而局中人 1 的效用仍用同样的货币单位度量，则这个讨价还

价问题的表示变为 $\{G, (0, 0)\}$，其中

$$G = \{(y_1, y_2) \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant 30, \quad 0 \leqslant y_2 \leqslant 6.325 (30 \quad y_1)^{1/2}\}$$

在这个表示中，纳什讨价还价解 $(20, 20)$ 仍对应于局中人 1 得到 20 美元而局中人 2 得到 10 美元的货币配置，但既是平等主义解又是功利主义解。

8.4 可转让效用

可转让效用这一重要假定可以保证，博弈中给定的尺度因子也将成为纳什讨价还价解的自然尺度因子。

给定任一策略型博弈 $\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$，说 Γ 是一个**具有可转让效用** (with transferable utility) 的博弈，也就是说，除了 C_i 中列出的策略选择之外，每个局中人 i 还有给予任何其他局中人任意数量货币、甚或简单地毁掉这些货币的选择自由，并且每单位货币的净流出或损失将减少 i 的效用支付一个单位。即，说一个局势可用具有可转让效用的博弈 Γ 表示，等价于说它可以用博弈

$$\hat{\Gamma} = (N, (\hat{C}_i)_{i \in N}, (\hat{u}_i)_{i \in N})$$

来表示，其中对每个 i 均有

$$\hat{C}_i = C_i \times \mathbf{R}_+^N \quad 及$$

385
$$\hat{u}_i((c_j, x_j)_{j \in N}) = u_i((c_j)_{j \in N}) + \sum_{j \neq i} (x_j(i) - x_i(j)) - x_i(i)$$

这里 $x_j = (x_j(k))_{k \in N}$；对于任一 $k \neq j$，$x_j(k)$ 表示局中人 j 给予局中人 k 的货币量；$x_j(j)$ 则表示局中人 j 毁掉而不是给予任何其他局中人的货币量。$\hat{u}_i$ 线性依赖于转让量 x_j 表达了一个隐含的风险中性假定，当我们谈及一个博弈中存在可转让效用时，总要做此假定。(因此，上一节所举的例子不是一个具有可转让效用的博弈。)

如果 (F, v) 是从一个具有可转让效用的博弈导出的两人讨价还价问题，则可行集 F 一定具有如下形式

$$F = \{y \in \mathbf{R}^2 \mid y_1 + y_2 \leqslant v_{12}\} \tag{8.4}$$

其中 v_{12} 表示局中人能共同实现的某个最大可转让财富量。若 F 是在局中人的策略可用有约束力的合同加以限制这一假定下导出的，则我们可令

$$v_{12} = \max_{\mu \in \Delta(C)} \{u_1(\mu) + u_2(\mu)\} \tag{8.5}$$

于是，当存在可转让效用时，一个两人讨价还价问题可用 3 个数充分刻划：局中人 1 的不同意支付 v_1；局中人 2 的不同意支付 v_2；及他们合作时所能得到

的总可转让财富 v_{12}。在（8.4）式满足时，为满足定理（8.2）的条件，我们必须有 $\lambda_1 = \lambda_2$，否则 $\max_{y \in F}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ 将为正无穷大。于是由定理 8.2 知，$\phi(F, v)$ 的条件为

$$\phi_1(F, v) \geq v_1 \text{ 及 } \phi_2(F, v) \geq v_2 \text{ 及 } \phi_1(F, v) + \phi_2(F, v) = v_{12}$$

解这两个方程，我们对具有可转让效用博弈的纳什讨价还价解得到如下一般公式：

$$\phi_1(F, v) = \frac{v_{12} + v_1 - v_2}{2}, \quad \phi_2(F, v) = \frac{v_{12} + v_2 - v_1}{2} \tag{8.6}$$

8.5　理性威胁

注意到（例如，方程 8.6 中）局中人 1 在纳什讨价还价解中的支付随着局中人 2 的不同意支付的减小而增加。也就是说，如果达成了合作协议，那么在不一致同意事件中伤害局中人 2 的可能性实际上可能有助于局中人 1。因此， 386
达成一个合作协议——这将取决于不一致同意点——的前景，在每个局中人都尽力创造一个更为有利的不同意点时，便给局中人一种在形成协议前就已经更对抗地行为的动机。这种**冷淡效应**（chilling effect）或许可由纳什（1953）的理性威胁的理论来阐释。

为了提出这个理论，我们令 $\Gamma = (\{1, 2\}, C_1, C_2, u_1, u_2)$ 为任一有限策略型博弈，并令 F 为从 Γ，要么通过（8.1）式（在具有约束力的合同但不具有可转让效用*的情形），要么通过（8.4）或（8.5）式（在具有有约束力的合同和可转让效用的情形）导出的可行集。假设在进入与另一局中人的仲裁或谈判过程之前，每个局中人 i 都必须在 $\Delta(C_i)$ 中选择一个随机策略作为威胁 τ_i。还假设，如果局中人未能达成一个合作协议，则每个局中人都将被迫独立地执行其选择的威胁。于是，一旦选择了威胁 (τ_1, τ_2)，则两人讨价还价问题的不一致同意点将是 $\{u_1(\tau_1, \tau_2), u_2(\tau_1, \tau_2)\}$。令 $w_i(\tau_1, \tau_2)$ 表示局中人 i 在这个不一致同意点下纳什讨价还价解中所得到的支付，即

$$w_i(\tau_1, \tau_2) = \phi_i\Big(F, \{u_1(\tau_1, \tau_2), u_2(\tau_1, \tau_2)\}\Big)$$

现在假设局中人预期他们将最终达成一个按照纳什讨价还价解依赖于不一致同意点的合作协议。那么，局中人不应该关心实施他们的威胁与否，而代之以应该只根据他们的威胁对最终的合作协议的影响来评价这些威胁。因此，给定另一局中人的期望威胁，每个局中人 i 都应该要选择其威胁 τ_i 以使

---

* 原文误为“不具有不可转让效用”——译者注。

w_i (τ_1, τ_2) 最大化。于是，我们说 (τ_1, τ_2) 构成了一对**理性威胁**（rational threats）的主要条件是

$$w_1(\tau_1, \tau_2) \geqslant w_1(\sigma_1, \tau_2), \qquad \forall \sigma_1 \in \Delta(C_1),$$

且

$$w_2(\tau_1, \tau_2) \geqslant w_2(\tau_1, \sigma_2), \qquad \forall \sigma_2 \in \Delta(C_2)$$

即理性威胁形成了如下**威胁博弈**（threat game）

$$\Gamma^* = (\{1, 2\}, \Delta(C_1), \Delta(C_2), w_1, w_2)$$

的一个均衡。理性威胁的存在性可由角谷不动点定理加以证明。

387 图 8.1 显示了一个典型的可行集 F 是如何由射线或半直线划分的，使得对于 F 中的每个点 z，(F, z) 的纳什讨价还价解就是通过 z 的那条射线的上端点。根据定理 8.2，这些射线中的每一条的斜率都与 F 在该线段之上端点切线的斜率大小相等而符号相反。在威胁博弈中，局中人 1 要选择其威胁 τ_1 使不一致同意点 $(u_1(\tau_1, \tau_2), u_2(\tau_1, \tau_2))$ 处于图 8.1 中尽可能右下的那条射线上，而局中人 2 要选择其威胁 τ_2 使不一致同意点处于尽可能左上的那条射线上。

当存在可转让效用时，对威胁博弈的分析就变得较为简单。F 的有效前沿成为斜率为 -1 的一条直线，故前面描述的射线也就成了斜率为 1 的平行直线。由 (8.6) 式知，威胁博弈中的支付是

$$w_1(\tau_1, \tau_2) = \frac{v_{12} + u_1(\tau_1, \tau_2) - u_2(\tau_1, \tau_2)}{2}$$

$$w_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{v_{12} + u_2(\tau_1, \tau_2) - u_1(\tau_1, \tau_2)}{2}$$

其中 v_{12} 如同方程 (8.5) 所定义。由于 v_{12} 是一个常数，所以最大化 $w_1(\tau_1, \tau_2)$ 就等价于最大化 $u_1(\tau_1, \tau_2) - u_2(\tau_1, \tau_2)$，而最大化 $w_2(\tau_1, \tau_2)$ 也就等价于最大化 $u_2(\tau_1, \tau_2) - u_1(\tau_1, \tau_2)$。因此，在 Γ 是一个具有可转让效用的博弈时，τ_1 和 τ_2 分别是局中人 1 和 2 的理性威胁，其充要条件是，(τ_1, τ_2) 是两人零和博弈

$$\Gamma^{**} = (\{1, 2\}, \Delta(C_1), \Delta(C_2), u_1 - u_2, u_2 - u_1)$$

388 的一个均衡。我们称 Γ^{**} 为由 Γ 导出的**差分博弈**（difference game），因为每个局中人在 Γ^{**} 中的支付都是 Γ 中他自己的支付与另一局中人的支付之差。

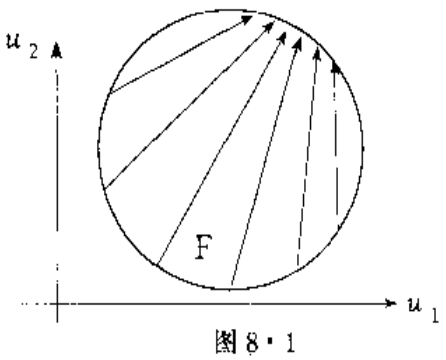

图 8·1

在本章中，对于任一给定的两个策略型博弈 Γ，我们已经考虑了 3 种不同的方法来决定一个不一致同意点：用 Γ 的一个均衡；用最小化最大值；及用理性威胁。为了在一个例子的情况下对这些不一致同

意点加以比较，令 Γ 为表 8－1 所示的策略型博弈，且具有可转让效用。此博弈所能实现的最大总支付是 $v_{12}=10$。

此博弈具有唯一的一个非合作均衡 (b_1, b_2)。如果我们取这个均衡所给出的支付为不一致同意点，则我们得到 $v=(0, 10)$，故纳什讨价还价解是 $\phi(F, v)=(0, 10)$。

表 8－1　　一个具有可转让效用的策略型博弈

	C_2	
C_1	a_2	b_2
a_1	10，0	－5，1
b_1	0，－5	0，10

下面假设我们用最小化最大值来确定不一致同意点。局中人 1 的最小化最大值为 $v_1=0$，它在局中人 2 选择进攻威胁 b_2 而局中人 1 选择防御反应 b_1 时达到。局中人 2 最小化最大值是 $v_2=1$，它在局中人 2 选择 b_2 作为一个最优防御策略而局中人 1 选择 a_1 作为一个对付 b_2 的最优进攻威胁时达到。从而，根据不一致同意点 (0，1)，纳什讨价还价解是 $\phi(F, v)=(4.5, 5.5)$。

在从 Γ 导出的威胁博弈 Γ^* 中，对于所有纯策略组合所得到的支付 (w_1, w_2) 如表 8－2 所示。这个威胁博弈唯一的均衡是 (a_1, b_2)，它导致不一致同 389
意点 $v=(-5, 1)$（从表 8－1 读出），故具有理性威胁的纳什讨价还价解是 $\phi(F, v)=(2, 8)$（从表 8－2 中读出）。

表 8－2　　从表 8－1 中的博弈导出的威胁博弈

	C_2	
C_1	a_2	b_2
a_1	10，0	2，8
b_1	7.5，2.5	0，10

这 3 种威胁和不一致同意点理论中的每一种都建议局中人 2 要在任何不一致同意点下选择 b_2，这是因为不论相对于 2 最大化 u_2 的防御目标还是相对于 2 最小化 u_1 的进攻目标准则，b_2 相对于 a_2 总占优。这 3 种理论之间的差别来自于它们对局中人 1 的不同意行为的具体要求。在不一致同意点的非合作均衡理论中，假定局中人 1 在不同意事件下的行为将由其最大化 u_1 的纯防御目标决定，故他要选择 b_1 而让局中人 2 得到她的最大可能支付。在最小化最大理论中，局中人 1 被假设有可能选择两个威胁：一个是决定 v_2 的进攻威胁

(a_1)，另一个是决定 v_1 的防御威胁（b_1）。在理性威胁理论中，局中人 1 必须选择单独的一个威胁既用于进攻又用于防御，故他选择 a_1。因为 a_1 最大化了目标 $[(10+u_1-u_2)/2$ 或简单地 $u_1-u_2]$，这一目标正是其进攻与防御的一个综合。

因此，不一致同意的均衡理论适用于这样的局势，其中局中人不能保证在不同意事件中实施任何所计划的策略，直至不一致同意事件实际发生。如果每个局中人在谈判或仲裁过程之前（可以预期这个过程完全不可能导致不一致同意时）能够保证，无论谁的最后拒绝导致不一致同意，他都在不一致同意事件中实施一个单独的计划策略，那么在此局势中，理性威胁理论是适用的。而如果在谈判或仲裁过程之前，每个局中人都能保证在不同意事件中只使用所计划的两个策略：一个防御、一个进攻，并根据此不同意事件如何产生来执行这两个策略中的一个，那么在此局势中，最小化最大值理论是适用的。为了理解这些进攻和防御威胁，让我们想像一个局中人，若最后的不一致同意是在他自己拒绝了谈判或仲裁过程中的最后报价（故不能达成协议在某种意义上是他的过错）之后发生的，则执行其计划的防御策略；但若最后的不一致同意是由于另一局中人拒绝了最后一次报价而发生的，则执行其进攻策略。

8.6 其他讨价还价解

390 在证明定理 8.1 中所用到的对称性公理，只是用于说明当 $E=\{z\in\mathbf{R}^2 \mid z_1+z_2\leqslant 2\}$ 时，两人讨价还价问题 $(E,(0,0))$ 的解一定是 $(1,1)$。现在，让我们去掉对称性公理，而代之以假设 $(E,(0,0))$ 的解是某个有效点 (α,β)，且 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$。那么，一个与定理 8.1 的证明相类似的论证可用来证明，任一实质上的两人讨价还价问题的解，一定是在 F 中所有个人理性点 x 的范围内最大化了下述**广义纳什积**（generalized Nash product）的点：

$$(x_1-v_1)^{\alpha}(x_2-v_2)^{\beta} \tag{8.7}$$

（为了修改证明，令 $\lambda_1=\alpha/(x_1-v_1)$，$\lambda_2=\beta/(x_2-v_2)$，并令每个 $\gamma_i=-\lambda_i v_i$，再利用 $\mathbf{R}^2$ 中曲线 $\{z \mid (z_1)^{\alpha}(z_2)^{\beta}=\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\}$ 在点 (α,β) 处斜率为 -1 这一事实。）

因此，我们说一个讨价还价解函数 Ψ 是一个**非对称纳什讨价还价解**（nonsymmetric Nash bargaining solution）的充要条件是，存在正数 α 和 β，使得对任一两人讨价还价问题 (F,v)，$\Psi(F,v)$ 都是 F 中一个个人理性而又强有效的点，并且在所有这样的点集上最大化了广义纳什积 (8.7)。为探明这种非对称纳什讨价还价解在实践中是如何应用的，设想局中人 1 是一个四口之家的家长，而局中人 2 是个单身汉，并且一位仲裁人认为对于具有可转让效

用的简单分摊美元博弈来说，合适的解将是把可分货币额的 4/5 分给局中人 1，而把其 1/5 分给局中人 2（以使他们的人均收入相等）。如果这位仲裁人想要满足除对称性之外的所有纳什公理，那他将利用 $\alpha/\beta=4$ 的非对称纳什讨价还价解（参见卡莱，1977）。

利用其他的公理系，已经提出其他一些讨价还价解概念（参见罗恩，1979）。为了介绍其中的几个，我们要将我们的注意力限于两人讨价还价问题中多少有点窄的一类。我们把 8.2 节中定义的两人讨价还价问题称为**正则的**(regular)，其充要条件为，F 是实质上的（即 $|y\in F' y>v| \neq\varnothing$），且对 F 中的任一向量 y，有

若　$y_1>v_1$，　则　$\exists z \in F$　使得　$v_1\leqslant z_1<y_1$　且　$z_2>y_2$

若　$y_2>v_2$，　则$\exists$　z　$\in F$　使得　$v_2\leqslant z_2<y_2$　且　$z_1>y_1$

也就是说，在一个正则的两人讨价还价问题中，存在一个可行配置对每个局中 391
人而言都严格好于不一致同意点；而且只要有一个局中人得到严格大于不一致同意时的支付，则他可以做到减少他自己的期望支付而又严格增大另一局中人的期望支付。我们把一个两人讨价还价问题 (F, v) 本身称为**个人理性的**，其充要条件是可行集 F 只包含了个人理性的配置，即

$$F\subseteq |y\in \mathbf{R}^2' y\geqslant v|$$

对任一正则的两人讨价还价问题 (F, v) 令 $m_i(F, v)$ 表示局中人 i 在任何可行的个人理性配置中所能得到的最大支付，故

$$m_i(F, v)=\max_{y\in F, y\geqslant v} y_i$$

对任一满足 $v_1\leqslant z_1\leqslant m_1(F, v)$ 的数 z_1，令 $h_2(z_1, F)$ 表示在局中人 1 得到 z_1 时，局中人 2 在可行配置中所能得到的最大支付，即

$$h_2(z_1, F)=\max |y_2| (z_1, y_2)\in F|$$

类似地，令 $h_1(z_2, F)$ 为在局中人 2 得到 z_2 时，局中人 1 在 F 中所能得到的最大支付，其中 z_2 满足 $v_2\leqslant z_2\leqslant m_2(F, v)$。

卡莱和斯莫罗丁斯基（Smorodinsky，1975）提出了一种单调性公理，作为有争议的不相干选择对象无关性公理的一个替代公理。他们指出，如果局中人 1 在 (F, v) 中所能得到的个人理性支付的范围与其在 (G, v) 中所能得到的相同，且对于局中人 1 的任一可行的个人理性支付，局中人 2 在 (F, v) 中所能得到的最好支付都不小于在 (G, v) 中所能得到的最好支付，则局中人 2 在 (F, v) 中所得到的支付不应该差于在 (G, v) 中所得到的。这个公理可规范地表述如下：

公理8.6（个人单调性）　若 $m_1(G, v)=m_1(F, v)$，且对于每个满足 $v_1\leqslant z_1\leqslant m_1(F, v)$ 的 z_1，均有 $h_2(z_1, G)\leqslant h_2(z_1, F)$，则 ϕ_2

$(G, v) \leqslant \phi_2 (F, v)$。类似地，若 $m_2 (G, v) = m_2 (F, v)$，且 $h_1 (z_2, G) \leqslant h_1 (z_2, F)$ 对每个满足 $v_2 \leqslant z_2 \leqslant m_2 (F, v)$ 的 z_2 都成立，则有 $\phi_1 (G, v) \leqslant \phi_1 (F, v)$。

卡莱和斯莫罗丁斯基证明了，对于正则的两人讨价还价问题，存在唯一的讨价还价解满足公理8.1、8.3、8.5及8.6（即强有效性，尺度协变性、对称
392 性及个人单调性）。对任一正则的讨价还价问题 (F, v) 而言，这个卡莱－斯莫罗丁斯基解为 F 中唯一满足下式的有效点 x：

$$\frac{x_2 - v_2}{x_1 - v_1} = \frac{m_2 (F, v) - v_2}{m_1 (F, v) - v_1}$$

给定任何一个两人讨价还价问题序列 $\{F (k), v (k)\}_{k=1}^{\infty}$，当且仅当在 $\mathbf{R}^2$ 中 $v = \lim_{k \to \infty} v (k)$，且 F 为 $\mathbf{R}^2$ 中所有对每个 k 都满足 $y (k) \in F (k)$ 的收敛序列 $\{y (k)\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限所组成的集时，我们才写作 $\lim_{k \to \infty} \{F (k), v (k)\} = (\bar{F}, \bar{v})$。［这个闭集拓扑被称为**豪斯道夫收敛性**（Hansdorff convergence）。］我们称一个讨价还价解函数 ϕ 是**连续的**，其充要条件是对任一两人讨价还价问题序列 $\{F (k), v (k)\}_{k=1}^{\infty}$，均有

$$\text{若} \quad \lim_{k \to \infty} \{F (k), v (k)\} = (\bar{F}, \bar{v})$$
$$\text{则} \quad \lim_{k \to \infty} \phi \{F (k), v (k)\} = \phi (\bar{F}, \bar{v})$$

对于任意两个讨价还价问题 (F, v) 和 (G, w) 及介于0与1之间的任一数 α，我们记

$$\alpha F + (1 - \alpha) G = \{\alpha y + (1 - \alpha) z \mid y \in F, z \in G\}, \quad \text{及}$$
$$\alpha (F, v) + (1 - \alpha) (G, w) = (\alpha F + (1 - \alpha) G, \alpha v + (1 - \alpha) w)^*$$

为了解释这个两人讨价还价问题，假设局中人1和2明天将面临的讨价还价问题取决于今晚是否下雨。若下雨，其概率为 α，则明天的讨价还价问题将是 (F, v)，否则将是 (G, w)。如果局中人1和2今天就对条件计划还价，则根据一致同意的计划“下雨执行 y，不下雨执行 z”，他们能够达成形如 $\alpha y + (1 - \alpha) z$ 的任何一个期望支付，其中 $y \in F$ 和 $z \in G$。因此，如果局中人今天对计划讨价还价，那他们的问题就成了 $\alpha (F, v) + (1 - \alpha) (G, w)$。在这种情况下，如果他们的讨价还价解函数 ϕ 是**凹的**（concave），即对任意的 (F, v) 和 (G, w) 及 $\alpha \in [0, 1]$，均有

$$\phi \{\alpha (F, v) + (1 - \alpha) (G, w)\} \geqslant \alpha \phi (F, v) + (1 - \alpha) \phi (G, w)$$

则他们两人都要在今天对计划讨价还价，而不是等到明天再讨价还价。凹的解

---

* 原文误为 $(\alpha F + (1 - \alpha) G, \alpha y + (1 - \alpha) z)$ ——译者注。

函数包括了上一节所讨论的 λ－平等主义解和 λ－功利主义解（参见迈尔森，1981*b*）。不过，帕利斯（Perles）和马施勒（1981）已经证明，对于正则的个人理性的两人讨价还价问题，存在一个凹连续且满足强有效性、尺度协变性及对称性等公理的解函数。若 $h_1(\cdot, F)$ 和 $h_2(\cdot, F)$ 是可微函数，则这个帕利斯－马施勒解在 F 中选择唯一的有效点 x 使得 393

$$\int_{v_1}^{x_1}\{-h'_2(z_1,F)\}^{1/2}dz_1=\int_{v_2}^{x_2}\{-h'_1(z_2,F)\}^{1/2}dz_2$$

雷费（参见卢斯和雷费，1957，p.136—137）讨论了与卡莱－斯莫罗丁斯基解密切相关的讨价还价解概念。给定任一正则的两人讨价还价问题 (F, v)，我们归纳地定义一个配置向量序列 $\{w(k)\}_{k=1}^{\infty}$，其中每个 $w(k)=\{w_1(k), w_2(k)\}\in\mathbf{R}^2$，使得 $w(1)=v$，且对每个正整数 k，有

$$w(k+1)=\frac{1}{2}\Big(h_1(w_2(k),F),w_2(k)\Big)+\frac{1}{2}\Big(w_1(k),h_2(w_1(k),F)\Big)$$

可以证明，这个序列按其分量来看是不减的，且收敛于 F 中的某个有效配置向量 w^*。这个极限 w^* 是 (F, v) 的雷费序贯讨价还价解。

通过对局中人能在 k 个回合做出报价的讨价还价过程这一特殊模型的分析，其中 k 是某个（很大的）数，雷费序贯讨价还价解可以沿着纳什方案加以证实。在每个回合，随机选择一个局中人做出一个报价，它可以是 F 中的任一点。在得到这个报价后，另一个局中人要么接受要么拒绝。第一次被接受的报价就是局中人在这个博弈中所得到的支付配置。如果在 k 个回合中没有任一回合的报价被接受，则局中人得到不一致同意支付配置 v。在每个回合，每个局中人都有 1/2 的概率成为做出报价者，这与博弈的过去历史无关。

此博弈具有唯一的一个子博弈完美均衡，其中第一回合的报价被接受，而且对每个局中人 i 的期望支付是 $w_i(k+1)$。在这个均衡中，对 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 中任一 l，倒数第 l 个回合处，每个局中人将接受给他至少 $w_i(l)$ 的任一报价（这是因为如果以前没有报价被接受的话，这将是他在最后 $l-1$ 个回合所构成的子博弈中的期望支付），从而局中人 1 会做出报价 $\Big(h_1\{w_2(l), F\}, w_2(l)\Big)$，而局中人 2 会报出 $(w_1(l), h_2(w_1(l), F))$。因此，当可能报价的次数趋向于无限时，雷费的序贯讨价还价解是此博弈均衡中期望结果的极限。 394

8.7　一个轮流报价的讨价还价博弈

斯塔尔（Stahl，1972）和鲁宾斯坦（982）考虑了一个多少有点不同的讨价还价模型，其中局中人轮流做出报价直至有一个被接受。在鲁宾斯坦所考虑

的一个一般模型中，对于做出报价的次数没有有限的界限，但每个局中人都具有某种时间成本，故其支付同时取决于所接受的报价和接受报价所需回合数。鲁宾斯坦对一大类时间成本公式精致地刻划了这些轮流报价讨价还价博弈的子博弈完美均衡，并且证明了，在每个局中人的时间成本都由某个贴现因子 δ 给出时，子博弈完美均衡是唯一的。宾莫尔（参见宾莫尔和达斯古普塔，1987，第4章）证明了，借助于 δ 贴现的时间成本公式，若每个回合的贴现因子 δ 接近于1，则这个唯一子博弈完美均衡的结果接近于纳什讨价还价解。

在本节中，我们介绍这些结论的一个特殊情形。不过，代替假定贴现或关于局中人在不同时点所收到彩金之间的权衡做出另外某些假定，我们在此假定，讨价还价过程中的延迟成本由一个外生的正概率导出，在每个回合之后，若仍没有报价被接受，则该讨价还价过程将以这个概率永久地终止在不一致同意点。

令 (F, v) 是任一正则的两人讨价还价问题，并设 p_1 和 p_2 是满足 $0<p_1<1$ 和 $0<p_2<1$ 的两个数。在我们的轮流报价讨价还价博弈中，局中人1在每个奇数回合做出一个报价，而局中人2在每个偶数回合做出一个报价，博弈从回合1开始并持续到某个报价被接受或结束于不一致同意点为止。在每个回合，一个局中人做出报价之后，另一个局中人既可以接受，也可以拒绝。在局中人1的报价遭局中人2拒绝的任一回合，讨价还价将以概率 p_1 结束于一个不一致同意状态，其中局中人2将得到支付 v_2，而局中人1将得到某个支付 w_1，且满足 $w_1 \leqslant m_1(F)$。类似地，在局中人2的报价遭局中人1拒绝的任一回合中，讨价还价将以概率 p_2 结束于一个不一致同意状态，其中局中人1将得到支付 v_1，而局中人2将得到某个支付 w_2，且满足 $w_2 \leqslant m_2(F)$。报价可以是可行集中的任一支付配置。当一个报价被接受时，博弈就结束于达成的协议，且局中人得到所接受报价中规定的支付。（注意，在此博弈中，局中人只会在一个回合中得到支付，要么在一个报价被接受时，要么在讨价还价结束于不一致同意状态时。）

395

定理8.3 上述轮流报价博弈具有唯一的一个子博弈完美均衡，其中局中人1计划总是以某个配置 x 作为报价，局中人2计划总是以某个配置 $\bar{y}$ 作为报价，并且局中人1将接受任一至少给他 $\bar{y}_1$ 的报价，而局中人2将接受任一至少给他 $\bar{x}_2$ 的报价。因此，在均衡中，这个博弈在第一回合就以达成协议 $\bar{x}$ 而结束。这两个向量 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 都是 F 中的强有效配置，且满足

$$\bar{y}_1 = (1-p_2)(\bar{x}_1 - v_1) + v_1 \quad 和 \quad \bar{x}_2 = (1-p_1)(\bar{y}_2 - v_2) + v_2$$

证明 首先注意到，从一个奇数回合开始（局中人1首先报价）的所有子博弈一定与原博弈具有相同的子博弈完美均衡集。类似地，从一个偶数回合开始（局中人2首先报价）的所有子博弈也一定具有相同的子博弈完美均衡集。在局中人1首先报价的任一子博弈的一个子博弈完美均衡中，令局中人1所能得

到的所有可能期望支付组成的集的上确界为 x_1，而下确界为 $\hat{x}_1$。类似地，在局中人 2 首先报价的任一子博弈的一个子博弈完美均衡中，令局中人 2 所能得到的所有可能期望支付组成的集的上确界为 y_2，而下确界为 $\hat{y}_2$。

在此博弈的任一子博弈完美均衡中，局中人 2 在奇数回合将总能接受给予她大于 $(1-p_1)\,y_2+p_1v_2$ 的任一报价，因为这个支付是她在拒绝局中人 1 的报价后所能预期的最好支付。因此，局中人 1 在他首先报价的任一子博弈完美均衡中不可能做得比 $h_1\{(1-p_1)\,y_2+p_1v_2,\ F\}$ 差。再则，对于任一正数 ε，在回合 2 开始的任一子博弈中，都存在一个子博弈完美均衡，其中局中人 2 可预期得到与其最好支付 y_2 之差在 ε 范围内的支付；所以她能在回合 1 确保自己至少得到 $(1-p_1)(y_2-\varepsilon)+p_1v_2$ 的支付。局中人 1 在这个均衡中的支付预期不会超过 $h_1\{(1-p_1)(y_2-\varepsilon)+p_1v_2,\ F\}$。[这是因为，对每个 i 都有 $w_i\leqslant m_i(F)$，故任一均衡中的期望效用配置都不可能在凸集 F 的有效前沿上方。] 于是，当局中人 1 首先报价时，他在所有子博弈完美均衡上的期望支付的下确界是 396

$$\hat{x}_1=h_1\{(1-p_1)\,y_2+p_1v_2,\ F\} \tag{8.8}$$

在任一偶数回合，局中人 1 将肯定接受给予他的支付大于 $(1-p_2)\,x_1+p_2v_1$ 的任一报价，利用这一事实，类似的论证可用于证明

$$\hat{y}_2=h_2\{(1-p_2)\,x_1+p_2v_1,\ F\} \tag{8.9}$$

另一方面，在一个奇数回合中，局中人 2 决不会接受给她的支付小于 $(1-p_1)\,\hat{y}_2+p_1v_2$ 的任一报价，因为这个支付是她通过拒绝当前报价而在一个子博弈完美的均衡中所能预期得到的最小值；所以局中人 1 决不可能做得比 $h_1\{(1-p_1)\,\hat{y}_2+p_1v_2,\ F\}$ 好。此外，对任一正数 ε，在回合 2 开始的任一子博弈中，存在一个子博弈完美均衡，其中局中人 2 将预期得到与 $\hat{y}_2$ 之差在 ε 范围内的支付，故她将在回合 1 接受给予她 $(1-p_1)(\hat{y}_2+\varepsilon)+p_1v_2$ 的任一报价；而局中人 1 在此均衡中将至少得到 $h_1\{(1-p_1)(\hat{y}_2+\varepsilon)+p_1v_2,\ F\}$。因此，在局中人 1 首先行动的一个均衡中，他能得到的所有期望支付的上确界是

$$x_1=h_1\{(1-p_1)\,\hat{y}_2+p_1v_2,\ F\} \tag{8.10}$$

在任一偶数回合，局中人 1 决不会接受给予他的支付小于 $(1-p_2)\,\hat{x}_1+p_2v_1$ 的任一报价，利用这一事实，一个类似的论证可用于证明

$$y_2=h_2\{(1-p_2)\,\hat{x}_1+p_2v_1,\ F\} \tag{8.11}$$

让我们完成在 $\mathbf{R}^2$ 中对向量 x，$\hat{x}$，y 及 $\hat{y}$ 的定义，为此令

$$x_2=h_2(x_1,F),\hat{x}_2=h_2(\hat{x}_1,F),y_1=h_1(y_2,F)\quad 及\quad \hat{y}_1=h_1(\hat{y}_2,F)$$

故这些向量都在 F 的有效前沿上。从而正则性和 (8.8) ~ (8.11) 式意味着

$$\hat{x}_2 = (1-p_1)\, y_2 + p_1 v_2 \tag{8.12}$$

$$\hat{y}_1 = (1-p_2)\, x_1 + p_2 v_1 \tag{8.13}$$

$$\hat{x}_2 = (1-p_1)\, \hat{y}_2 + p_1 v_2 \tag{8.14}$$

$$\hat{y}_1 = (1-p_2)\, \hat{x}_1 + p_2 v_1 \tag{8.15}$$

397 为验证这些方程，注意到，正则性意味着 F 中任一弱有效的个人理性向量也是强有效的，这一事实同样也意味着，对于 F 中任一个人理性而又有效的配置 z，若 $\hat{z}_1 \geqslant v_1$ 且 $z_2 = h_2(\hat{z}_1, F)$，则 $\hat{z}_1 = z_1$；而若 $\hat{z}_2 \geqslant v_2$ 且 $z_1 = h_1(\hat{z}_2, F)$，则 $\hat{z}_2 = z_2$。

F 中存在唯一的一对向量 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$，使得 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 都是 F 中个人理性且有效的，并且

$$\bar{y}_1 = (1-p_2)(\bar{x}_1 - v_1) + v_1 \quad 和 \quad x_2 = (1-p_1)(\bar{y}_2 - v_2) + v_2$$

为了证明这一点，注意这些条件等价于

$$\bar{x}_1 - \bar{y}_1 = p_2 (\bar{x}_1 - v_1) \tag{8.16}$$

$$\bar{y}_2 - \bar{x}_2 = \frac{p_1 (\bar{x}_2 - v_2)}{1-p_1} \tag{8.17}$$

随着我们把 $\bar{x}_1$ 从 v_1 增大到 $m_1(F, v)$，x_2 便从 $m_2(F, v)$ 减小到 v_2，故 (8.17) 式的右边单调递减至 0。另一方面，随着我们把 $\bar{x}_1$ 从 v_1 增大到 $m_1(F, v)$，(8.16) 式的右边从 0 单调递增。而且，给定 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 在凸集 F 的有效前沿上，当我们同时增大 $\bar{x}$ 和 $\bar{x}_1 - \bar{y}_1$ 时，差值 $\bar{y}_2 - \bar{x}_2$ 也一定单调递增，且在 $\bar{x}_1 - \bar{y}_1$ 为 0 时等于 0。因此，当我们要求 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 在 F 中有效，且满足 (8.16) 式时，随着 $\bar{x}_1$ 从 v_1 增至 $m_1(F, v)$，(8.17) 式的左边从 0 单调递增。于是，利用这些条件和连续性，我们就能保证在 F 的个人理性的有效前沿上解 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 的存在性和唯一性。

这样一来，条件 (8.12) 和 (8.15) 就蕴含着 $\hat{x} = \bar{x}$ 和 $y = \bar{y}$。条件 (8.13) 和 (8.14) 也类似地蕴含着 $x = \bar{x}$ 和 $\hat{y} = \bar{y}$。因此，在每个子博弈完美均衡中，局中人 1 在所有由他首先报价的子博弈中一定得到期望支付 $\bar{x}_1$，而局中人 2 在所有由她首先报价的子博弈中一定得到期望支付 $\bar{y}_2$。根据构造 x 和 y 的方式，容易验证，定理 8.3 中所描述的策略构成唯一具有这种性质的子博弈完美均衡。(**验证**：在从第 2 个回合开始子博弈的任一局中人 2 预期能得到 $\bar{y}_2$ 的均衡中，如果 1 向 2 的报价高于 $\bar{x}_2$，则 2 将接受，但 1 自己得到的支付小于 $\bar{x}_1$；而 1 向 2 的报价低于 $\bar{x}_2$，则 2 将拒绝，而 1 最多只能预期得到严格小于 $\bar{x}_1$ 的 $(1-p_1)\bar{y}_1 + p_1 v_1$。) ■

在这个博弈中，参数 p_i 是局中人 i 的一种**责任能力**（power of commitment）的度量，因为它是 i 所做出的报价在遭到拒绝后将成为最终结果的概率。对这个轮流报价的讨价还价博弈的分析表明，可以预期讨价还价者会达成一个协议，其中他们的相对份额关键地取决于其相对责任能力 p_1/p_2，即使每个局中人的责任能力 p_i 的绝对水平相当之低亦是如此。为了看出如何从定理 8.3 导出这一结论，令 α、β 及 ε 为正数，且设 398

$$1-p_1=(1-\varepsilon)^{\alpha} \quad 和 \quad 1-p_2=(1-\varepsilon)^{\beta}$$

故若 ε 很小，则有 $p_1\approx\varepsilon\alpha$ 和 $p_2\approx\varepsilon\beta$。定理 8.3 中的条件于是意味着

$$\begin{aligned}(x_1-v_1)^{\alpha}(\bar{x}_2-v_2)^{\beta}&=(\bar{x}_1-v_1)^{\alpha}(\bar{y}_2-v_2)^{\beta}(1-\varepsilon)^{\alpha\beta}\\&=(\bar{y}_1-v_1)^{\alpha}(\bar{y}_2-v_2)^{\beta}\end{aligned}$$

因此，$\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 是 F 的有效前沿与广义纳什积（8.7）的一个等值线的两个交点，故以 α 和 β 为参数的非对称纳什讨价还价解一定介于 $\bar{x}$ 与 $\bar{y}$ 之间。而且，若我们保持 α 和 β 固定，而令 ε 趋向于 0，则 p_1 和 p_2 也趋向于 0，故［由（8.16）和（8.17）式］差值 $\bar{x}_1-\bar{y}_1$ 和 $y_2-\bar{x}_2$ 也一定趋向于 0。于是，保持 α 和 β 固定，随着 ε 趋向于 0，这个轮流报价讨价还价博弈唯一的子博弈完美均衡的结果将收敛于以 α 和 β 为参数的非对称纳什讨价还价解，其中 $\alpha/\beta=\lim_{\varepsilon\to 0}p_1/p_2$。

例如，在一个具有可转让效用的两人讨价还价问题中，若 $p_1=.004$ 和 $p_2=.001$，则这个轮流报价讨价还价博弈唯一的子博弈完美均衡将导致一个结果，其中局中人 1 将得到高于不一致同意结果的可转让增益的大约 4/5（更准确地说，当 1 首先报价时为 80.024%[①]，或在局中人 2 首先报价的子博弈中为 79.944%[②]），而局中人 2 只得到大约 1/5。

这个分析表明，一个好的讨价还价者应该力图产生这种感觉，一旦他的一个报价被拒绝，则存在一个相对而言很大的概率使讨价还价可因达不成一致而终止，而当他拒绝另外某个人的报价时，则存在一个相对而言很小的概率可使讨价还价因达不成一致而终止。然而要注意，在这个子博弈完美均衡中，没有局中人在任何时候会真正地想在他的报价遭拒绝后以达不成一致来终止讨价还价过程；等待从对方那里得到新的报价总是更好。因此，在这个模型中，增大 399 p_i 意味着鼓励局中人 i 在他的最近一次报价遭拒绝后将非理性地退出，从而以达不成一致来终止讨价还价过程的信念。实际上，一个好的讨价还价者可以通过以定局的姿态果断地做出报价以图提高其外显的责任能力，同时又尽量通过礼貌而又友好地做出拒绝来降低对方的责任能力。

---

① 原文误为 80.064%——译者注。

② 原文误为 79.984%——译者注。

8.8 一个具有不完全信息的轮流报价博弈

在上一节中，假定局中人都是具有不一致同意支付 v_1 和 v_2 的理性效用最大化者是共同知识。这一假定意味着，局中人1不可能使任何人相信，存在某些报价是他所不能接受的，哪怕它们对他而言好于 v。不过，在现实的讨价还价中，人们时常争取让对方相信他们决不能接受某个范围之外的任何报价。为了理解这种战术的重要性，我们必须去掉完全信息的假定。

给定一个正则的两人讨价还价问题 (F, v)，让我们再次考虑我们在上一节曾分析过的轮流报价讨价还价问题，但我们要对局中人1引入第三个可能类型。令 r 为 F 中任一满足 $r_1 > v_1$ 和 $r_2 > v_2$ 的有效配置向量，并假设有理由怀疑局中人1具有某种强迫自己坚持这个配置 r 的非理性承诺。为明确起见，假设局中人1有一个很小但严格为正的概率 q（在博弈开始之前）被一个机器人或代理人取代，而这个机器人或代理人机械地为局中人1执行如下 **r－坚持策略**（r－insistent strategy）：在奇数回合，他总是报价 r；而在偶数回合，他将接受报价 y 的充要条件是 $y_1 \geqslant r_1$。此外，为了简化我们的分析，假设在这个轮流报价的博弈中，不一致同意的支付是0，故有

$$0 = v_1 = v_2 = w_1 = w_2$$

定理8.4 在如上所述具有不完全信息的轮流报价博弈的任一均衡中，存在某个数 $J(F, v, r, q)$（它不依赖于 p_1 或 p_2）使得，如果局中人1执行 r－坚持策略，则局中人2肯定会在前 $J(F, v, r, q)$ 回合中报价 r 或接受 r。因此，局中人1在均衡中的期望支付不可能小于 $r_1(1-\max\{p_1, p_2\})^{J(F,v,r,q)}$。若 p_1 和 p_2 都很小，则局中人1的期望支付的这个下界接近于 r_1。

400

证明 令 $\delta = (1-p_1)(1-p_2)$。因为 $0 < r_2 < m_2(F, v)$，且 p_1，p_2 及 q 均为正，所以我们可以选取足够大的正整数 K 和 I，使得

$$\delta^K < \frac{0.5r_2}{m_2(F, v)} \quad 及$$

$$\left(1 - \frac{0.5r_2}{m_2(F, v)}\right)^I < q$$

现在考虑，在局中人1一直都按照 r－坚持策略行动且又已报价 r 的任一回合中局中人2的情况，并且局中人2正在遵循在这个轮流报价博弈的一个均衡中具有正概率的某策略 c_2。注意到因为 $q > 0$，所以这个事件有着正概率，

故在给定的这个回合对局中人 2 可用的信息下，c_2 对她来说一定是序贯理性的（回顾定理 4.4）。假设在采用 c_2 下，局中人 2 在接下来的 $2K$ 个回合期间，计划通过既不接受 r 又不做出让局中人 1 至少得到 r_1 的报价来抵挡 1 的 r－坚持策略。如果这个讨价还价博弈在接下来的 $2K$ 个回合期间没有以不一致同意而结束，则令 π 表示局中人 1 在此期间（通过按照其均衡策略进行理性选择或作为一个机器人）将不会明显偏离其 r－坚持策略的概率。局中人 2 现在可以通过接受报价 r 得到支付 r_2，但若她拒绝并在随后的 $2K$ 个回合中避免了 r，则她的期望支付不可能高于

$$m_2(F, v)\{1-\pi(1-\delta^K)\}$$

因为讨价还价在随后的 $2K$ 个回合中以不一致同意而结束的概率至少是 $\pi(1-\delta^K)$。于是，局中人 2 在这个回合策略的序贯理性蕴含着

$$r_2 \leqslant m_2(F, v)\left(1-\pi\left(1-\frac{0.5r_2}{m_2(F, v)}\right)\right)$$

故

$$\pi \leqslant 1-\frac{0.5r_2}{m_2(F, v)} \qquad 401$$

通过重复这个论证 I 次，假定局中人 2 将在最初的 $2KI$ 个回合始终抵挡局中人 1 的 r－坚持策略，如果讨价还价在此期间没有以不一致同意而结束，则局中人 1 在最初的 $2KI$ 个回合期间将不会偏离其 r－坚持策略的概率不大于 $\{1-0.5r_2/m_2(F, v)\}^I$。然而，根据对 I 的定义，这个概率小于 q，故不存在局中人 2 在均衡中以正概率使用的任何策略，使她在这个策略下能抵挡局中人 1 的 r－坚持策略多于 $2KI$ 个回合。

以上论证还未证明这个定理，因为 K 和 I 依赖于 p_1 和 p_2，但它的确证明了，在任一均衡中，存在某个有限数 L 使得局中人 2 不可能忍受局中人 1 有 r－坚持策略多于 L 回合。也就是说，只要总是观察到局中人 1 遵循 r－坚持策略，则局中人 2 肯定会在回合 L 之前接受 r，或者做出一个对局中人 1 来说至少与 r 一样好的某个报价。如果 L 是一个偶数，则局中人 2 将在回合 $L-1$ 乐于接受 r，所以不失一般性，我们可以假定 L 为奇数，且局中人 1 在回合 L 报价。

现在，让我们从回合 L 逆向处理。在任一偶数回合 $L+1-2k$，其中 $k \geqslant 1$，若局中人 1 未偏离 r－坚持策略，那他知道通过服从 r－坚持策略他至少可以得到 $r_1(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^k$，所以他不会接受局中人 2 的任何低于此值的报价。类似地，局中人 1 不会在任何奇数回合 $L-2k$ 提出偏离 r－坚持策略的报价，除非得到的期望支付至少为 $r_1(1-p_1)^k(1-p_2)^k$。因此，如果局中人 1 在第 $L+1-2k$ 或 $L-2k$ 回合第一次做出了偏离 r－坚持策略的报价，

则此时局中人2的期望支付不可能会高于 $h_2(r_1\delta^k, F)$。

由正则性知，存在某条具有负斜率且与 F 切于 r 的直线。于是令正实数 A 和 B 满足 $A-Br_1=r_2$ 且对 F 中的每一个 y 都有 $A-By_1\geqslant y_2$。令 M 为一个满足 $M>2A/(A-Br_1)=2A/r_2$ 的正整数。

对任一正整数 k，考虑局中人2在回合 $L-2Mk$ 的处境，此时局中人1从未偏离过 r -坚持策略而又刚刚向局中人2做出了一个报价 r。假定在回合 L 之前的每个回合，局中人2都遵循一个在均衡中具有正概率的纯策略 c_2，且在 c_2 下，她将通过既不接受 r 又不做出一个让局中人1至少得到 r_1 的报价来抵制1的 r -坚持策略。令 ξ 表示局中人1（要么通过理性选择要么象个机器人）至少在随后的 $2(M-1)k$ 个回合期内（即至少直到回合 $L-2k$）不会在对付 c_2 时偏离 r -坚持策略的概率，只要这个讨价还价博弈在此期间没有结束于不一致同意点。那么，局中人2的条件期望支付不可能大于

402

$$(1-\xi)(A-Br_1\delta^{Mk})+\xi\delta^{(M-1)k}(A-Br_1\delta^k)$$

[在局中人1于回合 $L-2k$ 之前就确实偏离 r -坚持策略的 $(1-\xi)$ 概率事件中，即使他在随后的第 $(L+1-2Mk)$ 个回合就偏离了 r -坚持策略，他也不会为一个小于 $r_1\delta^{Mk}$ 的期望支付而这样做，故局中人2不可能预期做得好于 $A-Br_1\delta^{Mk}$。而在局中人1于回合 $L-2k$ 之前将不会偏离 r -坚持策略的 ξ -概率事件中，这个讨价还价博弈在此期间将不会终止于不一致同意点的概率只有 $\delta^{(M-1)k}$；因此，局中人1不会为小于 $r_1\delta^k$ 的支付而偏离，这就给予局中人2不大于 $A-Br_1\delta^k$ 的支付。] 于是，为使局中人2在这个局势中继续遵循 c_2（而不是在回合 $L-2Mk$ 就接受 r）是最优的（它必须是，因为这个局势在均衡中能以正概率发生），我们必须有

$$A-Br_1\leqslant(1-\xi)(A-Br_1\delta^{Mk})+\xi\delta^{(M-1)k}(A-Br_1\delta^k)$$

故

$$\xi\leqslant\left(\frac{Br_1}{A}\right)\left(\frac{1-\delta^{Mk}}{1-\delta^{(M-1)k}}\right)$$

利用一些基本的微积分知识［包括洛必达（l' Hospital）法则］，只要 $0<\delta<1$，便可证明这个不等式的右边决不可能大于 $Br_1M/[(M-1)A]$；从而由于 M 大于 $2A/(A-Br_1)$，故这个量小于 $1-1/(M-1)$。因此，$\xi\leqslant1-1/(M-1)$。

以 $k=1、M、M^2、\cdots、M^{H-1}$ 应用这个论证 H 次，我们可以看出，如果局中人2在多于 $2M^H$ 个回合的期间内既不接受也不做出报价 r，且这个博弈又未终止于不一致同意，则局中人1在此期间将不偏离 r -坚持策略的概率不能大于 $[1-1/(M-1)]^H$。现令 H 为一个足够大的正整数，使得

$$(1-\frac{1}{M-1})^H<q \tag{403}$$

再令 $J(F, v, r, q)=2M^H$。给定局中人 1 为一个 r - 坚持策略机器人的概率为 q，则不存在任何一个其中局中人 2 能抵挡局中人 1 的 r - 坚持策略多于 $J(F, v, r, q)$ 个回合的均衡。注意，我们所构造的 M、H 及 J 的确不依赖于 δ、p_1 及 p_2 的值。 ■

当 p_1 和 p_2 都很小时，定理 8.4 对讨价还价所给出的见解与定理 8.3 所产生的见解形成鲜明的对照。定理 8.3 提出，局中人的责任能力之比 p_1/p_2 在决定局中人 1 和 2 在合作协议中的相对份额可以起到关键作用。然而，定理 8.4 指出，如果局中人 1 能（在局中人 2 的脑海中）产生某种关于他是否有可能非理性地坚持一种配置 r 的疑虑，那他就预期能得到一个对他自己来说接近于 r 或好于 r 的协议，而不管比值 p_1/p_2 是多少。

更一般地，定理 8.3 和 8.4 的对比应该使我们预期到其他小的结构扰动（例如，假定两个局中人都有独立地被非理性坚持某个配置 r 的机器人或代理人所取代的较小正概率）能够带来我们的轮流报价博弈的均衡集某种很大的变化。在下一节中，我们考虑一个这样的扰动，当 p_1 和 p_2 都很小时，几乎任何一个个人理性的配置都可以在均衡中实现。

8.9　一个离散的轮流报价博弈

在一个正则的两人讨价还价问题 (F, v) 中，令 F_0 是可行集 F 的一个有限子集。我们可以设想 F_0 为一个非常大的子集。给定任一正数 ε，我们说 F_0 为 F 中 **ε 稠密**（ε-dense）子集的充要条件是，对于 F 中的每个 y，F_0 中都存在某个 $\hat{y}$，使得 $|y_i-\hat{y}_i|\leqslant\varepsilon$ 对 $i=1, 2$ 都成立。

现在假设，对于 8.7 节中的轮流报价讨价还价博弈（那里不存在不完全信息）只做如下的改变：要求所有的报价都必须在集 F_0 中。例如，如果效用是用美元度量的，但提出的报价只能精确到美分，即分割美分的配置不能作为报价，那么局中人所做出的报价可能被限制在集 F_0 中，其中 F_0 是 F 中所有满足 404
y_1 和 y_2 都是 1/100 的整数倍的向量 $y=(y_1, y_2)$ 所组成的集。

除了这个假定，让我们再做一个限制，即不一致同意的支付为 0，故 $0=v_1=v_2=w_1=w_2$。

对每个局中人 i，令 $t(i)=(t_1(i), t_2(i))$ 为 F_0 中对局中人 i 最优的个人理性配置。如果对局中人 i 而言这样的最优化配置不止一个，则令 $t(i)$ 为所有这些对局中人 i 最优的配置中，对除 i 之外的另一局中人最好的配

置。这就是说，在集 F_0 内所有强有效的配置向量之中（F_0 被认为是可行集），t（1）是局中人1的最好配置，t（2）则是局中人2的最好配置。于是，

$$t(i) \in \underset{y \in F_0, y \geqslant (0,0)}{\operatorname{argmax}} y_i$$

且当 $j \neq i$ 时，

$$\text{若} \quad z \in F_0 \quad \text{且} \quad z_j > t_j(i), \quad \text{则} \quad z_i < t_i(i)$$

当 F_0 是一个很大的集时，则 t_1（2）和 t_2（1）应该是接近于不一致同意支付0的小数值。

假设 p_1 和 p_2 都足够小到让如下两个条件成立：

$$\forall z \in F_0, \quad \text{若 } z_2 > t_2(1), \quad \text{则} \quad z_1 < (1-p_2)\, t_1(1) \tag{8.18}$$

$$\forall z \in F_0, \quad \text{若 } z_1 > t_1(2), \quad \text{则} \quad z_2 < (1-p_1)\, t_2(2) \tag{8.19}$$

给定我们关于 F_0 是一个有限集这一假定，一定存在严格正的 p_1 和 p_2 值满足这两个条件。

定理8.5 在上述假定之下，对于 F_0 中任一满足 $x_1 \geqslant t_1(2)$ 和 $x_2 \geqslant t_2(1)$ 的配置 x，存在该轮流报价博弈（要求报价必须在 F_0 内）的一个子博弈完美均衡，其中在回合1局中人1报价 x 而局中人2接受。

证明 ［也可参见范·达米、塞尔腾和温特（Winter，1990）。］首先考虑 $x = t(1)$ 的特殊情形。存在一个子博弈完美均衡，其中局中人1总是报价 t（1）并只接受给他 t_1（1）或更多的报价，而局中人2也报价 t（1）并接受给她 t_2（1）或更多的报价。我们称之为**2－顺从均衡**（2-submissive equilibrium）。

405

为了验证2－顺从均衡是一个子博弈完美均衡，注意到在局中人2做出报价的任一回合中，局中人1可以预期如果继续进行到下一个回合，他就有可能报价 t（1）并被接受而得到它。因而，局中人1仅在局中人2的报价给他（1－p_2）t_1（1）或更多时才应该乐意于接受这个报价。由（8.18）式知，不存在对局中人2来讲好于 t（1）的配置。于是，局中人2不可能指望做到比在任一偶数回合全都报价 t（1）而在任一奇数回合都接受 t（1）更好。当局中人1做出报价时，t（1）显然对他是最优的，因为在这个均衡中，t（1）是所能做出的最好的个人理性报价，并且预期局中人2会接受它。

类似地，存在一个被称为1－**顺从均衡**（1-submissive equilibrium）的子博弈完美均衡，其中两个局中人都总是报价 t（2），每个人也都总能接受它，但没有人会接受给他或她小于 t（2）的任何报价。

现在令 x 为 F_0 中任一满足 $x_1 \geqslant t_1(2)$ 和 $x_2 \geqslant t_2(1)$ 的配置。考虑一个局中人的下述策略：只要没有人做出过不同于 x 的报价，他就报价 x 并在报价后，两个局中人接受 x；但如果某个人作出了不同于 x 的报价，则按照 i－顺从均衡进行博弈，其中 i 是第一个做出不同于 x 报价的局中人。当两个局中

人都遵循这个策略，则结果将是在第一个回合就 x 达成了一致，并且这个策略偶构成了一个子博弈完美均衡。例如，假设局中人 1 做出了第一个不同于 x 的报价即局中人 1 是第一个人从 F_0 中选择另外某个向量 y 作为报价。在局中人 1 的不正常报价之后开始的子博弈中，若 $y_2 < t_2(2)$，则他将得到的期望支付 $t_1(2)(1-p_1)$，而如果 $y_2 \geqslant t_2(2)$，他将得到期望支付 y_1。不过，根据对 $t(2)$ 的定义，$y_2 \geqslant t_2(2)$ 也就意味着 $y_1 \leqslant t_1(2)$。 ■

根据这个定理，均衡中所能出现的配置包括了有限可行集 F_0 内所有强有效的配置（在 F_0 中不存在另外某个配置能对一个局中人更好且对另一局中人也不差的意义上）。然而，非常低效率的配置也有可能成为均衡结果，包括 F_0 中任何低至 $\{t_1(2), t_2(1)\}$ 的配置，而 $\{t_1(2), t_2(1)\}$ 可以很接近达不成一致时的配置 $(0, 0)$。

即使 F_0 中只包含着有效配置，这个博弈一般也存在两个局中人都得到很 406
低期望支付的随机均衡。让我们增加 $t_1(1) > t_1(2)$ 和 $t_2(2) > t_2(1)$ 的弱假设，则条件 (8.18) 和 (8.19) 蕴含着

$$(1-p_2)\,t_1(1) > t_1(2) \quad \text{和} \quad (1-p_1)\,t_2(2) > t_2(1)$$

因而存在两个数 s_1 和 s_2，其中每一个都介于 0 与 1 之间，使得

$$t_2(1) = (1-p_1)\{s_1 t_2(2) + (1-s_1)(1-p_2)\,t_2(1)\}$$
$$t_1(2) = (1-p_2)\{s_2 t_1(1) + (1-s_2)(1-p_1)\,t_1(2)\}$$

现考虑如下的均衡。如果局中人 1 总是报价 $t(1)$ 而局中人 2 总是报价 $t(2)$，则每个局中人 i 总是在他做出报价的那些回合报价 $t(i)$，而在他收到另一局中人 j 的报价 $t(j)$ 的每一回合，他都以概率 s_i 接受它和以概率 $1-s_i$ 拒绝它来随机化。如果任一局中人 i 偏离了报价 $t(i)$，则局中人会如同 i 一顺从均衡中一样行动，其中 i 为第一个做出这种异常报价的局中人。

可以验证，这些策略构成了一个子博弈完美均衡。在第一个回合中，此时局中人 1 首先报价，局中人 1 在这个均衡下的期望支付是 $t_1(2)/(1-p_2)$，而局中人 2 的期望支付是 $t_2(1)$，故这个期望支付配置非常接近于对两个局中人来说都最差的均衡配置 $\{t_1(2), t_2(1)\}$。这个均衡可被称为**冷淡均衡** (standoff equilibrium)，因为每个局中人总是做出其最自私的报价，而在任一回合，这一报价只有很小的概率被接受。没有一个局中人 i 可以通过做出比 $t(i)$ 少一些自私的报价而得到增益，因为另一个局中人 j 会由此指望 i 很快就会做出更大让步而在下一回合中接受 $t(j)$，从而拒绝这个报价。就此推理而论，这个冷淡均衡在某些方面与 7.4 节中所讨论的重复博弈的阵地均衡有相似之处。

在定理 8.5 的假定下，实际上任何一个个人理性的报价都能在某个均衡中

被接受。这一结论表明，焦点效应在决定讨价还价过程的结果方面或许能起关键作用。谢林在其关于焦点效应的初期著作（1960）中实际上含有与我们在证明定理 8.5 时所构造的均衡非常类似的均衡的讨论。谢林指出，一旦局中人聚
407 焦到某个特定的配置（无论是历史传统、性质突出或在某个准则下明显的公平与效率等原因），讨价还价中的每个局中人都可能害怕提出任何一个使对方的状况更好的报价，因为对方或许会把这种让步理解为可取走一切的邀请。例如，谢林指出，朝鲜战争中反复的战斗不得不沿着该国的相当窄的腰部分界线停战而结束，因为在这条线上，某一方的撤军不会给对方留下想彻底放弃整个朝鲜的印象。由于同样的原因，国与国之间的边境线一旦划定，很少会再谈判。如果我们割让了我们国家的一小块领土，那将会给我们邻邦一种他们可以想取多少就取多少的印象。因此，我们必须把边境线维持在现存的边境线上，免得我们不能令人信服地把国界线划定在某个地方。

定理 8.5 在关于谈判和讨价还价的好战术方面有一定的含意，这些含意与定理 8.3 和 8.4 的含意形成对照，并对其加以补充。一般地说，定理 8.3 强调了开发一个人报价的可察觉的责任能力或潜在的定局能力的重要性。定理 8.4 强调了促进一个人可能会非理性地坚持某一特定配置（这对其本人有利）这一信念的重要性。而定理 8.5 强调了在谈判将采用哪个均衡的焦点效应的重要性。例如，定理 8.4 的不完全信息模型表明，在初步的谈判中，一个局中人可能会通过宣布他将必定坚持某个特定配置，并在宣布时尽量看起来狂热或超乎常理以图达到这个配置。相比之下，定理 8.5 的离散模型表明，局中人可能会通过首先描述某个客观准则，使得某个特定的配置依据这个准则在某种意义上是最自然或最合理的一个，然后再证明没有一个讨价还价者能在这个明显合理的配置之外提供让步而又不留下他将放弃一切的印象，从而实现这一特定配置。

定理 8.3 和 8.4 的模型中均衡的唯一性与定理 8.5 中均衡的广泛存在形成鲜明对照。不过，给定任一很小的正数 ε，若 F_0 是 F 中 ε－稠密的，则定理 8.5 中的所有均衡都对应于定理 8.3 中博弈的 ε－均衡。因此，与定理 8.3
408 相比较，定理 8.5 指出，我们应该谨防不要对一个具有很大 ε－均衡集的博弈中某一均衡的唯一性太过关注，所有这些 ε－均衡可能都是这样的博弈的均衡，它们与给定博弈只稍有不同，并可能与任何给定的现实局势的模型一样好。

另一方面，从定理 8.5 的角度来看，定理 8.3 和 8.4 的模型也可被解释为能够决定得以实施的焦点均衡的准则。一般而言，当局中人涉及到某个具有很大均衡集的给定博弈时，如果存在这个博弈的某个明显的或凸出的扰动以致只有一个均衡，那么，局中人可能会自然地聚焦到实施所给定博弈与凸出扰动的均衡最接近的均衡。因此，举例来说，假设两个风险中性的局中人在一个具有 $p_1 = p_2 = .0001$ 的轮流报价博弈中就如何分配 30.00 美元而讨价还价，但在他

们的报价中，两个支付都只能是0.01美元的整数倍。那么，条件（8.18）和（8.19）都是满足的，故任一个人理性的结果都是此离散轮流报价博弈的一个均衡。不过，局中人可能会自然而然地将他们的局势与对应的连续轮流报价博弈进行比较，而在连续的情况下，对报价为.01美元整数倍的限制被去掉了。在离散的轮流报价博弈的所有可能报价中，（15.00，15.00）最接近于这一连续轮流报价博弈唯一的均衡结果；而这一事实或许会使一个均衡成为焦点均衡，其中配置（15.00，15.00）是实际进行的离散博弈的结果。

[以上二节只是对序贯报价讨价还价博弈分析的一个介绍，在这方面有大量且日益增加的文献，也可参见索贝尔和高桥（Takahashi，1983）；富登伯格、莱文和泰罗尔（1985）；宾莫尔、鲁宾斯坦和沃林斯基（Wolinsky，1986）；萨顿（Sutton，1986）；鲁宾斯坦（1987）；以及奥苏贝尔和德内克雷（Ausbel and Deneckere，1989）。]

8.10　再谈判

上一节的分析说明，从对现实讨价还价博弈的非合作分析可能很难甚至不可能导出局中人将达到一个有效的效用配置这一简单结论。不过，在许多局势中，做出如下假定可能是合理的：通过类似“让我们实施这个均衡吧，它对我们双方都更好”的谈判声明，局中人能将他们的焦点期望协调到一个帕累托有效的均衡配置上。因此。如果帕累托有效性不能从非合作分析中导出，那么在这样一个局势的任一博弈模型的分析中，其中局中人有充分的机会在此博弈开始时就以丰富的共同语言有效地谈判，把效率作为一个基本假定可能合乎情理。也就是说，如果局中人在一个展开型博弈开始时能有效地谈判，但只能在开始时谈判，那么，在没有给所有局中人更高期望支付的序贯均衡这个意义上来讲，我们可以假定实际实施的均衡将是一个在序贯均衡内至少是弱有效的均衡。

409

不过，如果局中人可以在博弈进行期间内不止一个时点上有效地谈判，则谈判的效果就会多少有些不同。如果在此博弈的某个稍后阶段，一个类似的谈判过程将使局中人聚焦到另外某个均衡，那我们就不应该指望智能的局中人在博弈之初能通过某个谈判过程而说服他们自己聚焦到实施某个均衡。局中人应该不能谈判出一个以后将再谈判的均衡。有关**再谈判验证均衡**（renegotiation-proof equilibria）及其相关概念的各种定义已由伯恩海姆、皮莱格和惠斯顿（1987）；伯恩海姆和雷（Ray，1989）；法雷尔和马斯金（1987）；皮尔斯（1987）；以及贝努瓦和克里施纳（1989）等提出。作为对这一主题的一个入门介绍，我们在此考虑曾由贝努瓦和克里施纳所研究过的一个简单例子（表8-3）。

表 8-3 在一个有限重复博弈中，任一回合对所有行动组合的支付

1的行动	2的行动			
	a_2	b_2	c_2	d_2
a_1	0，0	2，4	0，0	6，0
b_1	4，2	0，0	0，0	0，0
c_1	0，0	0，0	3，3	0，0
d_1	0，6	0，0	0，0	5，5

这是一个如下进行 K 个回合的两人博弈，其中 K 是某个给定的正整数。在每个回合，知道两个局中人所有的过去行动之后，每个局中人 i 必须在集
410 $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ 中选择一个行动。对局中人 1 和 2 支付的增量贡献按照表 8-3 那样分别取决于他们的行动。每个局中人在此博弈中所得到的支付是全部 K 个回合中对其支付的增量贡献之和。

这个博弈存在这样的序贯均衡，其中每个局中人的期望总支付是 $5K-2$（它对应于每个回合均值为 $5-2/K$）。在一个这样的均衡中，局中人应该在每个回合都采用 (d_1, d_2) 直至最后一个回合，且在最后一个回合采用 (c_1, c_2)，除非在最后一个回合之前某一人 i 就偏离了其行动 d_i；如果任一局中人在最后一个回合之前偏离了 (d_1, d_2) 那么，若局中人 1 首先偏离，则局中人此后被假设实施 (a_1, b_2)，而若局中人 2 首先偏离则实施 (b_1, a_2)；但若两人同时首先偏离，则实施 (c_1, c_2)；我们称这个均衡为**冷酷均衡**（grim equilibrium）。这是一个子博弈完美和序贯的均衡，因为只要预期另一个局中人会遵循其均衡策略，那就没有一个局中人能通过单方面偏离其均衡策略而受益。

现在假设局中人能在每个回合开始时对此均衡进行有效地再谈判。考虑在某一局中人做出了一个初始的偏离此均衡所规定的行动组合 (d_1, d_2) 之后的下一回合所能出现的局势。令 J 表示博弈剩下的回合数，并设 $J \geqslant 2$ 且偏离者是局中人 1。在余下要进行的子博弈中，按照原来 K 个回合博弈的冷酷均衡，局中人 1 的总支付将是 $2J$，而局中人 2 的总支付将是 $4J$，但是，如果两个局中人不顾过去 $K-J$ 个回合而再谈判，并对这个 $J-$ 回合的博弈按照重新开始的冷酷均衡策略进行，那他们在这个子博弈中将做得更好，并都得到 $5J-2$。也就是说，只要有人留意，每个局中人都有做出如下谈判演讲的动机：

> 刚刚发生了一个错误，在这样的一个错误之后，我们已经预见到会进入惩罚模式，而且这样的惩罚甚至是公正的，但它现在对我们谁也没有任何好处。让我们原谅过去的错误，并回到 d_1 和 d_2 吧！但是，也让我们考虑现在就充分地警戒我们自己，以后的偏离将不会再被如此平等地原谅。不管是谁做出了下一次偏离，他应该明白在此后的每个回合都只能得

到支付 2。

如果局中人能如此对均衡再谈判，那冷酷均衡就可能不那么令人信服了，因为每个局中人都可能指望通过这种再谈判对其倒数第二个回合之前的任何偏离行为逃脱惩罚。也就是说，尽管冷酷均衡在整个博弈中是帕累托有效的，但在某 411
些子博弈中却不是帕累托有效的，从而作为结果，它不是再谈判验证的均衡。

这种两人有限重复博弈（具有完全状态信息和完全可观察的行动）的**再谈判验证均衡**可以归纳地定义如下。在任何单回合博弈中，一个再谈判验证均衡是这样一个均衡，即在此单回合博弈中不存在其他的均衡对两个局中人来说都与其一样好或比其更好，并且至少对一个局中人要严格地更好。在任一 J - 回合的博弈中，一个再谈判验证均衡是一个子博弈完美均衡，使得它在所有的 $(J-1)$ - 回合子博弈中（从这个 J - 回合博弈的第二个回合开始）都是再谈判验证的均衡，并且不存在其他的子博弈完美均衡在所有的 $(J-1)$ 回合子博弈中都是再谈判验证的均衡，亦即在 J - 回合博弈中，不存在其他的子博弈完美均衡对两个局中人来说都与这个再谈判验证均衡一样好或较之更好，且至少对一个局中人要严格地更好。

如果冷酷均衡不能成为再谈判验证均衡是由于蕴含着某种非理性的话，那么它可能是一个**合作或集体**非理性，但不会是**个人**非理性。在冷酷均衡的范围内（或在任一其他的序贯均衡中），没有一个局中人能指望通过在任一子博弈中单方面改变其策略来提高其期望支付。对于智能局中人来讲，对一个均衡进行再谈判的行动实质上一定是个合作行为，其中两个局中人要同时改变他们所计划使用的策略。

在本例中，对于任一偶数 K，都存在实质上唯一的一个再谈判验证均衡，具有如下结构。在每个奇数回合[①]，局中人应该选择 (d_1, d_2)，而在每个偶数回合，[②] 若局中人在前一回合的行动是 (d_1, d_2)，则他们应该选择 (c_1, c_2)；若前一回合的行动为 (d_1, a_2)，则选择 (b_1, a_2)；若前一回合的行动为 (a_1, d_2)，则选择 (a_1, b_2)；并且在其他任何可能的行动历史之后，选择 $\{(c_1, c_2), (b_1, a_2), (a_1, b_2)\}$ 中的某个行动组合。在这个均衡中，增量支付因而以概率 1 在每个奇数[③] 回合为 (5, 5)，而在每个偶数回合为[④] (3, 3) 故每个局中人在整个博弈中得到的总支付为 $4K$（平均每个回合的支付为 4）。

贝努瓦和克里施纳（1989）用归纳法证明了这一结论。在单回合的博弈中，(c_1, c_2)，(b_1, a_2) 和 (a_1, b_2) 是均衡集内仅有的帕累托有效均衡。

---

① 原文误为偶数回合——译者注。

② 原文误为奇数回合——译者注。

③ 原文为偶数回合——译者注。

④ 原文误为奇数回合——译者注。

在一个两回合的博弈中，没有其他的均衡对任一个局中人来说会好于上面所描
412 述的均衡，其中每个局中人都得到期望支付 3+5=8. 因此，(8.8) 是唯一可由一个两回合博弈的再谈判验证均衡产生的支付配置。现在归纳地假设，给定任一偶数 $K\geqslant 4$，$(4(K-2), 4(K-2))$ 是唯一可由 $(K-2)$ - 回合博弈的再谈判验证均衡生成的支付配置。于是，在 K - 回合博弈的一个再谈判验证均衡中，局中人不能指望因他们在最初两个回合中的行动对其在以后 $K-2$ 个回合中的支付有任何影响。因此，对 K - 回合博弈的前两个回合的分析一定与对一个两回合博弈的分析相同。在受到每个局中人在任一 $(K-2)$ - 回合子博弈中的期望支付必须是 $4(K-2)$ 的限制下，K - 回合博弈中没有均衡会对任一局中人好于这样的均衡，其中他们在第一回合选择 (d_1, d_2)，在第二回合选择 (c_1, c_2)，除非某个人在第一回合有利可图地偏离了 (d_1, d_2)，但在这种情况下，他将在第二回合被一个他只能从中得到 2 的单回合博弈所惩罚。在这样的一个均衡中，每个局中人都得到期望总支付 $4K$。

值得一提的是，对本例而言，存在着对两个局中人来说都严格好于任何再谈判验证均衡的子博弈完美均衡（如前所述的冷酷均衡）。所以，本例说明，在一个博弈以后各回合中有再谈判的机会，或许会以一种伤害双方的方式减少在以前各回合所能谈判出的均衡集。也就是说，博弈双方可能会因他们的行为应该在所有的子博弈中都是集体理性的这一约束而受到伤害。

习 题

8.1 约翰和玛丽正在讨论今晚是去看芭蕾舞、拳击比赛还是呆在家里的问题。他们有一个随机数字生成器，并且他们一致同意其决策无论如何要取决于随机数字生成器的输出，以至形成了一张在 3 种可能结果（去看芭蕾舞、拳击比赛或呆在家里）上具有某个概率分布的彩票。如果他们不能取得一致同意，那他们就呆在家里。约翰想去看拳击比赛，而对去看芭蕾舞与呆在家里是无差异的。至于玛丽，去看芭蕾是最好的，呆在家里最糟，而且在去看拳击比赛与
413 得到一张以 1/4 概率去看芭蕾和以 3/4 概率呆在家里的彩票之间是无差异的。他们两人都符合冯·诺依曼 - 摩根斯特恩效用理论的公理系。

a. 用一个两人讨价还价问题 (F, v) 描述这一局势，并计算其纳什讨价还价解。他们应该如何实施这个纳什讨价还价解？

b. 上面对这一局势的描述并未确定一个如 8.2 节中所定义的特定两人讨价还价问题。纳什讨价还价解的哪些公理性质使你无论如何还是回答了 (a) 的问题？

c. 找出约翰和玛丽的自然效用尺度，使得平等主义解和功利主义解同时与纳什讨价还价解相一致。

d. 如果电视机坏了，则对约翰来说是呆在家里的前景更加糟糕。为明确

起见，约翰对去看芭蕾舞与一张以 2/3 概率去看拳击比赛和以 1/3 概率呆在家里而同一个坏电视机相伴的彩票无差异。一个坏电视机并不影响玛丽的偏好。如果玛丽弄坏电视机，她弟弟（一个电视修理工，明天会来吃早饭）将免费修好它。弄坏电视机是如何改变纳什讨价还价解中去观看芭蕾的概率的？

8.2　假设 ϕ 是具有有界可行集的两人讨价还价问题的一个解概念，且 ϕ 实际上并不依赖于不一致同意点。即，对 $\mathbf{R}^2$ 的任一闭凸有界可行集 F 和任意两个不一致同意点 v、w，均有 $\phi(F, v) = \phi(F, w)$。再假设 ϕ 满足 8.2 节中的公理 8.1、8.3 和 8.4（强有效性、尺度协变性及不相干选择对象的无关性）。证明：ϕ 要么必须总是选择对局中人 1 最强有效的配置，要么必须总是选择对局中人 2 最强有效的配置（这一结论关系到社会选择理论中的许多一般结论；参见阿罗（Arrow，1951）；森（Sen，1970））。

8.3　假设 $x \in F$，$y \in F$，$x_1 = v_1$，$y_2 - v_2$ 且 $.5x + .5y$ 是 F 中的一个强有效配置。证明：$.5x + .5y$ 是 (F, v) 的纳什讨价还价解。

8.4　假设局中人 1 要求 F 中的一个配置 x，而局中人 2 要求 F 中的一个配置 414
y，其中 $x_1 > y_1$ 且 $y_2 > x_2 > v_2$。对于每个局中人 i，令 q_i 为局中人 i 将愿意接受一张以概率 q_i 给出不一致同意 v 并以概率 $1 - q_i$ 给出 i 所要求配置向量的彩票的最大概率，此时的备选对象为接受另一局中人所要求的配置向量。证明：如果局中人 1 所要求的是 (F, v) 的纳什讨价还价解，而局中人 2 所要求的是 F 中任一其他向量，则 $q_1 > q_2$（参见哈森伊，1956）。

8.5　考虑表 8-4 中作为一个具有可转让效用合作博弈的策略型博弈。

表 8-4　　**一个具有可转让效用的策略型博弈**

	C_2		
C_1	x_2	y_2	z_2
x_1	10，0	7，1	−4，−4
y_1	0，10	4，0	5，5

a. 找出唯一的非合作博弈均衡结果。如果这个结果是不一致同意点，那么，纳什讨价还价解是什么？

b. 为每个局中人计算其最小化最大值。如果每个局中人的最小化最大值为不一致同意时的支付，那么，纳什讨价还价解是什么？

c. 计算局中人 1 和 2 如 8.5 节中所定义的理性威胁。指出所得到效用配置

空间中的不一致同意点，并计算出此得到的纳什讨价还价解。

d. 在我们于 8.5 节中所考虑过的理性威胁模型中，威胁实际上并没有被实施的机会。现在让我们考虑一个更复杂的三阶段讨价还价过程的模型，其中的威胁可能会被实施。

在讨价还价过程的第一阶段，每个局中人 i 在区间 $[0, 1]$ 上独立地选择一个概率 q_i [或一个**认同指数** (agrecability index)]。在第二阶段，这些概率
415 q_1 和 q_2 已公开地暴露给两个局中人之后，每个局中人 i 独立地在 C_i 中选择一个威胁策略 c_i。在第三阶段，要么达成一致要么达不成一致，且达成一致的概率是 q_1q_2。如果出现了不一致同意，则每个局中人 i 必须执行其选择的威胁策略 c_i，且他们得到相应支付（如上面在原策略型博弈中所规定的那样）。如果达成一致，那局中人就得到此博弈的纳什讨价还价解，其中不一致同意点是他们在同时执行他们所选择的威胁策略时得到的支付配置。

找出此三阶段讨价还价博弈的一个子博弈完美均衡，其中达成一致的概率为正。

8.6 假设 8.7 节中的轮流报价博弈如下进行：可行集 $F=\{(x_1, x_2) \mid x_1+x_2\leqslant v_{12}\}$，不一致同意支付为 (v_1, v_2)，及终止概率为 (p_1, p_2)，其中 $v_{12}>v_1+v_2$。作为这些参数 $(v_{12}, v_1, v_2, p_1, p_2)$ 的函数，局中人 1 和 2 在子博弈完美均衡中总是做出的报价的一般公式是什么？

8.7 （仲裁分析，取自克劳福德，1979，1981。）局中人 1 和 2 已把他们的讨价还价问题交给一个仲裁者。局中人 1 和 2 的可行效用配置集是

$$F=\{(x_1, x_2) \mid 2x_1+x_2\leqslant 150 \quad 且 \quad x_1+2x_2\leqslant 150\}$$

于是，诸如 (75, 0)、(50, 50) 和 (0, 75) 都是 F 中强有效的配置。在仲裁中，每个局中人都必须独立地确定 F 中的一个配置作为报价，仲裁人将再从这两个报价中选择其一。不幸的是，这个仲裁人有着奇怪的准则，并将选出使量 $(x_1)^2+(x_2)^2$ 较小的那个报价。如果两个局中人的报价使这个量相同，则此仲裁人将各以概率 1/2 随机地选择任一报价。

a. 首先假设在仲裁人的选择之后不允许有进一步的讨价还价，从而仲裁人所选择的报价将是局中人实现的支付配置 [此即**最终报价仲裁** (finnal-offer arbitration)]。找出此博弈的一个均衡。

b. 现在假设，在仲裁人的选择宣布之后，报价被仲裁人选中的那个局中
416 人可以在 F 中提出一个后续报价。然后，另一个局中人（报价未被选中者）可以在仲裁人所选择的报价与后续报价之间选择其一，且他选择的这个报价将是局中人实现的支付配置。找出此博弈的一个子博弈完美均衡。在这个均衡中，每个局中人的期望支付是多少？

c. 现在假设，在仲裁人的选择宣布之后，报价未被仲裁人选中的那个局中人可以在 F 中提出一个后续报价。然后，报价被仲裁人选中的局中人可以在仲裁人所选择的报价与后续报价之间选择其一，且他选出的这个报价将是局中人实现的支付配置。找出此博弈的一个子博弈完美均衡。在这个均衡中，每个局中人的期望支付是多少？

9

合作博弈中的联盟

9.1 联盟分析概述

上一章我们只对两人博弈考虑了其中的讨价还价与合作的问题。初看起 417
来，似乎很容易把讨价还价问题的定义和纳什讨价还价解推广到多于两个局中人的博弈，令 N= {1，2，…，n} 为局中人集，并用 $\mathbf{R}^N$ 的一个闭凸子集 F 表示局中人全部一起工作时所能得到的可行支付配置集，令 $(v_1, \cdots, v_n)$ 为局中人不合作时所预期的不一致同意支付配置，并假设 $\{y \in F \mid y_i \geqslant v_i, \forall i \in N\}$ 是一个非空有界集，那么二元组 $\{F, (v_1, \cdots, v_n)\}$ 可以被称为一个 ***n* 人讨价还价问题**（n-person bargaining problem）。

给定任一这种可行集 F，它是 $\mathbf{R}^N$ 上的一个子集，我们说 x 是 F 中**弱（帕累托）有效的**［weaktly (Pareto) efficient］，当且仅当 $x \in F$ 且 F 中不存在其他的向量 y，使得对 N 中的每个 i 都有 $y_i > x_i$。我们说 x 是 F 中**强（帕累托）有效的**［strongly (Pareto) efficient］，当且仅当 $x \in F$ 且 F 中不存在另外的向量 y 使得对 N 中的每个 i 都有 $y_i \geqslant x_i$，而 N 中至少存在一个 j 使 $y_j > x_j$ 成立。

再假设 F 中存在某个 y 使得对每个 i 都有 $y_i > v_i$，在这个意义上，即说 $\{F, (v_1, \cdots, v_n)\}$ 是本质的。那么，这样一个 n 人讨价还价问题 (F, v) 的纳什讨价还价解可被定义为能最大化纳什积

$$\prod_{i \in N} (x_i - v_i)$$

的唯一强有效向量 x，x 是从 F 中满足对每个 i 均有 $x_i \geqslant v_i$ 的所有向量中选取 418
的。不难证明，这个讨价还价解可以由纳什公理的广义形式推导出来。

不过，当 n 大于 2 时，由于这个 n 人纳什讨价还价完全忽视了局中人子集中间的合作可能性，所以并未被广泛地应用于对合作博弈的分析，局中人集的任何一个非空子集都可以被称为一个**联盟**（coalition）。研究两个以上局中人的合作博弈的一般理论，必须包含一个联盟分析的理论，但这已超出上述 n 人讨价还价问题简单模型的研究范围。

作为对两个以上局中人合作博弈中联盟分析问题的入门，考虑下述两个策略型博弈给出的例子，在每个博弈中，局中人集是 $N = \{1, 2, 3\}$，且每个局

中人 i 的策略选择集是

$$C_i=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\in\mathbf{R}^3:x_1+x_2+x_3\leqslant 300\quad 且\quad \forall j,\ x_j\geqslant 0\}$$

也就是说，在这两个博弈中，每个局中人都可以提出一个对 3 个局中人的支付配置，但不能有局中人的支付为负，也不能让 3 人的支付之和超过 300，在例 9.1 中，如果 3 个局中人提出相同的配置方案，那就让他们得到这个配置，否则，每人都得到 0。即令

$$u_i^1(c_1,\ c_2,\ c_3)=x_i\quad 若\quad c_1=c_2=c_3=(x_1,\ x_2,\ x_3)$$
$$u_i^1(c_1,\ c_2,\ c_3)=0\quad 若对某个\ j\ 和\ k\ 有\ c_j\neq c_k$$

在**例 9.2** 中，若局中人 1 和 2 提出相同的配置方案，这种情况下他们就得到这个配置，否则，每个局中人都得到 0，即令

$$u_i^2(c_1,\ c_2,\ c_3)=x_i\quad 若\quad c_1=c_2=(x_1,\ x_2,\ x_3)$$
$$u_i^2(c_1,\ c_2,\ c_3)=0\quad 若\quad c_1\neq c_2$$

在这两个博弈中，局中人可以联合实现任何一个支付为非负且 3 人的支付和小于或等于 300 的配置，每个局中人能保证自己得到的最小化最大值是 0，这就是说，我们可以通过令

$$F=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\in\mathbf{R}^3\mid x_1+x_2+x_3\leqslant 300\quad 且\quad \forall j,\ x_j\geqslant 0\}$$

和 $\quad (v_1,\ v_2,\ v_3)=(0,\ 0,\ 0)$

419 把这个博弈描述成为一个 3 人讨价还价问题。根据这个可行集和不一致同意配置，前面讨论的 3－人纳什讨价还价解将为这两个博弈都选择配置（100，100，100），而实际上对例 9.1 来说，这或许是一个合乎情理的结果。然而对例 9.2 来说，配置（100，100，100）应该说相当不合情理，在例 9.2 中，局中人 1 和 2 可以一起决定支付配置，而无需从局中人 3 那里得到任何帮助。于是，我们可以预料局中人 1 和 2 会简单地把可利用支付在他们自己之间分配，如果局中人 1 和 2 无视局中人 3 并像在一个两人合作博弈中那样行事，那么，纳计讨价还价解将确定他们应该把他们所能得到的最大总支付在他们自己之间平均分配，丝毫不给局中人 3；故结果将是支付配置（150，150，0）。

在我们彻底把（100，100，100）作为例 9.2 的一个不合理预测而打发掉之前，让我们仔细地审查一下隐含在这个拒绝中的假设。给定局中人必须同时选择他们的建议，对于局中人 1 和 2 而言，（100，100，100）的建议将是一个均衡，正如（150，150，0）的建议也是一个均衡一样，即使我们增加无代价且不具约束力的局前通信的可能性，仍存在一个局中人 1 和 2 都预料对方会不顾通信中所说的一切（包括诸如“让我们排挤掉局中人 3 而提议（150，150，0）吧”之类陈述，因为每个人都把对方的陈述理解为无意义的唠叨而不是英语），并且两人都选择了最终的建议（100，100，100）。如果局中人 3 在这种

事情上有任何影响力的话，他必定将会去促进局中人 1 和 2 之间的这种相互误解，以让他们可能会聚焦于这样一个均衡上。因此，我们把（100，100，100）作为例 9.2 的一个不合理结果，所需要的关键假设是，局中人 1 和 2 在 C_1 和 C_2 中选择策略之前能够有效地谈判，以使他们能聚焦于一个他们喜欢的均衡。

一般地，当我们说一个局中人联盟的成员可以**有效地谈判**（negotiate effectively）时，我们的意思是，如果联盟成员的策略中存在一个可行的变化能使他们全部受益，那他们将同意实际做出这样一个变化。除非它与联盟中某些成员与联盟外的其他局中人之间可能形成的协议相矛盾，即与另外某个同等 420
有效的联盟的协议相矛盾。合作博弈理论区别于非合作博弈理论的关键假设正是这个局中人能有效谈判的假设。如果唯一能有效谈判的联盟是包括 N 中全部局中人的**大联盟**（grand coalition），那么，n 人纳什讨价还价解可能会是适当的，不过，我们将在本章中的大部分（除 9.5 节外）转而假设所有的联盟都可以有效地谈判。

于是，在涉及到 3 个或 3 个以上局中人的合作博弈中，我们还必须考虑局中人集的某个子集可单独形成一个合作联盟，在例 9.1 中，没有小于 $\{1, 2, 3\}$ 的联盟可以保证其成员能得到大于 0 的支付；但在例 9.2 中，联盟 $\{1, 2\}$ 可以保证其成员能得到在 $\{1, 2, 3\}$ 中所能得到的任何支付配置，n 人讨价还价问题是两个以上局中人合作博弈的一个不充分的表示，因为它删除了所有有关不同于大联盟 N 的多人联盟的功能方面的信息。

合作博弈理论由于交叠联盟之间竞争的可能性而异常复杂。举例而言，现在考虑例 9.3，它与前面两个例子的不同之处在于，如果有两个局中人（$\{1, 2\}$，$\{2, 3\}$ 或 $\{1, 3\}$）提出相同的配置，那他们就得到这个配置，否则，每个局中人都得到 0。即令

$$u_i^3(c_1, c_2, c_3) = x_i \quad \text{若对 } j \neq k, c_j = c_k = (x_1, x_2, x_3)$$
$$u_i^3(c_1, c_2, c_3) = 0 \quad \text{若} \quad c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_1$$

在我们假设每个联盟都能有效地谈判时，对此博弈的分析可能会变得相当复杂。由于三个局中人在此博弈中的角色对称，并能通过合作行动得到多至 300 的总支付，故预测此博弈的结果应是配置（100，100，100）可能会十分合理。不过，如果局中人 1 和 2 在联盟 $\{1, 2\}$ 中有效地谈判而同意两人都提出配置（150，150，0），那他们能做得更好。然而，如果这是博弈的预期结果，则局中人 3 就会急于说服另外某个局中人与其组成一个有效联盟。例如，局中人 3 宁可与局中人 2 谈判达成两人都提出（0，225，75）的协议，也不愿看到（150，150，0）是此博弈的结果。但是，若（0，225，75）是预期在没有进一步谈判情况下的结果，那局中人 1 会乐意与局中人 3 达成下述协议：两 421
人都提出同一个对他们二人都更好的配置，比方说（113，0，187）。事实上，在这个博弈的任一均衡中，总至少存在一对局中人，他们可通过联合一致的改

变他们的策略而做到严格地更好。也就是说，对两个未得到全部支付的局中人而言，总存在一种排挤第三个局中人并将其支付在他们自己中分配的动机。但在某一时刻，联盟谈判的过程必须停止。

说明联盟谈判如何可能停止的方法之一是假定，一个局中人在作为一个联盟的一部分而谈判达成一个协议之后，以后他不能再与未包含原联盟全部成员的其他联盟谈判另一个不同的协议。在这一假定之下，如果大联盟 {1，2，3} 在任何一个两人联盟单独谈判之前就谈判达成协议（100，100，100），那此后就没有一个两人联盟能通过对付第三个局中人的谈判来推翻这个协议。另一方面，如果联盟 {1，2} 是第一个进行谈判的联盟，而且他们都同意（150，150，0），那局中人 3 将不可能通过与局中人 2 或局中人 1 单独谈判以增加他自己的支付。因此，在这个假定下，联盟能够相遇谈判的顺序在确定博弈结果时具有举足轻重的作用，并且优势属于较早谈判的联盟。

另一种方法是，假定谈判协议只是暂时的、也不具约束力；因此，在不同联盟中进行一系列谈判的局中人可以取消其以前的协议，而与后来的谈判联盟达成不同的协议。这个假设也意味着，博弈结果可能会依赖于不同联盟的谈判顺序，或者依赖于用什么规则来确定这个顺序。不过，这个假定使后谈判的联盟占据优势，因为没有一个联盟会指望其将由另一后来的联盟再谈判的协议付诸实施。例如，如果局中人会按外生给定的顺序即先是 {1，2}，其次 {2，3} 第三 {1，3}，最后 {1，2，3} 相遇谈判，那么这个博弈的结果应该对局中人 2 给出支付 0，任何一个先谈判联盟所确定的协议，只要局中人 1 和 3 所得到的总支付少于 300，那当局中人 1 和 3 谈判时，他们将会推翻那个协议，而且局中人 2 在联盟 {1，2，3} 中将不能让他们改变这个协议。作为另一个例子，
422 假设局中人 1 相信，如果他与局中人 2 在联盟 {1，2} 中谈判达成一个协议，那局中人 3 此后又有机会在联盟 {2，3} 中与局中人 2 谈判。在这种情况下，局中人 1 或许会理性地拒绝与局中人 2 就（150，150，0）进行谈判来反对以前就（100，100，100）达成的协议，因为这种谈判将转而激发 2 与 3 之间的进一步谈判，他们的谈判可能导致局中人 1 最终得到支付 0。

在大多数个人能在不同联盟中谈判的现实局势中，这些联盟谈判的潜在结构比我们能希望去分析的任何规则都要复杂得多。换句话说，任何能明确在每个时点上哪个局中人集能相遇谈判的简便规则（可能作为谈判过程先前历史的一个函数）在实践中都必定是不现实的。于是，对我们的合作博弈理论就有一个要求，在不明确所有这 2^n-1 个不同联盟的顺序时，从所有这些可能的联盟中的权力平衡能预测出什么，该理论应该给我们某种启示。但另一方面，这样一种排序或许相当重要的事实告诉我们，在解释或应用任何这种顺序无关的理论时，要有会发现某些困难的准备。

9.2　可转让效用下的特征函数

由于一个 n - 人博弈中 2^n-1 个不同联盟之间的相互作用可能会太过复杂，所以在合作博弈理论中常要利用**可转让效用**（transferable utility）的简化假设。也就是说，如在 8.4 节中所讨论的那样，通常假定有一种商品——称为货币，局中人可以在他们中间自由转让该商品，且任一局中人的效用支付都因其多得到一个单位的货币而增加一个单位。

借助于可转让学用，一个博弈的合作可能性可以用一个对联盟 S 都指定一个数 $v(S)$ 的特征函数（characteristic function）v 来描述。此处的 $v(S)$ 被称为联盟 S 的**价值**（Worth），它表示 S 中成员无需求助于 S 之外的局中人所能得到的可转让效用的总量。在任何一个特征函数中，我们总是令

$$v(\varnothing)=0$$

其中 $\varnothing$ 表示空集。一个特征函数也可被称为一个**联盟型博弈**（game in coalitionat form）或一个**联盟博弈**（coalitional game）。

在例 9.1 中，特征函数为

$$v(\{1,2,3\})=300,\ v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=0$$

及

$$v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0$$

423

在例 9.2 中，特征函数是

$$v(\{1,2,3\})=300=v(\{1,2\}),\quad v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=0$$

及

$$v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0$$

在例 9.3 中，特征函数是

$$v(\{1,2,3\})=300=v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})$$

及

$$v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0$$

注意，在可转让效用的假定之下，为每个联盟规定一个单独的数字足以描述联盟成员所能实现的效用配置。因而，考察例 9.3 的特征函数，我们可以看到在这个博弈中，3 个局中人一起或其中任意两个合作者都能从任何一种相互同意的方式在他们自己中间分配这 300 个单位的支付（比方说“美元”），但单独的每个局中人都只能保证其自己的支付为 0。

在第 8 章（8.2 和 8.5 节）中，我们考虑了从两人策略型博弈导出不一致同意点的 3 种不同方法：最小化最大值、非合作均衡和理性威胁。这些思想中的每一个都可被推广成从 n - 人策略型博弈导出特征函数的一种方法。

给定一个具有可转让效用的策略型博弈 $\Gamma=(N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$，冯

·诺依曼和摩根斯特恩（1944）提出应把特征函数定义为

$$v(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S}\in\Delta(C_{N\setminus S})} \max_{\sigma_S\in\Delta(C_S)} \sum_{i\in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \tag{9.1}$$

这里的 $N\setminus S$ 表示 N 中不在联盟 S 内的所有局中人组成的集。对任一联盟 T，$C_T=\times_{j\in T}C_j$，故 $\Delta(C_T)$ 是联盟 T 可用的相关策略集。当相关策略 σ_S 和 $\sigma_{N\setminus S}$ 被独立执行时，我们令 $u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S})$ 为局中人 i 在货币转让之前的期望支付；即

$$u_i(\sigma_S,\sigma_{N\setminus S}) = \sum_{c_S\in C_S} \sum_{c_{N\setminus S}\in C_{N\setminus S}} \sigma_S(c_S)\sigma_{N\setminus S}(c_{N\setminus S})\, u_i(c_i, c_{N\setminus S})$$

424 因此，(9.1) 式表明，$v(S)$ 是联盟 S 的成员在对付互补联盟 $N\setminus S$ 的最佳攻击威胁时所能保证得到的最大效用支付和，如果 (9.1) 式成立，那我们就称 v 为具有可转让效用的策略型博弈 Γ 的联盟型**最小化最大表示**（minimax representation）。

通过假定将用实质上防御性的均衡策略组合相互进行博弈的互补联盟，也能导出特征函数。那就是，我们称 v 为具有可转让效用的策略型博弈 Γ 的一个联盟型**防御均衡表示**（defensive-equilibrium representation）的充要条件是，对于每一对互补的联盟 S 和 $N\setminus S$，总存在策略 $\bar\sigma_S$ 和 $\bar\sigma_{N\setminus S}$，使得

$$\bar\sigma_S \in \operatorname*{argmax}_{\sigma_S\in\Delta(C_S)} \sum_{i\in S} u_i(\sigma_S, \bar\sigma_{N\setminus S})$$

$$\bar\sigma_{N\setminus S} \in \operatorname*{argmax}_{\sigma_{N\setminus S}\in\Delta(C_{N\setminus S})} \sum_{j\in N\setminus S} u_j(\bar\sigma_S, \sigma_{N\setminus S})$$

$$v(S) = \sum_{i\in S} u_i(\bar\sigma_S,\bar\sigma_{N\setminus S}),\ \text{及}\quad v(N\setminus S) = \sum_{j\in N\setminus S} u_j(\bar\sigma_S, \bar\sigma_{N\setminus S})^*$$

哈森伊（1963）提出，特征函数可由纳什理性威胁准则的推广来导出，我们称 v 为具有可转让效用的策略型博弈 Γ 的联盟型**理性威胁表示**（rational-threats representation）的充要条件是，对于每一对互补的联盟 S 和 $N\setminus S$，总存在策略 $\bar\sigma_S$ 和 $\bar\sigma_{N\setminus S}$，使得

$$\bar\sigma_S \in \operatorname*{argmax}_{\sigma_S\in\Delta(C_S)} \left(\sum_{i\in S} u_i(\sigma_S, \bar\sigma_{N\setminus S}) - \sum_{j\in N\setminus S} u_j(\sigma_S, \bar\sigma_{N\setminus S}) \right)$$

$$\bar\sigma_{N\setminus S} \in \operatorname*{argmax}_{\sigma_{N\setminus S}\in\Delta(C_{N\setminus S})} \left(\sum_{j\in N\setminus S} u_j(\bar\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) - \sum_{i\in S} u_i(\bar\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right)$$

$$v(S) = \sum_{i\in S} u_i(\bar\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}),\ \text{及}\ v(N\setminus S) = \sum_{j\in N\setminus S} uj(\bar\sigma_S, \sigma_{N\setminus S})$$

正如在 8.5 节中讨论过的那样，这 3 种用联盟形式表示策略型博弈的方法之间的区别，可根据关于联盟保证进攻威胁和防御威胁的能力的备择假设给予解释。举例来说，联盟型最小化最大表示隐含地假定了，如果联盟 S 中的成

* 原文误为 $v(N\setminus S) = \sum_{j\in N\setminus S} u_j(\sigma_S, \bar\sigma_{N\setminus S})$ ——译者注。

员决定相互合作，但不与 $N \setminus S$ 中的局中人合作，则 S 应考虑 $N \setminus S$ 会进攻性地攻击 S。然而，进攻性地最小化 S 中局中人的支付和，一般来说不是 $N \setminus S$ 中局中人的最好利益，实际上后者想最大化他们自己的支付。为辨明 425
$N \setminus S$ 中的成员可能进攻性地对付 S 这个假定的合理性，我们需要假定，在设想所有局中人最终将作为大联盟 N 的一部分而共同合作，并就价值 $v(N)$ 的可能分摊进行谈判的时候，$N \setminus S$ 中的局中人可以联合实施只在 S 中的局中人与 $N \setminus S$ 中的局中人谈判破裂这种意外事件下的进攻性威胁。在这些谈判期间，$N \setminus S$ 中的成员应该要使 S 中的成员害怕，若达不成协议，将激发 $N \setminus S$ 对 S 进攻性攻击，因为这种害怕会使 S 中成员更急于避免与 $N \setminus S$ 中成员的争执并从而愿意把 $v(N)$ 的较大份额让与 $N \setminus S$ 中的成员。

值得指出的是，所有上述三种表示中，大联盟的价值是相同的，并可写成

$$v(N) = \max_{c_N \in C_N} \sum_{i \in N} u_i(c_N)$$

例如，考虑一个具有可转让效用的三人博弈，其中对于 $\{1, 2, 3\}$ 中的每个 i，$C_i = \{a_i, b_i\}$，支付配置 (u_1, u_2, u_3) 与三个局中人的策略之间的依赖关系示于表 9-1。这里 a_i 可以解释为一个“慷慨”策略，b_i 为一个“自私”策略。在最小化最大表示中，每个联盟 S 得到在其互补联盟中的局中人自私的情况下所能保证自己得到的最大支付。因此，联盟型最小化最大表示为

$$v(\{1, 2, 3\}) = 12, \quad v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 4$$

及　　$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1$

表 9-1　　一个具有可转让效用的策略型三人博弈

C_1	$C_2 \times C_3$			
	a_2, a_3	b_2, a_3	a_2, b_3	b_2, b_3
a_1	4, 4, 4	2, 5, 2	2, 2, 5	0, 3, 3
b_1	5, 2, 2	3, 3, 0	3, 0, 3	1, 1, 1

因为两人联盟的成员确实能通过同时慷慨而提高他们的支付和，所以通过假定 426
两个局中人在分属互补联盟时都会自私，而在同一联盟时都会慷慨，就能计算出防御均衡表示。于是，此博弈的联盟型防御均衡表示为

$$v(\{1, 2, 3\}) = 12, \; v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 4$$

及　　$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 5$

注意到，这个表示把优势给予了那个独自自私行动以对付慷慨的两人联盟的局中人。当同时考虑进攻与防御时，理性威胁准则将使此博弈中所有小于 N 的联盟都选择自私。于是，此博弈的联盟理性威胁表示为

$$v(\{1, 2, 3\})=12, \quad v(\{1, 2\})=v(\{1, 3\})=v(\{2, 3\})=2$$

及 $$v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=1$$

如果这 3 种联盟型表示全都一致，那我们就将说这个博弈具有**正交联盟**(orthogonal coalitions)。在经济局势中常会出现具有正交联盟的博弈，其中一个联盟对付另一个联盟所能做的最差事情就是拒绝与其交易。例如，考虑下述的**纯交易**（pure trading）博弈类。令 M 表示商品的一个有限集，对每个局中人 i 和每种商品 k，令 $\omega_k(i)$表示局中人 i 对商品 k 的初始拥有用于贸易的量。令$U_i(\chi(i))$表示局中人 i 从消费一束商品 $\chi(i)=(\chi_k(i))_{k\in M}$所得到的（可转让）效用，局中人 i 的一个策略就是他将从其初始禀赋中交付给其他每个局中人多少各种商品的任一规定，对于这样一个博弈，在如上定义的任一表示下，任一联盟 S 的价值是

$$v(S)=\max\left\{\sum_{i\in S}U_i(\chi(i)) \mid \sum_{i\in S}\chi(i)=\sum_{i\in S}\omega(i)\right\}$$

我们说一个特征函数 v 是**超可加的**（superadditive），当且仅当对于每一对联盟 S 和 T 均有

$$\text{若 } S\cap T=\varnothing, \text{ 则 } v(S\cup T)\geqslant v(S)+v(T)$$

427 可以证明，若 v 是策略型博弈的最小化最大表示，则 v 一定是超可加的。防御均衡表示和理性威胁表示不一定是超可加的。

对任一联盟型博弈 v，我们可以把 v 的**超可加覆盖**（superadditive cover）定义为对于所有联盟都具有最小可能价值的联盟型超可加博弈 w，使得对每个联盟 S 均有$w(S)\geqslant v(S)$。任何集 S 的一个**划分**（partition）是一族非空集 $\{T_1, \cdots, T_K\}$，使得

$$T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_k=S \text{ 且 } \forall j, \ \forall l\neq j, \ T_j\cap T_l=\varnothing$$

记 $\mathcal{P}(S)$ 表示 S 的所有划分组成的集，那么联盟型博弈 v 的超可加覆盖w 就满足方程

$$w(S)=\max\left\{\sum_{j=1}^{K}v(T_j) \mid \{T_1, \cdots, T_k\}\in\mathcal{P}(S)\right\}, \ \forall S\subseteq N$$

即超可加覆盖中一个联盟的价值是这个联盟被分解成一族更小的不相交联盟所能达到的最大价值，超可加覆盖的概念给我们一种对任一联盟型博弈定义一个超可加博弈的方法。

一旦明确了联盟型的一个表示，我们就可以试着去预测局中人之间讨价还价的结果。这样的一种分析通常是基于如下假定：局中人将形成大联盟，并在某种讨价还价过程之后要在他们中间分摊价值 $v(N)$，但是，这个讨价还价过程的一个焦点均衡所形成的配置将取决于力量结构，而不是讨价还价过程方面的细节。一个局中人的**力量**（power）就是他通过同意或拒绝与任何局中人集

合作而对他们有所帮助或造成伤害的能力。于是，一个特征函数就是对一个博弈力量结构的概括描述。

9.3　核心

令 $v=(v(S))_{S\subseteq N}$是任一具有可转让效用的联盟型博弈，其中局中人集为 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$。一个**支付配置**（payoff allocation）就是 $\mathbf{R}^N$ 中的任一向量 $x=(x_i)_{i\in N}$，其中每个分量 x_i 都被解释为对局中人 i 的效用支付。

我们说一个配置 y 是**对联盟 S 可行的**（feasible for a coalition S）当且仅当

$$\sum_{i\in S} y_i \leqslant v(S) \qquad 428$$

S 中的局中人从而可以通过在他们中间分配共同合作所得到的价值 $v(S)$ 而实现各人在这个配置中的分量。当我们不具体针对某个特定的联盟而说一个配置是**可行的**时，那意味着它是对大联盟 N 可行的。

当且仅当 $v(S)>\sum_{i\in S}x_i$ 时，我们才说联盟 S 能**改进**（improve on）一个配置 x。也就是说，当且仅当存在某个对 S 可行的配置 y，使得 S 中所有局中人在 y 中都得到比在 x 中严格高的支付时，我们才说 S 可以改进 x。

当且仅当 x 是可行的，且不存在联盟能改进 x 时，配置 x 才在 v 的**核心**（core）中，即 x 在核心中的充要条件是

$$\sum_{i\in S} x_i = v(N) \quad 且 \quad \sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S),\ \forall S\subseteq N$$

于是，如果一个可行配置 x 不在核心中，那就存在某个联盟 S，使得 S 中的局中人可通过共同合作并在他们自己中间分配价值 $v(S)$ 而使他们都比在 x 中严格更好。

给定一个具有可转让效用的策略型博弈 Γ，如果我们计划用核心作为我们的解概念，那么联盟型最小化最大表示可能是从 Γ 推导出一个特征函数的合适方法。当 v 是最小化最大表示时，不等式 $\sum_{i\in S} x_i < v(S)$ 成立的充要条件是，无论 $N\setminus S$ 中其他的局中人怎么做，S 中的局中人都能保证他们自己得到比在 x 中严格更好的支付。

鉴于我们假定任何联盟都能有效地谈判，从而核心是一个非常有吸引力的解概念。对例 9.1 而言，只要全体局中人合作就能得到 300，故核心是

$$\{x\in\mathbf{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=300,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0\}$$

即核心在此博弈中对称地对待三个局中人，并包含了所有个人理性的帕累托有

效配置。

对例 9.2 而言，无需局中人 3，局中人 1 和 2 一起就能得到 300。核心便是

$$\{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 300,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 = 0\}$$

429 故局中人 3 在此博弈中的软弱性反应在核心上，其中他总是得到 0。

不幸的是，核心有可能是空的，如例 9.3 的核心就是空集，例 9.3 也可被称为**三人过半数博弈**（three-person majority game）。在此博弈中，大联盟可得到的价值也可由任意两个局中人实现。于是，当任一局中人 i 在一个可行配置中得到一个正的支付时，另外两个局中人一定得到比他们自己可以得到的价值（300）要少的价值。核心的空性或许有助于解释为什么这个例子的联盟谈判的动态看上去那么重要而又复杂。无论最终出现什么配置，总存在一个联盟，如果它能得到一次最后的机会去进行有效谈判以对付这个配置，那这个联盟总能受益。

还有一些博弈的核心是非空的，但看上去又相当极端。例如，考虑一个有 2 000 001 个局中人的博弈，他们中 1 000 000 个局中人每人可供应一只左手套，而另外 1 000 001 个局中人每人可以供应一只右手套。令 N_L 表示左手套供应者集，N_R 表示右手套供应者集，每个联盟的价值被定义为它能使手套配对（一只左手套与一只右手套）的个数，即

$$v(S) = \min\{|S \cap N_L|,\ |S \cap N_R|\}$$

（这里，对于任一联盟 T，$|T|$ 表示 T 中局中人的个数。）这个博弈的核心由唯一的配置 x 组成：

$$x_i = 1 \quad 若 \quad i \in N_L; \qquad x_j = 0 \quad 若 \quad j \in N_R$$

为了看出为什么这是核心中唯一的配置，假定某个右手套供应者在一个可行配置中有正的支付。那么，对其余 2 000 000 局中人的总支付一定小于 1 000 000，他们可以通过在他们自己中（没有这个有正支付的右手套供应者）匹配成 1 000 000 对而得到改进。要在经济学上解释这唯一的核心配置，我们或许会说，因为右手套处于超额供应，所以它们的市场价格为 0。然而，这一结论的敏感性相当惊人。如果我们只增加两名左手套供应者，唯一的核心配置将转换到如下配置：每个左手套供应者得到支付 0，而每个右手套供应者得到支付 1。

430 大博弈的核心的这种不稳定性可通过考虑 ε－核心而得以缓和。对任一数 ε，一个配置 x 属于联盟博弈 v 的 **ε－核心**（ε－core）或 ε－近似核心（ε-approximate core）的充要条件是

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad 和 \quad \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S) - \varepsilon |S|, \quad \forall S \subseteq N$$

即，若 x 在 ε－核心中，则没有联盟 S 能保证其所有成员都得到比他们在 x 中

所得到的要高 ε 的支付。对这个左手套－右手套博弈而言，一个配置 x 属于 ε －核心的充要条件是

$$\min\{x_i \mid i \in N_L\} + \min\{x_j \mid j \in N_R\} \geqslant 1 - 2\varepsilon$$

即，最糟的左手套供应者与最糟的右手套供应者一起必须至少得到 $1-2\varepsilon$。于是，对 1 000 000 个左手套供应者和 1 000 001 个右手套供应者，若 $\varepsilon > 0.0000005$，则对任一满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 的数 α，满足

$$x_i = 1 - \alpha, \quad x_j = \alpha / 1.000001, \quad \forall i \in N_L, \ \forall j \in N_R$$

的配置 x 属于 ε－核心。

尽管核心的逻辑吸引力是不言而喻的，但它可能是空集，这又迫使我们吹毛求疵地对其重要性产生疑问。事实上，给定一个博弈 v 和不属于 v 的核心的一个可行配置 x，我们不能断定局中人不会合作地同意配置 x。如果一个联盟能制定具有约束力的协议，其成员以后在得不到联盟中所有其他成员一致同意的情况下，不能撕毁协议，那么，能改进 x 的联盟的存在性就无足轻重，因为 S 中的某些局中人作为该联盟的成员由于有此约束力的协议而被阻止与其他联盟一起行动。另一方面，如果联盟不能形成具有约束力的协议，那么改进 x 的联盟 S 的成员仍可能回避反对配置的谈判，因为它们可能会害怕，无论他们同意什么样的改进，这个改进都可能被后来其他联盟的谈判推翻，最终会使 S 中的某些成员比在 x 中要差。

再则，即使一个配置 x 在 v 的核心中，并且联盟协议是具有约束力的，仍可能存在一些联盟讨价还价的形式，在这些形式下，可能会有某个联盟在讨价还价时阻止 x 的实现，例如，设 $N=\{1, 2, 3\}$，且

$$v(\{1, 2, 3\}) = 9, \quad v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 6 \qquad 431$$

及

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

假设一位律师向局中人提供一种帮助，如果他们全都签订给他代理权的合同，让他在所有的联盟讨价还价中代表他们行动，则他承诺将给他们核心配置 (3, 3, 3)。假设第二个律师宣布，如果三个局中人都签订给他代理权的合同，则他们将得到非核心配置 (4, 4, 1)。再假设两个律师都宣布，如果只有两个局中人与其签约，则这两个人每人将得到支付 3，而另一个局中人将得到支付 0。给定这两个律师的提议，这个隐含签约合同的博弈有一个均衡，其中所有局中人都与第一个律师签约并得到核心配置 (3, 3, 3)。然而，也有另一个均衡，其中三个局中人都与第二个律师签约并得到 (4, 4, 1)。但问题是，在这个非合作的签约博弈中，每个局中人的决策不是在“得到配置 (3, 3, 3)”和“与第二个律师签约”之间，而是在“与第一个律师签约（他可能给出 (3, 3, 3) 但也可能给 0)”和“与第二律师签约”之间选择。因为第一个律师不能保证

(3，3，3) 除非每人都与他签约，所以第二个律师能合法地阻止均衡中出现配置 (3，3，3)。

于是，核心的逻辑魅力暗含地基于以下假定，当一个联盟 S 思忖通过就另外某个可行配置 y 的谈判来合法阻止配置 x 时，(1) 先前的协议不能制止他们这样做，(2) 他们关于这样一个可选择配置 y 的协议将是最终协议，及 (3) 如果他们不能以整个联盟对这个选择 y 一致同意，那他们实际上将得到配置 x。

虽然这种假定在局中人较少的合作博弈的背景下看起来值得怀疑，但它们在精神实质上与分析大竞争市场时所做的假定的类型相当接近。在经济理论中，通常假定任何个人的小集合都能察觉到，尽管他们或能自由地就其他贸易条件进行谈判，但一般市场均衡向他们提供了固定的贸易条件，这个贸易条件甚至不受他们贸易决策的影响。基于这一见解，德布鲁和斯卡夫 (1963) 及奥曼 (1964) 证明了埃奇沃思 (Edgeworth，1881) 的一个古典猜想，即对于大市场博弈，核心实质上等价于竞争 (瓦尔拉) 均衡集。而且，卡尼科和伍德斯
432 (Kaneko and Wooders，1982)，伍德斯 (1983)，及伍德斯和赞姆 (1984) 证明了，从某种意义上来说，所有大型博弈都有非空的近似核心。

为了理解这些核心存在定理，我们从核心为非空的博弈的一般特性着手；这个特性是邦德雷瓦 (Bondereva，1963) 和沙普利 (Shapley，1967) 基于线性规划的对偶定理而提出。考虑这样一个问题，即对一个没有联盟能改进它的配置，如何找到必需的转移效用的最小量。这个问题是一个线性规划问题，并可表述如下

$$\underset{x\in\mathbf{R}^N}{\text{minimize}} \sum_{i\in S} x_i ,$$

$$\text{约束为} \quad \sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S) , \quad \forall S\subseteq N \tag{9.2}$$

[这个线性规划问题的最优解被称为局中人在 v 下的**平衡吸入** (balanced aspirations)，且当核心非空时，与核心相一致；参见克罗斯 (Cross)，艾伯斯 (Albers)，1979；及贝内特 (Bennett，1983)。] 我们令 $L(N)$ 表示 N 中局中人之间的所有联盟组成的集，故

$$L(N)=\{S \mid S\subseteq N \text{ 且 } S\neq\varnothing\}$$

于是如 3.8 节中所定义的那样，这个线性规划问题的对偶可写作

$$\underset{\mu\in\mathbf{R}_+^{L(N)}}{\text{maximize}} \sum_{S\subseteq N}\mu(S)v(S),$$

$$\text{约束为} \quad \sum_{S\subseteq\{i\}} \mu(S) = 1, \quad \forall i\in N \tag{9.3}$$

不难证明，这两个线性规划问题的约束可被一些适当的向量 x 和 μ 满足。因

此，根据线性规划的对偶定理，这两个问题存在最优解，且它们目标函数的最优值相等。即，对于任一给定的联盟型博弈 v，存在 $\mathbf{R}^N$ 中的一配置 x 和 $\mathbf{R}^{L(N)}$ 中的一个向量 μ，使得

$$\mu(S)\geqslant 0 \text{ 和 } \sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S), \quad \forall S\subseteq N \tag{9.4}$$

$$\sum_{S\supseteq\{i\}} \mu(S) = 1, \quad \forall i \in N \tag{9.5}$$

$$\sum_{S\subseteq N} \mu(S)v(S) = \sum_{i\in N} x_i \tag{9.6}$$

例如，若 v 是例 9.3（具有最大价值 3 00 的三人过半数博弈）所给定的博弈， 433
则当

$$x=(150,\ 150,\ 150), \quad \mu(\{1,\ 2\})=\mu(\{1,\ 3\})=\mu(\{2,\ 3\})=1/2$$

及其他所有的 $\mu(S)=0$时，这些条件便被满足。

一个在局中人集 N 上的联盟博弈 v 是**平衡的**（balanced），当且仅当，对 $\mathbf{R}_+^{L(N)}$ 中的任一 μ，均有

$$\text{若 } \mu \text{ 满足 (9.5) 式，则 } \sum_{S\subseteq N}\mu(S)v(S)\leqslant v(N)$$

线性规划问题（9.2）和（9.3）的最优解使目标函数有相同的最优值这一事实意味着，一个博弈 v 有非空核心的充要条件是，它是平衡的。

为了解释这个结论，我们需要用到线性规划的另外一些事实。如果一个线性规划问题具有最优解，那就一定有一个最优解是满足约束的向量集的极点或角点。这种极点有有限多个。如果约束方程的系数都是有理数，则每个极点的分量也都是有理数（参见切沃托，1983）。

注意到，对偶问题（9.3）的约束只依赖于局中人集 N，而与博弈 v 无关，因而，给定 N，存在一个有理向量的有限集——可行集的角点，使得对于 N 上的任何一个联盟博弈 v，这些向量中有一个是对偶问题（9.3）的一个最优解。令 K 是这些向量之分量的最小公分母。于是，对局中人集 N 上的任一联盟博弈 v，存在某个 μ 使 μ 是对偶问题（9.3）的一个最优解，并且对于每个联盟 S，$K\mu(S)$都是一个非负整数。对每个 S 令 $\eta(S)=K\mu(S)$，从而 (9.5) 和 (9.6) 式可写成

$$\sum_{S\supseteq\{i\}} \eta(S) = K, \quad \forall i \in N \tag{9.7}$$

$$\sum_{S\subseteq N} \eta(S)v(S) = K\sum_{i\in N} x_i \tag{9.8}$$

当然，K 本身是一个正整数，因此可假设我们复制原博弈 K 次，即考虑一个大博弈，其中对原博弈 v 中的每个局中人，有 K 个与这个局中人在能力上完全一致的不同的个人组成的联盟。我们可对这个由 v 生成的 **K－重复制博弈**（K－fold replicated game）v'做如下规范定义，令新的局中人集为 434

$$N' = N \times \{1, 2, \cdots, K\}$$

我们说 N'的一个子集 S'是 N 的子集 S 的一个**复制变型** (replicated version)，当且仅当对于 N 中的每个 i，若 $i \in S$，则集 $\{l \mid (i, l) \in S'\}$ 就有一个成员，而若 $i \notin S$，则它就没有成员。对 N'的任一子集 S'，若 S'是 N 的某个子集 S 的一个复制变型，则令 $w(S') = v(S)$；否则令 $w(S') = \min_{i \in N} v(\{i\})$。再令 K - 重复制博弈 v'是这个局中人集 N'上联盟博弈 w 的超可加覆盖。

条件 (9.7) 表明，我们可以做出 N'的一个划分，其中对于 N 的每个子集 S，都存在联盟 S 的 $\eta(S)$个复制变形 (回顾 $\eta(S)$是一个非负整数)。N'的这样一个划分恰好用了 N 中每个局中人 i 的 K 个拷贝 $\{(i, l) \in N'$，对 $l = 1, \cdots, K\}$，条件 (9.8) 表明，这样对 N'中局中人的一种划分将产生一个足够大的总可转让效用以给 N'中每个局中人 (i, l) 支付 x_i。最后，(9.4) 式表明，由于 x 不能被 N 上联盟博弈 v 中的任何联盟 S 改进，故这个支付也不能被 N'上联盟博弈 v'中的任何联盟 S'改进。即局中人集 N'上 K - 重复制博弈 v'的核心必定是非空的。这个论证证明了由卡尼科和伍德斯 (1982) 提出的下述定理。

定理9.1 *给定有限集 N，存在一个正整数 K 使得，对于任一在局中人集 N 上具有可转让效用的联盟型博弈 v，由 v 生成的 K - 重复制博弈的核心是非空的。*

举例而言，令 v 是例 9.3 中的三人过半数博弈，其中任何一对局中人都有价值 300。那么，只要 K 是偶数，K - 重复制博弈都会具有一个非空的核心。由于复制博弈的局中人总数为偶数，所以每个局中人都能与另一个局中人配成一个两人联盟而各得支付 150，并且没有联盟能改进它。另一方面，假定 K 是奇数，则 K - 重复制博弈有一个空核心，这是因为，若我们试图把 $3K$ 个局中人划分成一对一对，则一定会留下一个局中人没有成对。不过，对于 $3K$ 个局中人，有可能组成 $(3K-1)/2$ 个不
435 相交的对 (联盟)，每对的价值为 300，然后转让效用来达到其中每个局中人得到 $(300\ (3K-1)/2)/3K = 150 - 50/K$ 的配置。对于任一正数 ε，当 $K \geqslant 50/\varepsilon$，则这个配置在 ε - 核心中。因此，只要 K 充分大，K - 重复制博弈的 ε - 核心总是非空。

下述定理把这一结论扩展到一般的联盟型博弈，并已由卡尼科和伍德斯 (1982) 证明过。

定理9.2 *对任一有限集 N 上具有可转让效用的联盟型博弈 v 和任一正数 ε，存在一个整数 K^* 使得，对于每个大于 K^* 的 k，由 v 生成的 K - 重复制博弈的 ε-核心是非空的。*

(这里我只给出证明的一个框架，其思想是令 K^* 是由定理 9.1 所得到的数 K 的一个很大倍数。然后，除一小部分外，所有的局中人可被分成大小为 K 的不相交的联盟，其中他们都能得到核心配置，在每个局中人交付少量的税 ε 之后，这个配置成为 ε - 核心配置。对每个局中人征收的少量税于是又可

用于资助余下那部分比例较小的局中人的一个 ε－核心配置。）

在一个大型复制博弈中，任一局中人都有大量的在任何联盟中都可以完全替代的孪生人。不过，这个性质并不足以保证近似核心的非空性。作为一个反例，考虑有 $3K$ 个局中人的一博弈，其任一个联盟 S 的价值是

$$v(S)=2K \quad \text{若} \quad |S|\geqslant 2K$$
$$v(S)=0 \quad \text{若} \quad |S|<2K$$

对任何 K，无论它取多大，这个博弈的核心都是空的。

一个联盟博弈 v 的**最大个人贡献**（maximum individual contribution）是单个局中人能增大任何联盟价值的最大量，即

$$\max\{v(S)-v(S-i) \mid S\subseteq N,\ i\in S\}$$

由 v 生成的 K－重复制博弈的最大个人贡献同博弈 v 本身的最大个人贡献相同，故当 K 增大时，它保持不变。不过，在上述具有空核心的博弈中，最大个人贡献是 $2K$，随着 K 的增大而发散到无穷大。伍德斯和赞姆（1984）已经证明，在 436
具有有界最大个人贡献的一般博弈类中，大型博弈的近似核心总是非空的。

对偶性条件（9.4）、（9.5）及（9.6）也可根据局中人随时间连续地进入和离开的**动态匹配过程**（dynamic matching process）直接加以解释。在这个过程中，N 改解释为局中人的**类**（class）所组成的集，进入这个过程的每个局中人恰好属于 N 中的一类（譬如说，左手套供应者类）。假设对于 N 中的每个 i，每单位时间（比如说，每天）内有类 i 的一个新局中人进入这个匹配过程。还假设，每个局中人必须被匹配或指派于一个至多包含每类一个局中人的联盟，此后他就离开这个匹配过程。一个局中人可以等待匹配，故一个联盟中的局中人可以在不同时间进入匹配过程。每组成一个 S **联盟**（即恰好包含 S 中每类局中人一人的一个联盟）时，就产生 $v(S)$ 个单位的可转让效用，且能以任何方式在其成员中间内分配。

对每个 $S\subseteq N$，令 $\mu(S)$ 表示在这个匹配过程中，每单位时间所组成的 S 联盟的平均个数。对于 N 中的每个 i，为在长期中匹配第 i 类所有局中人，μ 必须满足 $\sum_{S\supseteq\{i\}}\mu(S)=1$。因此，条件（9.4）～（9.6）下解的存在性蕴含着，存在一个方法匹配这个过程中的所有局中人，使不同局中人类的期望支付配置不能被任何联盟改进。

9.4　沙普利值

联盟博弈的核心可能是空的或非常之大，这就使核心作为一个预测理论应用陷入了困难之境。我们所希望的最好方法是导出一种理论，它对每个联盟型

博弈都只能预测局中人唯一的期望支付配置，即我们很想找出某个映射 ϕ: $\mathbf{R}^{L(N)}\to\mathbf{R}^N$，使得当 N 中的局中人进行任何一个联盟博弈 v 时，每个局中人 i 所得到的期望支付将是 $\phi_i(v)$。这里我们用了记号 $\phi(v)=(\phi_i(v))_{i\in N}$。

437 沙普利（1953）公理化地探讨了这个问题，即他询问我们所期望的这样一种解概念要有何种性质，并刻划了满足这些性质的映射 ϕ。

局中人集 N 的一个置换（permutation）是任一函数 π: $N\to N$，使得对 N 中的每个 j，N 中恰存在一个 i 使 $\pi(i)=j$（即 π: $N\to N$ 是一一映射，且为满射）。给定任何一个这样的置换 π 和任一联盟博弈 v，令 πv 为满足

$$\pi v(|\pi(i)\ |i\in S|)=v(S),\quad \forall S\subseteq N$$

的联盟博弈，即 v 中任一局中人 i 的角色实质上与 πv 中局中人 $\pi(i)$ 的角色一样。沙普利的第一个公理断言，一个局中人在博弈中的角色才是唯一重要的，而不是他在集 N 中的特定名字或标号。

公理9.1（对称性） 对 $\mathbf{R}^{L(N)}$ 中任一 v、任一置换 $\pi: N\to N$ 及 N 中任一局中人 i，$\phi_{\pi(i)}(\pi v)=\phi_i(v)$

我们说一个联盟 R 是联盟博弈 v 的一个**载体**（carrier）的充要条件是

$$v(S\cap R)=v(S),\ \forall S\subseteq N \tag{9.9}$$

如果 R 是 v 的一个载体，那么所有不在 R 中的局中人称为 v 的**虚设局中人**（dummies），因为他们进入任何联盟都不会改变该联盟的价值。值得指出的是，(9.9) 式和常规约定 $v(\varnothing)=0$ 意味着，若 R 是一个载体且 $i\notin R$，则 $v(|i|)=0$。沙普利的第二个公理断言，一个载体中的局中人应该在他们中间分摊联合价值（等于大联盟的价值），而对虚设局中人不予分配。

公理9.2（载体公理） 对 $\mathbf{R}^{L(N)}$ 中任一 v 和任一联盟 R，若 R 是 v 的一个载体，则 $\sum_{i\in R}\phi_i(v)=v(R)$。

作为沙普利第三个公理——可加性公理的替代，这里我们考虑一个密切关联的线性性公理。对局中人集 N 上的任意两个联盟博弈 v 和 w 及介于 0 与 1 之间的任意数 p，令 $pv+(1-p)w$ 表示一个联盟博弈，且对每个 S 都有

$$(pv+(1-p)w)(S)=pv(S)+(1-p)w(S)$$

为解释这个博弈，假设 N 中局中人明天是进行联盟博弈 v 或是 w，这取决于明天将可观察到的某随机事件（比方说，若明天下雨则 v，若不下雨则 w）。假
438 设 p 是明天的博弈为 v 的概率，而 $1-p$ 便是明天的博弈是 w 的概率。如果局中人今天讨价还价并谈判，事先对明天的行动策划其策略，那他们今天面临的局势便可由联盟博弈 $pv+(1-p)w$ 表示，因为任一联盟 S 计划的合作行为将

赚到的期望价值为 $pv(S)+(1-p)w(S)$。按照函数 ϕ，若局中人今天讨价还价，则局中人 i 得到的期望支付将是 $\phi_i(pv)+(1-p)w)$；但若局中人明天讨价还价，则 i 的期望支付将是 $p\phi_i(v)+(1-p)\ \phi_i(w)$。线性公理断言，每个局中人的期望支付不应该依赖于局中人是今天（解决不确定性之前）还是明天（解决不确定性之后）对其联盟策略进行讨价还价。

公理9.3（线性性）　对 $\mathbf{R}^{L(N)}$ 中的任意两个联盟博弈 v 或 w、满足 $0\leqslant p\leqslant 1$ 的任意 p，及 N 中的任何一个局中人 i，均有

$$\phi_i(pv+(1-p)w)=p\phi_i(v)+(1-p)\ \phi_i(w)$$

引人注目的是，沙普利证明了，存在唯一的一个映射 ϕ——称为**沙普利值**（Shapley value）——满足这3个公理。

定理9.3　恰好存在一个函数 ϕ：$\mathbf{R}^{L(N)}\to\mathbf{R}^N$ 满足上述公理 9.1、9.2 及 9.3。对 N 中的每个 i 和 $\mathbf{R}^L$ 中的每个 v，这个函数都满足下述方程：

$$\phi_i(v)=\sum_{S\subseteq N-i}\frac{|S|!\ (|N|-|S|-1)!}{|N|!}\left[v(S\cup\{i\})-v(S)\right]$$

（这里，对每个正整数 k，$k!=1\times 2\times\cdots\times k$，及 $0!=1$）。

对定理 9.3 中的公式可做如下解释。假设我们打算把大联盟集中在一个房间内，但房门的大小只能容一次进入一人，从而局中人在门口随机地排成一列，局中人在这个队列中可有 $|N|!$ 个不同的排序方式。对于一个不包括 i 的集 S，存在 $|S|!\ (|N|-|S|-1)!$ 种不同的方式对局中人排序，使得 S 是队伍中 i 前面的局中人集。因而，若各个不同的排序都是同等可能的，则当局中人 i 进入房间时，$|S|!\ (|N|-|S|-1)!/|N|!$ 是他发现联盟 S 已先于他进入房间的概率。如果当 i 进入时发现 S 已先进入，那他对房间中联盟的边际贡献在其进入时为 $v(S\cup\{i\})-v(S)$。于是，在这个随机排序进入的情况下，任一局中人的沙普利值是其进入时的期望边际贡献。 439

若 v 是超可加的，则沙普利值从

$$\phi_i(v)\geqslant v(\{i\}),\ \forall i\in N$$

来看一定是个人理性的。为验证这个事实，注意到超可加性意味着

$$v(S\cup\{i\})\geqslant v(S)+v(\{i\}),\ \forall S\subseteq N-i$$

故 i 任对一联盟的边际贡献决不小于 $v(\{i\})$。

定理 9.3 的证明　给定这种对随机排序的解释，可直截了当地验证定理中的公式满足三条公理。这个公式对 v 是线性的，且对不同的局中人对称看待。（在 ϕ_i 的表达式中，与一个联盟有关的一切只是它是否包含 i 及其包含的局中人数。）而且，对任一排序，支付其边际贡献的计划保证了总支付 $v(N)$ 将在局中人中间分配，且

虚设局中人将得到0；故任一载体 R 一定得到 $v(N)$，它又等于 $v(R)$。

我们现在来证明最多只存在一个函数 ϕ 满足这三个公理。载体公理意味着 $\phi_i(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 对每个局中人 i 都成立，其中 $\mathbf{0}$ 是对每个联盟都指定价值0的一个联盟博弈。这个事实，与公理9.3一起，意味着 ϕ 必是一个从 $\mathbf{R}^{L(N)}$ 到 $\boldsymbol{R}^N$ 的一个线性映射。（公理9.3本身实际上只表明 ϕ 一定是一个仿射映射。）注意到，$\mathbf{R}^{L(N)}$ 作为 N 上联盟博弈集，是一个 $(2^{|N|}-1)$ 维向量空间。

对任一联盟 R，令 w_R 为定义使下式成立的联盟博弈：

$$w_R(S)=1 \quad 若 \quad R\subseteq S,\ w_R(S)=0 \quad 若 \quad R\nsubseteq S \tag{9.10}$$

即，若一个联盟包含 R 中的所有局中人，则其在 w_R 下的价值为1，而它不包含 R 中所有局中人时，则在 w_R 下其价值为0。我们称 w_R 为**简单R-载体博弈**（simple R-carrier game）。由载体公理，我们一定有

$$\sum_{i\in R}\phi_i(w_R)=1, \quad 及 \quad \phi_j(w_R)=0, \quad \forall j\notin R$$

440 因为 R 和 $R\cup\{j\}$ 都是 w_k 的载体。由对称性公理，K 中所有局中人必须得到相同的支付，故

$$\phi_i(w_R)=1/|R|,\ \forall i\in R; \quad 及 \quad \phi_j(w_R)=0, \quad \forall j\notin R \tag{9.11}$$

存在 $2^{|N|}-1$ 个这样的博弈 w_R，对每个联盟 R 都有一个。而且，这些博弈在线性空间 $\mathbf{R}^{L(N)}$ 中是线性无关的。为证明这个线性无关性，我们必须证明方程 $\sum_{R\in L(N)}\alpha_R w_R=0$ 意味着所有的 α_R 都等于0。否则，令 S 为任一满足 $\alpha_S\neq 0$ 的最小规模的联盟，则我们得到

$$0=\sum_{R\in L(N)}\alpha_R w_R(S)=\sum_{R\subseteq S,R\neq\emptyset}\alpha_R=\alpha_S$$

这与 $\alpha_S\neq 0$ 矛盾。因此 $\{w_R|R\in L(N)\}$ 是 $\mathbf{R}^{L(N)}$ 的一个基，这是因为这个集既是线性无关的，又包含与空间的维数一样多的向量。但是，一个线性映射由定义域的一个基上的映射所完全决定。因此，存在唯一的一个线性映射 $\phi:\mathbf{R}^{L(N)}\to\mathbf{R}^N$ 对每个博弈 w_R 均满足（9.11）式。■

沙普利值是评价联盟博弈中力量结构的一个有力工具。对例9.1而言，其中三个局中人必须一致同意才能得到300美元，故沙普利值是（100，100，100）。对例9.2而言，其中只需要局中人1和2一致同意便得到300美元，故沙普利值是（150，150，0）。对例9.3而言，其中任何一对局中人都能分摊300美元，由对称性，沙普利值为（100，100，100）。

在有2 000 001个局中人但内含一个多余的右手套供应者的左手套－右手套博弈中，任何一个右手套供应者的沙普利值是随机排序的进入过程中，先于他进入的局中人中左手套供应者要比右手套供应者多的概率。这个概率非常接

近于 .5。奥曼（1987*b*）计算了这个博弈的沙普利值，对每个右手套供应者给出 .499557，而对每个左手套供应者给出 .500443。因而沙普利值显示，在此博弈中，右手套供应者只有微小的劣势，这个结论看来可能是相当合理的，因为右手套的超额供应相对整个市场是如此地小。

作为另一个有趣的例子，考虑**顶点博弈**（apex game，源于马施勒）。在此博弈中，$N=\{1,2,3,4,5\}$，

$$v(S)=1 \quad 若 \quad 1\in S \quad 且 \quad |S|\geqslant 2$$
$$v(S)=1 \quad 若 \quad |S|\geqslant 4$$
$$v(S)=0 \quad 其他$$

我们称这个博弈的局中人 1 为**大局中人**（big player），而其余 4 个为**小局中人** 441
（small players）。大局中人与任何一个或一个以上的小局中人一起能获得价值 1，而 4 个小局中人一起也能获得价值 1。此博弈的核心是空的。在随机排序的进入过程中，大局中人的边际贡献是 1，除非他第一个或最后一个进入，而后者发生的概率是 2/5，故 $\phi_1(v)=3/5$。*根据对称性，4 个小局中人一定得到相同的值，又由载体定理，所有 5 个局中人的价值之和必为 1，因此，此博弈的沙普利值是

$$\phi(v)=(3/5,\ 1/10,\ 1/10,\ 1/10,\ 1/10)$$

沙普利值的公式也可以等价地写成

$$\phi_i(v)\sum_{R\subseteq N-i}\frac{|R|!\ (|N|-|R|-1)!}{|N|!}\{v(N\backslash R)-v(R)\} \qquad (9.12)$$

故每个局中人的沙普利值只依赖于互补联盟的价值之间的差。对于每一对互补联盟 S 和 $N\setminus S$，随着 $v(N\setminus S)-v(S)$ 的增大，$N\setminus S$ 中局中人的价值在增大；而随着 $v(S)-v(N\setminus S)$ 的增大，S 中局中人的价值在增大。

这一结论对于具有可转让效用的策略型合作博弈具有如下含义，给定上述策略型博弈，假设每个联盟 S 必须在 $\Delta(C_S)$ 中选择一个威胁 σ_S，且这些威胁通过公式

$$v(S)=\sum_{i\in S}u_i(\sigma_S,\sigma_{N\setminus S}) \quad 和 \quad v(N\setminus S)=\sum_{j\in N\setminus S}u_j(\sigma_S,\ \sigma_{N\setminus S})$$

来确定一个特征函数 v，作为考虑了所有这些联盟威胁的某个讨价还价过程的一个结果，假设沙普利值 $\phi(v)$ 是局中人将最终获得的期望支付配置，则联盟 S 中的每个局中人都应该想选择 σ_S 以最大化

$$v(S)-v(N\setminus S)=\sum_{i\in S}u_i(\sigma_S,\ \sigma_{N\setminus S}-\sum_{j\in N\setminus S}u_j(\sigma_S,\ \sigma_{N\setminus S})$$

---

* 原文误为 $\phi_i(v)=3/5$——译者注。

442 而 $N \setminus S$ 中的每个成员都理应想选择 $\sigma_{N \setminus S}$ 去最小化这个差。于是，正如哈森伊（1963）所论证的那样，当应用沙普利值决定结果时，理性威胁表示（在 9.2 节中讨论过）或许是一种从策略型博弈导出联盟型博弈的适当方法（对更一般的威胁体制和值的一个系统分析，可参见迈尔森，1978*b*）。借助于这个表示，对合作博弈中每个局中人 i 的最终支付将是

$$\sum_{R \subseteq N-i} \frac{|R|!\ (|N|-|R|-1)!}{|N|!} \delta\ (N \setminus R,\ R) \tag{9.13}$$

其中 $\delta\ (N \setminus R,\ R)$ 等于

$$\max_{\sigma_{N \setminus R} \in \Delta(C_{N \setminus R})} \min_{\sigma_R \in \Delta(C_R)} \left(\sum_{j \in N \setminus R} u_j(\sigma_{N \setminus R},\ \sigma_R) - \sum_{k \in K} u_k(\sigma_{N \setminus R}, \sigma_R) \right)$$

奥曼和沙普利（1974）把沙普利值的理论延拓到具有无穷多个局中人的博弈。在这个著作中，他们利用了大量方法，既公理化定义了博弈的值，又用很大而有限的博弈通过取极限确定博弈的值。他们的结论既具有数学上的精致性，又富于经济学直觉。为避开其著作的测度论前提，我们只能就他们所考虑博弈范围的一个小子集，在这里对其结论做一概括介绍（有关具有无穷多局中人的非合作博弈方面的研究，参见施迈德勒（Schmeidler），1973）。

令 H 为一个有限集，它表示局中人类组成的集，并假设每类都有无穷多个局中人。让我们在这里用每类局中人在联盟中的比例来描述联盟。因而，我们可以说 $r=(r_h)_{h \in H}$ 是一个**分数联盟**（fractional coalition）的充要条件是 $r \in [0,\ 1]^H$，其中每个分量 r_h 被解释为第 h 类局中人在这个联盟中所占的比例。当我们把无穷多局中人模型解释为非常大的有限博弈的一个近似时，则 r_h 也可被解释为联盟中第 h 类人数与博弈中第 h 类总人数之比。于是，一个联盟型无限博弈可用一个函数 $f:[0,1]^H \to \mathbf{R}$ 来表示，其中对于 $[0,1]^H$ 中的每个 r，$f(r)$ 表示此博弈中一个分数联盟 r 的价值。我们需要 $f(\mathbf{0})=0$，其中 $\mathbf{0}$ 所有分量都为 0 的向量，这里，我们还假设函数 $f(\cdot)$ 在 $[0,\ 1]^H$ 上连续，且对 H 中的每个 h，$f(r)$ 关于 r_h 的偏导数记为 $f'_h(r)$ 或 $(\partial f/\partial r_h)\ (r)$，它在满足 $r_h>0$ 的每个 r 处是非负且连续的［从而 f 满足奥曼和沙普利（1974）的命题 10.17 的前提］。

443 令 $\mathbf{1}$ 表示 $[0,\ 1]^H$ 中所有分量都是 1 的向量。对任一数 α，$\alpha\mathbf{1}$ 则表示所有分量都是 α 的向量。集 $\{\alpha\mathbf{1} \mid \mathbf{0}<\alpha<1\}$ 被称为集 $[0,\ 1]^H$ 的**主对角线**（main diagonal）。

在一个大型博弈中，当局中人按照前述的随机排序进入模型来组成联盟时，先于任一特定局中人的所有局中人所组成的集，应该是以很高的概率从整个总体随机抽取的统计大样本（仅当这个特定局中人是最早几个进入者之一时，这个样本才可能不是“统计上大的”。我们在这一点上所应用的取自基本统计学的关键思想是，一个样本的统计特性只依赖于样本大小，而不依赖于从

中抽取的总体大小)。因而，根据大数定律，排序先于特定局中人的样本中不同类的相对数，应该以很高的概率与这些类在博弈的所有局中人集中的相对数十分接近于相同。即当博弈很大时，在联盟组成过程先于任一给定局中人的分数联盟很可能非常接近于主对角线。

当第 h 类的一个局中人进入一个分数联盟中 r 时，其边际贡献正比例于 $f_h'(r)$，即 $f(r)$ 对 r_h 的偏导数。在大型博弈中，由于先于任一局中人的联盟几乎肯定（或几乎）总是在主对角线上，但可能是按照均匀分布从这条对角线上任何一处抽得，故此博弈 f 的第 h 类局中人的值应是

$$\int_0^1 f_h'(\alpha \mathbf{1})\,d\alpha \tag{9.14}$$

实际上，(9.14) 式应被理解为博弈 f 中所有第 h 类局中人的总价值或价值之和，而不是单个第 h 类局中人的价值。根据对称性，每个第 h 类局中人必须得到 (9.14) 式之值的一个相等份额。即，如果无限博弈 f 是某个大型有限博弈的一个近似，其中每类有 K 个局中人，则在这个大型有限博弈中，每个第 h 类局中人的价值应该近似等于 (9.14) 式的值除以 K。

我们说 f 是**一次齐次的** (1-homogenous) 当且仅当，对 $[0, 1]^H$ 中的每个 r 和 $[0, 1]$ 中的每个 α，均有 $f(\alpha r)=\alpha f(r)$，故一个联盟的价值正比例于其大小（当不同类局中人人数之间的比率保持为常数时)。如果 f 是一次齐次的，那它的偏导数沿主对角线为常数。因此，若 f 是一次齐次的，则第 h 类局中人的值恰好是 $f_h'(\mathbf{1})$，即他们在主联盟中的边际贡献。如果我们添加 f 又是凹的这一假设，则可以证明，这个价值配置还是核心中唯一的点。[$\mathbf{R}^H$ 的一个向量 x 是 f 的核心中的一个配置，当且仅当对于 $[0, 1]^H$ 中的每个 r，均有 $\sum_{h\in H} r_h x_h \geqslant f(r)$。] 于是，存在广泛而又重要的一类具有无穷多局中人的博弈，其核心与值是一致的。 444

9.5　合作结构下的值

在沙普利值中，任一局中人 i 所得到的支付依赖于每个可能联盟的值。对任一具有可转让效用的联盟博弈 v，其中 N 是局中人集，则所有 $2^{|N|}-1$ 个联盟的价值都进入 $\phi_i(v)$ 的公式，而任一 $v(S)$ 的系数只依赖于 S 中局中人的人数及 i 是否在 S 中。不过，存在某些局势，其中对所有联盟的这种对称处理可能是不切实际的。一般地，我们用术语**合作结构** (cooperation structure) 来表示任何这样的数学结构：它描述了联盟博弈中哪些联盟（在所有 $2^{|N|}-1$ 个可能联盟的集内）能有效地谈判或协调。

可能有些外生因素使某些联盟本能就比另一些更重要。地理的、社会的、甚或语言的障碍都可以使某些联盟比另一些更易于形成。举例而言，如果把一个公司视为由多方面的经理人员和工人进行的一个博弈，则全由名字的第一个字母为“R”的经理人员和工人组成的联盟是不可能合作或谈判的，而全由在某特定大楼中一起工作的工人所组成的联盟则很有可能合作。

某些联盟相对较大的有效性也可能因局中人决策的一个内生结果而产生。例如，在例 9.3（其中任意两个局中人都能实现三个局中人一起所能实现的价值）那样的三人过半数博弈中，两个局中人可能有强烈的动机要一起组成一个有效联盟而拒绝各自与第三个局中人的谈判。另一方面，像例 9.1 的三人一致博弈（其中只有大联盟才能获得正价值）中，局中人或许会没有什么积极性去形成这种排他性的谈判协议。

445 因而，我们需要一种理论来回答下面两个问题。第一个问题是，如果一些联盟可能比其他联盟更有效，那任一给定的联盟博弈的结果应如何依赖于合作结构呢？第二个问题是，如果合作结构会受到局中人之间排他性谈判协议的影响，那么，在任意给定的联盟博弈中，我们应预期会观察到哪种合作结构呢？显然，预测内生合作结构的第二个问题，只有在我们对第一个关于期望支付应如何依赖于合作结构的问题有了答案之后，才会明白。因此，本节的大部分内容致力于第一个问题，描述一些把沙普利值延伸到取决于合作结构的方法。

倘若我们假定每个局中人将属于一个起作用的或有效的联盟，描述合作结构就相当简单。在这个假定之下，博弈中的合作结构可用对所有局中人集的一个划分来描述。于是，给定局中人集 N 上的任一联盟博弈 v，对每个局中人 i 和每个包含了 i 的联盟 S，我们需要明确，如果 i 所在的 S 是正起作用的联盟，那局中人 i 将得到支付。哈森伊（1963）及奥曼和德雷泽（Aumann and Dreze，1974）指出，这个支付应该是在受限于 S 的子集的联盟博弈 v 中局中人 i 的沙普利值，我们记作 $\phi_i(v,S)$。即我们令

$$\phi_i(v,\ S)=\sum_{T\subseteq S,\ i\in T}\frac{|T|!\ (|S|-|T|-1)!}{|S|!}\{v\ (T\cup\{i\})\ -v\ (T)\} \tag{9.15}$$

当然，$\phi_i(v,\ N)=\phi_i(v)$

迈尔森（1980）已证明，这个联盟值 ϕ 是下述方程组的唯一解：

$$\sum_{i\in S}\phi_i(v,\ S)\ =v(S),\ \forall S\subseteq N \tag{9.16}$$

$$\phi_i(v,\ S)-\phi_i(v,\ S-j)=\phi_j(v,\ S)-\phi_j(S-i) \tag{9.17}$$

$$\forall S\subseteq N,\ \forall i\in S,\ \forall j\in S^*$$

（当 S 为任一集合时，我们令 $S-i$ 表示与 S 不同之处仅在于去掉 i 的集，故

---

* 原文此方程最后一项误为 $\phi_i\ (S-j)$ ——译者注。

$S-i-S\setminus\{i\}$。）条件（9.16）表明，对一个起作用的联盟 S 中成员的总支付应该是这个联盟的价值。条件（9.17）表明，对起作用的联盟 S 的任意两个成员来说，每个局中人从另一个局中人退出联盟所得到的损益应该相等。我们可以把（9.16）式视为效率条件，而把（9.17）式视为公平或**平衡贡献**（balanced-contribution）条件。 446

若在（9.17）式中平衡的贡献均非负，则我们可假设局中人全都会欢迎对方加入联盟，而受限制的谈判协议因此应该不大可能存在。例如，在例 9.1 中，我们有

$$\phi_i(v,\ S)=100 \quad 若 \quad |S|=3,\ \phi_i(v,\ S)=0,\ 若\ |S|\leqslant 2$$

另一方面，若某些贡献 $\phi_i(v,\ S)-\phi_i(v,\ S-i)$ 是负的，则局中人可能有尽量互相排斥的倾向而组成小于 N 的联盟。例如，在例 9.2 中，

$$\begin{aligned}&\phi_i(v,\ S)=100 \quad 若 \quad |S|=3\\&\phi_i(v,\ S)=150 \quad 若 \quad |S|=2\\&\phi_i(v,\ S)=0 \quad 若 \quad |S|=1\end{aligned}$$

故对于任意两个局中人 i 和 j 均有 $\phi_i(v,\ N)-\phi_i(v,\ N-j)=-50$。

迈尔森（1977）提出合作结构可用图来描述，其中结点对应于局中人，枝或连线表示局中人对之间的通信联系或友好关系。因而，令 $L_2(N)$ 表示所有局中人对所组成的集，即

$$L_2(N)=\{\{i,\ j\}\mid i\in N, j\in N,\ i\neq j\}$$

于是，$L_2(N)$ 的任一子集可被称为局中人集上的一个图或**图合作结构**（graphical cooperation structure）。对任一这样的图 G、任一联盟 S、及 S 中的任意局中人 i 和 j，我们可以说 i 与 j **在 S 内由 G 连接**（connected by G within S）的充要条件是 $i=j$，或存在某个 $\{h_1,\ h_2,\ \cdots h_k\}$，使得 $\{h_1,\ h_2,\ \cdots h_k\}\subseteq S$、$h_1=i$、$h_k=j$，且对每个 l 都有 $\{h_l,\ h_{l+1}\}\in G$。令 S/G 表示把 S 划分成被 G 在 S 中连接的局中人集所组成的集族，故

$$S/G=\{\{i\mid i\text{ 与 }j\text{ 在 }S\text{ 内由 }G\text{ 连接}\}\mid j\in S\}$$

当且仅当 $S/G=|S|$ 时，我们才说 S 是**由 G 内部连通的**（internally connected by G）。即 S 是内部连通的，其充分必要条件是，S 中的成员能通过一个电话系统相互通信，对同属 S 的两个局中人，只有在 G 中组成对时才有电话线路相通。给定任一图合作结构，我们可以设想内部连通的联盟为能够有效地谈判 447
的联盟。

给定任一在局中人集 N 上的联盟博弈 v，v 的一个配置规则应该对每个局中人 i 和每个图合作结构 G 确定一个支付 $\phi_i(v,\ G)$。一个**公正配置规则**（fair allocation rule）被定义为这样一个满足下列方程的函数：

$$\sum_{i\in S}\psi_i(v,G)=v(S),\ \forall G\subseteq L_2(N),\ \forall S\in N/G \tag{9.18}$$

$$\psi_i(v,G)-\psi_i(v,G-\{i,j\})=\psi_j(v,G)-\psi_j(v,G-\{i,j\}) \tag{9.19}$$
$$\forall G\subseteq L_2(N),\ \forall\{i,j\}\in G$$

条件（9.18）为效率条件，它表明了每个最大内部连通的联盟将在其成员中分摊其价值，条件（9.19）是公平条件，表明任何两个局中人对他们之间建立联系应该遭受同等损益。

迈尔森（1977）证明了，对任一联盟博弈 v，都存在唯一的公正配置规则，而且，如果我们令 $L_2(S)$ 表明 S 中所有的局中人对组成的图，则我们有

$$\psi_i(v,\ L_2(S))=\phi_i(v,\ S),\quad \forall S\subseteq N,\ \forall i\in S$$

因此，对包括了所有局中人对的完全图 $L_2(N)$ 来讲，公正配置规则与沙普利值相一致，即

$$\psi_i(v,L_2(N))=\phi_i(v)$$

更一般地，若我们用 v/G 表示满足

$$(v/G)(S)=\sum_{R\in S/G}v(R),\quad \forall S\subseteq N$$

的联盟博弈，则 v 的公正配置规则满足方程

$$\psi_i(v,\ G)=\phi_i(v/G) \tag{9.20}$$

如果 v 是超可加的，那么（9.19）式的两边同为非负；即

$$\psi_i(v,\ G)-\psi_i(v,\ G-\{i,\ j\})\geqslant 0,\quad \forall G\subseteq L_2(N),\ \forall\{i,\ j\}\in G \tag{9.21}$$

因而在超可加博弈中，一个局中人与其他局中人形成联系决不会有损于他。例如，在例 9.3 中，公正配置规则示于表 9-2 中。[为了说明这些配置是如何计算出来的，考虑对 $\{\{1,2\},\{1,3\}\}$ 的公正配置。给定其他的配置，它必须满足。

448 **表 9-2　　例 9.3 的公正配置规则**

G	$(\psi_1(v,G),\ \psi_2(v,G),\ \psi_3(v,G))$
$\varnothing$	(0, 0, 0)
$\{\{1,2\}\}$	(150, 150, 0)
$\{\{1,3\}\}$	(150, 0, 150)
$\{\{2,3\}\}$	(0, 150, 150)
$\{\{1,2\},\{1,3\}\}$	(200, 50, 50)
$\{\{1,2\},\{2,3\}\}$	(50, 200, 50)
$\{\{1,3\},\{2,3\}\}$	(50, 50, 200)
$\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$	(100, 100, 100)

$$\psi_1(v, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}) - 150 = \psi_2(v, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}) - 0$$
$$\psi_1(v, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}) - 150 = \psi_3(v, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}) - 0$$

及
$$\psi_1(v, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}) + \psi_2(v, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}) + \psi_3(v, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}) = 300$$

于是，$3\psi_1(v, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}) - 300 = 300$，故当局中人 1 是唯一与其余两个局中人联系的局中人时，他得到 200。] 现在考虑一个联系形成过程，其中每个局中人独立地写出其欲与之形成联系的局中人名单，而支付配置是上述对这样一个图的公正配置，该图包含了互相提名的每一对局中人之间的联系。在这个博弈中，唯一的完美均衡就是每个局中人都将所有其他的局中人全列入名单，故结果将是沙普利值。

奥曼和迈尔森（1988）考虑了一个不同的内生联系形成的模型。在他们的模型中，局中人对都相继决定是否形成联系，但所有这种联系都必须公开形成，并且这个联系形成过程不会停止，直至每对未建立联系的局中人在最后一个联系建立之后已有过另外一次形成联系的机会。对例 9.3 来说，图合作结构 $\{\{1, 2\}\}$ 在这样一个联系形成博弈中可以成为一个子博弈完美均衡的结果。在此均衡中，在 $\{1, 2\}$ 已形成联系后，局中人 1 应知道，若他与局中人 3 形成联系，则局中人 2 随后同样也会与局中人 3 形成联系，故 1 通过与 3 形成联系 449
的初始增益（200 − 150）将继之以更大的损失（100 − 200）。

考虑前面 9.4 节所讨论的顶点博弈，对这个博弈有

$$\phi_1(v, \{1, 2\}) = \phi_2(v, \{1, 2\}) = 1/2 = \psi_1(v, 2\{\{1, 2\}\}) = \psi_2(v, \{\{1, 2\}\})$$

即在上述定义的任何一个引伸值下，当大局中人与一个小局中人形成一个联盟时，他们两人要同等分摊该联盟的价值。这一结论看上去不合情理，因为大局中人比小局中人有更多的联盟外选择自由。实质上讲，问题在于，公正配置规则忽略了未由图合作结构内部连通的任何联盟的影响。欧文（Owen，1977）对具有合作结构的博弈提出了一个不同的值概念，并确实对某些未连通联盟予以了考虑［也可参见哈特和库尔兹（Kurz，1983）］。

我们说 $\mathcal{S}$ 是一个嵌套联盟结构（nested coalition structure）的充要条件是，$\mathcal{S}$ 是 L(N) 的一个子集，且

$$\forall S \in \mathcal{S},\ \forall T \in \mathcal{S},\ \text{若 } S \cap T \neq \emptyset,\ \text{则 } S \subseteq T \text{ 或 } T \subseteq S$$

在欧文模型中，一个合作结构是用这样一个起作用的联盟的一个嵌套集来描述的，欧文称其为**团体组**（unions）。即每个局中人可以属于若干个起作用的联盟，但这些起作用的联盟必须用包含关系来排序。

一个嵌套联盟结构 $\mathcal{S}$ 也可看作是划分的一个嵌套族。对任一联盟 S 和 S 中任一局中人 i，令 $\mathcal{S}_i(S)$ 表示最大的联盟 R，使得如果存在任一这样的联

盟，则

$$R\in\mathscr{F},\ i\in R,\ 且\ R\subset S\ (即\ R\subseteq S\ \ 且\ \ R\neq S)$$

否则，令 $\mathscr{F}_i(S)=\{i\}$。令 $\mathscr{F}_*(S)$ 把 S 划分成这种集合的一种划分；即

$$\mathscr{F}_*(S)=\{\mathscr{F}_i(S)\mid i\in S\}$$

于是，$\mathscr{F}$ 把局中人集 N 分成一个划分 $\mathscr{F}_*(N)$，这个划分中的每个联盟 S 又被 $\mathscr{F}$ 再分成一个划分 $\mathscr{F}_*(S)$，如此等等。

对任一嵌套联盟结构 $\mathscr{F}$、任一联盟博弈 v 及任一局中人 i，**欧文值**（Owen value）都确定了一个记为 $\theta_i(v,\mathscr{F})$ 的支付。这个值线性于博弈，故 $\theta_i(\mathbf{0},\mathscr{F})=0$ 且对任意联盟博弈 v 和 w 及介于 0 与 1 之间的任一数 p，均有

$$\theta_i(pv+(1-p)w,\mathscr{F})=p\theta_i(v,\mathscr{F})+(1-p)\theta_i(w,\mathscr{F})$$

450 为了对所有博弈完成欧文值的说明，那么，只需对简单载体博弈（其构成 $\mathbf{R}^{L(N)}$ 的一个线性基）定义欧文值即可。

为此，令 R 为任一联盟，又令 w_R 是由（9.10）式所定义的简单 R-载体博弈。w_R 的欧文值把大联盟的整个价值分配给载体 R 的成员，而对 R 之外的每个虚设局中人给予 0，即

$$\sum_{i\in R}\theta_i(w_R,\mathscr{F})=1,\ 和\ \theta_j(w_R,\mathscr{F})=0,\quad \forall j\in N\setminus R \tag{9.22}$$

载体 R 之内的配置是用下述条件定义的：

$$\forall Q\in\mathscr{F}\cup\{N\},\ \forall S\in\mathscr{F}_*(Q),\ \forall T\in\mathscr{F}_*(Q) \tag{9.23}$$

若 $\quad S\cap R\neq\varnothing\ \ 且\ \ T\cap R\neq\varnothing$

则 $\quad\displaystyle\sum_{i\in S}\theta_i(w_R,\mathscr{F})=\sum_{i\in T}\theta_j(w_R,\mathscr{F})$

条件（9.22）和（9.23）对每个联盟 R 和每个嵌套联盟结构 F 都决定了唯一的一个值 $\theta(w_R,\mathscr{F})=\{\theta_i(w_R,\mathscr{F})\}_{i\in N}$。

欧文值基于这样一个假定：这个嵌套联盟结构 F 中的每个团体都任命一个代理人去指挥此团体的成员与此团体外的局中人之间的所有谈判。因此，从团体外局中人的角度来看，这个团体像一个单独的局中人一样行为（任何一个单人联盟 $\{i\}$ 是通过局中人 i 作为他自己的代理来表示的）。在这些代理人被任命之后，我们可以假设代表 $\mathrm{F}_*(N)$ 中联盟的代理人将相遇，并在他们中间讨价还价分摊大联盟 N 的价值。然后，对于出席前一个讨价还价回合的每个团体 Q，代表 $\mathscr{F}_*(Q)$ 中联盟的代理人将相遇并在他们中间讨价还价来分摊由 Q 的代理人在前一个讨价还价阶段所得到的值。这个过程一直持续到 $\mathscr{F}$ 中所有团体都把它们的支付分配到了个人层次（即单个局中人的联盟）。条件（9.23）表明，在这个过程

451 的任一阶段，当代理人相遇并分摊对他们集体可用的可转让效用（或因为他们一

起构成 N，或因为 $\mathcal{F}$ 中某个团体已完成其对外谈判）时，任何两个代表载体 R 中局中人的代理人都应该得到此可利用效用的相同份额。这样的代理人应该得到相同份额的理由是，每个这样的代理人都有同样能力通过收回其所代表的局中人而把更大联盟的价值减少到0。这里利用的一个暗含假定是，不同团体的代理人具有同样的讨价还价能力，而与他们所代表的团体的大小无关。

欧文值可以等价地用局中人随机排序进入联盟形成过程的情况来描述，给定一个嵌套联盟结构 $\mathcal{F}$，让我们定义局中人的一个 **$\mathcal{F}$-许可顺序**（$\mathcal{F}$-permissible ordering）为 N 这样的一个严格顺序，使得对 $\mathcal{F}$ 中任一联盟 S 和同属 S 的两个局中人 i 和 j，所有在顺序上介于 i 与 j 之间来到的局中人也一定属于 S。现在，假设从 $\mathcal{F}$-许可顺序中随机选择一个，每个 $\mathcal{F}$-许可顺序有同等概率被选中。令 $\tilde{S}(i)$ 为在这个顺序中排在局中人 i 前面的所有局中人的集合，那么局中人 i 的欧文值便是 $v(\tilde{S}(i) \cup \{i\}) - v(\tilde{S}(i))$ 的期望值。

对于具有嵌套联盟结构 $\mathcal{F}=\{\{1, 2\}\}$ 的顶点博弈来说，欧文值给局中人3，4和5的支付为0，给局中人2的值为1/4，而给局中人1的值为3/4。[为验证这一点，注意到，在所有 $\mathcal{F}$-许可顺序中，局中人2仅在两个顺序中有边际贡献1。第一个是团体 $\{1, 2\}$ 在 $\mathcal{F}_*(N)$ 的联盟中最早来的那个顺序，其发生概率为 $1/|\mathcal{F}_*(N)|=1/4$ 且局中人2在 $\{1, 2\}$ 中第二个到来，其独立概率为1/2。第二个是团体 $\{1, 2\}$ 在 $\mathcal{F}_*(N)$ 的联盟中最后到来的顺序，其发生的概率为1/4；且局中人2在 $\{1, 2\}$ 中先到来，其独立概率为1/2。于是，局中人2在两个顺序中有边际贡献1，其联合概率为1/4；其他情况下，局中人2的边际贡献为0。] 于是，不像迈尔森（1977）的公正配置原则那样，欧文值允许局中人1从其更强的与局中人3，4和5形成致胜联盟的能力中受益，哪怕他已与局中人2形成了一个团体。不过，如果嵌套联盟结构改变成 $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$，则欧文值将给局中人1和2每人1/2，因为他们对其他的局中人团体具有相同的边际贡献。

9.6　其他的解概念

核心和沙普利值只是博弈论家已研究过的具有可转让效用的联盟博弈众多解概念中的两个。为了描述已研究过的某些其他解概念，我们应该先考虑一些基本定义。贯穿本节，令 v 为一个具有可转让效用的联盟博弈，而令 N 为所有局中人所组成的集。 452

对于 $\mathbf{R}^N$ 中的任意两个配置 x 和 y，以及任一联盟 S，我们可以写

$$x >_S y \quad \text{当且仅当} \quad x_i > y_i, \quad \forall i \in S$$

即 $x >_S y$ 的充要条件是，S 中的所有成员都喜欢 x 严格地胜于 y。类似地，我

们可以写

$$x \geq_S y \quad \text{当且仅当} \quad x_i \geqslant y_i, \quad \forall i \in S$$

对于局中人集的任一划分 Q，令 $I(Q)$ 表示所有这样的支付配置所组成的集，其中每个局中人都至少得到其本人所能得到的支付，并且划分中的每个联盟都在其成员中间分配其价值，即

$$I(Q) = \{x \in \mathbf{R}^N \mid x_i \geqslant v(\{i\}), \quad \forall i \in N, \text{且} \sum_{j \in R} x_j = v(R), \ \forall R \in Q\}$$

$I(\{N\})$ 中的任一配置都被称为一个**分配**（imputation）。

对任一联盟 S 与任一配置 x，令

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

这个量 $e(S, x)$ 被称为 S 在 x 的**超额**（excess），它是 S 对每个成员 i 支付了 x_i 之后所余下的净可转让价值。注意，$e(S, x) \geqslant 0$ 的充要条件是联盟 S 能独自达成其配置 x 的份额。

冯·诺依曼和摩根斯特恩（1944）所研究过的第一个解概念就是现在所谓的**稳定集**（stable sets）。任何一个分配集 Z，欲作为一个稳定集，需满足下述两条性质：

$$\forall y \in I(\{N\}), \text{若 } y \notin Z, \text{则} \quad \exists x \in Z \quad \text{和} \quad \exists S \in L(N) \tag{9.24}$$

使得 $\quad e(S, x) \geqslant 0 \quad \text{且} \quad x >_S y$

453

$$\forall y \in Z, \ \forall x \in Z, \forall S \in L(N), \tag{9.25}$$

若 $\quad x >_S y, \text{则 } e(S, x) < 0$

这些条件背后的思想如下。我们设想把一个稳定集认为是局中人考虑可能成为博弈结果的配置集，但他们并不知道哪一个将会最终被选中。条件（9.24）表明，如果任何一个不在稳定集的分配 y 被提议，那就至少存在一个联盟 S，它能通过坚持要得到对他们可行而又是 Z 中的某个可能结果来阻止采用 y。条件（9.25）表明，Z 自身中没有一个分配能用这种方法被 Z 中另一个可能结果所阻止。

对于例 9.3（三人过半数博弈的一个形式），存在许多个稳定集。集 $\{(150, 150, 0), (150, 0, 150), (0, 150, 150)\}$ 是一个稳定集。对任一局中人 i 和满足 $0 \leqslant \alpha < 150$）的任意 α，集 $\{x \in I(\{N\}) \mid x_i = \alpha\}$ 也是一个稳定集。因此，尽管此博弈的核心是空集，但每个分配至少在一个稳定集中。不过，卢卡斯（Lucas，1969）指出，某些博弈也不具有稳定集。

奥曼和马斯勒（1963）引入了讨价还价集的概念，并提供了几个可供选择的定义，我们在这里只讨论其中的一个形式（即所谓 $M_1^{(i)}$）。讨价还价集背后的思想是，一个局中人在对所提出的一个支付配置反对时，倘若他害怕另一个

局中人可能会对他的异议提出一个反异议，那他就有可能不对所提出的支付配置表示异议。

局中人 i 对另一个局中人 j 和一个支付配置 x 的一个**异议**（objection）就是一个偶 (y, S)，使得

$$y \in \mathbf{R}^N,\ S \subseteq N,\ i \in S,\ j \notin S,\ e(S, y) = 0,\ 且\ \ y >_S x$$

即 S 中的局中人能一起达到他们的 y 中份额，且 y 对他们要比配置 x 严格地更好，包括局中人 i。在 i 对 j 和 x 的异议 (y, S) 提出之后，对此的一个反异议（counterobjection）就是任一偶 (z, T)，使得

$$z \in \mathbf{R}^N,\ T \subseteq N,\ j \in T,\ i \notin T$$
$$T \cap S \neq \varnothing,\quad e(T, z) \geqslant 0,\quad z \geqslant Tx,\quad 及\quad z \geqslant_{T \cap S} y$$

也就是说，在反异议中，局中人 j 可以形成一个联盟 T，T 去掉了异议中 i 的某些伙伴（但不是 i 自己），并且使得 T 中成员至少与异议中一样好；因而，j 能使他自己和 T 中其余成员恢复到至少与他们在 x 中所得到的一样好的支付。

讨价还价集是相对于局中人集的一个划分而定义的。于是，令 Q 为 N 的 454
任一划分，一个配置 x 相对于划分 Q 属于 v **讨价还价集**（bargaining set）的充要条件是，$x \in I(Q)$，并且对 Q 中任一联盟 R 及 R 中任意两个局中人 i 和 j，对 i 反对 j 和 x 的任何一个异议，都存在一个反异议。不难验证，核心是 v 相对于 $|N|$ 讨价还价集的一个（可能是空的）子集。皮莱格（1963）证明了，对任一划分 Q，若 $I(Q)$ 非空（正如若 v 是超可加的，则一定非空），则 v 相对于 Q 的讨价还价集是非空的。

例如，顶点博弈相对于划分 $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$（所有局中人一起都在大联盟中）的讨价还价集是 $\{1-4\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \mid 1/13 \leqslant \alpha \leqslant 1/7\}$。如果任一小局中人 i 所得到的支付比另一个小局中人 j 少，那 i 与大局中人 1 一起会有一个异议而使 j 无法反对。如果小局中人全都得到大于 1/7 的某个支付量，那局中人 1 会有一个异议 $((3/7, 4/7, 0, 0, 0), \{1, 2\})$ 而使局中人 3 无法反对。如果小局中人全都得到小于 1/13 的某个支付量，从而局中人 1 得到大于 9/13 的支付，那局中人 2 会有一个异议 $((0, 1/13, 4/13, 4/13, 4/13), \{2, 3, 4, 5\})$ 而使局中人 1 无法反对。

另一方面，相对于划分 $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$，顶点博弈的讨价还价集变成 $\{(1-\alpha, \alpha, 0, 0, 0) \mid 1/4 \leqslant \alpha \leqslant 1/2\}$。

戴维斯（Davis）和马施勒（1965）定义 v 相对于划分 Q 的**核**（kernel）为所有满足下述条件的配置 x 组成的集：$x \in I(Q)$，并且对于 Q 中任一联盟 T 和 T 中任意两个局中人 i 与 j，均有 C

$$\max_{S \subset N-j,\, i \in S} e(S, x) = \max_{T \subset N-i,\, j \in T} e(T, x)$$

也就是说，如果局中人 i 和 j 同属划分 Q 中的同一联盟，那么，i 能在一个不

含 j 的联盟中所获得的最高超额等于 j 能在不含 i 的一个联盟中所得到的最高超额。核总是讨价还价集的一个非空子集。例如，顶点博弈相对于划分 $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\} = \{N\}$ 的核是$\{(3/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)\}$。顶点博弈相对于划分$\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ 的核是$\{(1/2, 1/2, 0, 0, 0)\}$。

对于任一配置 x，令 $\zeta_k(x)$ 为由任一联盟在 x 生成的第 k 大的超额，即

$$\begin{cases} |\{S\in L(N) \mid e(S, x) \geq \zeta_k(x)\}| \geq k \\ |\{S\in L(N) \mid e(S, x) < \zeta_k(x)\}| < k \end{cases}$$

455 因此，x 在核心中的充要条件是 $\zeta_1(x) \leqslant 0$。

令 $A(1)$ 为使 ζ_1 取得最小值的所有分配所组成的集，即

$$A(1) = \underset{x\in I(N)}{\operatorname{argmin}}\ \zeta_1(x)$$

若核心非空，则 $A(1)$ 一定是核心的一个子集。现在，对 $k=2, 3, \cdots, 2^{|N|}-1$，用方程

$$A(k) = \underset{x\in A(k-1)}{\operatorname{argmin}}\ \zeta_k(x)$$

归纳定义 $A(k)$。施迈德勒 (1969) 证明了 $A(2^{|N|}-1)$ 必由单点组成，他称此点为 v 的**核仁** (nucleolus)。核仁在 v 相对于划分 $\{N\}$ 的讨价还价集及核中；且若核心非空，则它又在 v 的核心中。例如，顶点博弈的核仁是 $(3/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)$。

就一个简单的两人博弈，其中

$$N=\{1, 2\},\ v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0,\ v(\{1, 2\}) = 1$$

来说明不同的合作解概念所选定的结果，这有助于说明合作解概念的分类。如果一个解概念只是从防止联盟异议的准则来导出的话，那这个博弈的“解”应该是所有分配组成的集 $\{(\alpha, 1-\alpha) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$。这种**无从反对** (unobjectionable) 解概念包括了核心、讨价还价集（相对于 $\{N\}$）和稳定集。另一方面，如果一个解概念还基于了对局中人之间公平的某种考虑（同样有效率），那这个博弈的“解”应该是配置 $(1/2, 1/2)$。这种**公平的** (equitable) 解概念包括了沙普利值、核仁和核（相对于 $\{N\}$）。

在第 8 章中，我们讨论了纳什关于合作博弈应通过对一个充分设定的讨价还价模型计算均衡来进行分析的论点。作为对现存合作博弈理论文献的一个评论，这个论点与无从反对解概念的关系或许比它与公平的解概念的关系更密切，无从反对解被认为包括了局中人在没有形成要求重新配置的联盟时所能接受的全部支付配置，所以，要求完整描述局中人借以形成联盟并提出要求的策
456 略过程，看起来确实合乎情理。(无论是个什么样的过程，根据一般存在性定理，它具有某些纳什均衡，故核心一般不会与讨价还价的均衡集相一致。)

另一方面，针对纳什的论点，公平解也可以得到辩护。象纳什讨价还价解一样，沙普利值和其他的公平解可被解释为讨价还价中的仲裁指导方针或焦点均衡的决定因素。我们只需假定未设定的讨价还价过程具有充分大的均衡集，且焦点均衡将由其公平与效率的性质来决定。这里，我们用“公平”指每个局中人从与其他局中人的合作中所得到的增益，应该（在某种意义上）与其合作对其他局中人的贡献相称。因此，公平解应该取决于博弈的联盟型表示所概括的力量结构。

9.7　不可转让效用下的联盟博弈

本章行文至此，我们只考虑了可转让效用下的合作**博弈**，或 *TU* **博弈**，现在让我们考虑不具有可转让效用的博弈，简称为 *NTU*（或**不可转让效用**）(nontransferable utility) 博弈。*NTU* 博弈的联盟形式的一个广义概念由奥曼和布莱格（1960）提出。

局中人集 N 上的一个 *NTU* **联盟博弈**（或一个 *NTU* **联盟型博弈**）是定义域 $L(N)$ 上这样的任一映射 $V(\cdot)$，使得对于任一联盟 S，均有

$$V(S) \text{ 是 } \mathbf{R}^S \text{ 的一个非空闭凸子集，} \tag{9.26}$$

且

$$\{x \mid x \in V(S) \text{ 及 } x_i \geqslant v_i,\ \forall i \in S\} \tag{9.27}$$

是 $\mathbf{R}^S$ 的一个有界子集，其中

$$v_i = \max\{y_i \mid y \in V(\{i\})\} < \infty,\ \forall i \in N \tag{9.28}$$

这里，$V(S)$ 表示联盟 S 的成员在他们合作行动时（在某种意义上）能自我保证得到的期望支付配置集。$V(S)$ 的闭性和凸性条件 (9.26) 都是自然的技术性条件。特别地，凸性可以从一个合作联盟的成员能联合使用随机策略而推出。条件 (9.28) 表明，任一局中人单独一人所能保证的最大支付是有限的。条件 (9.27) 表明，一个联盟不能对任一局中人提供无界支付，除非它给予此联盟中某个局中人的支付小于该局中人单独所能得到的支付。

457

我们说 V 是**紧生成的** (compactly generated)，其充要条件是存在某个集 Ω，Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个有界闭（即紧）子集，使得对于每个联盟 S 和 $V(S)$ 中的每个配置 x，Ω 中都存在某个配置 y 使 $(y_i)_{i \in S}$ 为 $V(S)$ 中的一个向量，且对于 S 中的每个局中人 i 都有 $x_i \leqslant y_i$。我们说 V 是**综合的** (comprehensive)，其充要条件是，对每个联盟 S 和 $\mathbf{R}^S$ 中的每个向量 z，若存在某个向量 $x \in V(S)$ 且对 S 中的每个 i 都有 $z_i \leqslant x_i$，则 $z \in V(S)$。

一个 *NTU* 联盟博弈 V 是**超可加的**，其充要条件是，对任意两个联盟 S

和 T，

若 $S\cap T=\varnothing$，

则有 $V(S\cup T)\supset\{x\in\mathbf{R}^{S\cup T}\mid(x_i)_{i\in S}\in V(S),\ (x_j)_{j\in T}\in V(T)\}$

因而，超可加性意味着，对于两个不相交的联盟 S 和 T 而言，$S\cup T$ 能给其成员任何一个他们在 S 和 T 中能分别得到的支付。

NTU 联盟型博弈是具有可转让性效用联盟型博弈的一个推广。$\mathbf{R}^{L(N)}$ 中的任一 *TU* 联盟博弈 v 都等价于满足下式的 *NTU* 联盟博弈：

$$V(S)=\{x\in\mathbf{R}^S\mid\sum_{i\in S}x_i\leqslant v(S)\}\tag{9.29}$$

当条件 (9.29) 成立时，V 是一个超可加的 *NTU* 联盟博弈的充要条件为 v 是一个具有可转让效用的超可加联盟博弈。不过，若 V 对 $\mathbf{R}^{L(N)}$ 中的某个 v 满足了 (9.29) 式，它就不可能是紧生成的。

两人讨价还价问题也可以被看作 *NTU* 联盟博弈特殊的一类。即当 $N=\{1,2\}$ 时，一个 *NTU* 联盟博弈可等同于一个两人讨价还价问题 $\{F(v_1,v_2)\}$，其中 v_1 和 v_2 如 (9.28) 式所描述的那样，而 $F=V(\{1,2\})$。

令 $\Gamma=(N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$ 为任一不具有可转让效用的有限策略型博弈，奥曼和皮莱格 (1960) 提出了两种把这样一个博弈表示成 *NTU* 联盟型博弈的方法。

$\mathbf{R}^S$ 中的一个配置向量 x 是 Γ 中对联盟 S **可保证的** (assurable)，当且仅当 $\Delta(C_S)$ 中存在某个联合相关策略 σ_S，使得对于 $\Delta(C_{N\setminus S})$ 中的每个策略 $\sigma_{N\setminus S}$，均有

458
$$u_i(\sigma_S,\sigma_{N\setminus S})\geqslant x_i,\quad\forall i\in S\tag{9.30}$$

也就是说，x 对 S 是可保证的，其充要条件是，当 S 中的局中人必须在 $N\setminus S$ 中的局中人选择其联合相关策略之前就宣布他们的联合相关策略时，他们能保证所得到的支付全都至少与 x 中的一样多。Γ 的**可保证表示** (assurable representation)，是 *NTU* 联盟博弈 V^α，使得

$$V^\alpha(S)=\{x\in\mathbf{R}^S\mid x\text{ 是 }\Gamma\text{ 中对 }S\text{ 可保证的}\},\ \forall S\in L(N)$$

$\mathbf{R}^S$ 中的一个配置向量 x 是 Γ 中对联盟 S **不可阻止的** (unpreventable)，其充要条件是，对其补联盟在 $\Delta(C_{N\setminus S})$ 中所可用的每个策略 $\sigma_{N\setminus S}$，$\Delta(C_S)$ 中存在某个策略 σ_S 满足条件 (9.30)。即 x 对 S 是不可阻止的，其充要条件为，当 S 中的局中人在 $N\setminus S$ 中的局中人已宣布其联合相关策略之后可选择他们的联合相关策略时，他们能保证所得到的支付全都至少与 x 中的一样多。Γ 的**不可阻止表示** (unpreventable representation) 是满足下式的 *NTU* 联盟博弈 V^β

$$V^\beta(S)=\{x\in\mathbf{R}^S\mid x\text{ 是 }\Gamma\text{ 中对 }S\text{ 不可阻止的}\},\ \forall S\in L(N)$$

容易验证，V^α 和 V^β 同时满足作为一个 NTU 联盟博弈所要求的闭性、凸性和有界性条件。

奥曼（1961）证明了 V^α 和 V^β 二者都是超可加的、紧生成的（例如，Ω 等于每个 i 都满足 $|x_i| \leqslant \max_{c \in C} |u_i(c)|$ 的所有 x 组成的集）和综合的。奥曼（1959，1967）和默顿斯（1980）已证明，不可阻止表示 V^β 在重复博弈的研究中比 V^α 具有某些概念上的优越性。

显然，对任一联盟 S 都有 $V^\alpha(S) \subseteq V^\beta(S)$。可保证表示与不可阻止表示可以不同，作为一个简单的例子，考虑表 9－3 中所示三人博弈的联盟 $\{2, 3\}$，其中每个局中人 i 的纯策略集是 $C_i = \{a_i, b_i\}$。

表 9－3　　一个策略型三人博弈

	$C_2 \times C_3$			
C_1	a_2, a_3	b_2, a_3	a_2, b_3	b_2, b_3
a_1	1，2，2	0，5，0	2，3，0	1，3，1
b_1	1，1，3	0，0，5	2，0，3	1，2，2

如果局中人 1 选择 a_1，则联盟 $\{2, 3\}$ 对局中人 3 不能保证其得到大于 2 个效用单位的支付，即使此联盟能在局中人 1 之后行动，也是如此。类似地，如果局中人 1 选择 b_1，则联盟 $\{2, 3\}$ 不能保证局中人 2 能得到大于 2 的支付。在局中人 1 宣布了任一随机策略 σ_1 之后，联盟 $\{2, 3\}$ 可通过 $\sigma_{\{2,3\}}(a_2, a_3) = \sigma_1(a_1)$ 和 $\sigma_{\{2,3\}}(b_2, b_3) = \sigma_1(b_1)$ 保证其成员每人至少得到 2。因此，联盟 $\{2, 3\}$ 的不可阻止集是 459

$$V^\beta(\{2, 3\}) = \{(x_2, x_3) \mid x_2 \leqslant 2, x_3 \leqslant 2\}$$

现在考虑在局中人 1 选择 σ_1 之前，联盟 $\{2, 3\}$ 必须首先宣布 $\sigma_{\{2,3\}}$ 的情况。无论是什么样的 $\sigma_{\{2,3\}}$，对局中人 2 最坏的结果是假如局中 1 选择 b_1，对局中人 3 最坏的结果是假如局中人 1 选择 a_1。因此，选择 $\sigma_{\{2,3\}}$ 对 $\{2, 3\}$ 只能保证配置 x，其中

$$x_2 \leqslant 1\sigma_{\{2,3\}}(a_2, a_3) + 0\sigma_{\{2,3\}}(b_2, a_3) + 0\sigma_{\{2,3\}}(a_2, b_3) + 2\sigma_{\{2,3\}}(b_2, b_3)$$
$$x_3 \leqslant 2\sigma_{\{2,3\}}(a_2, a_3) + 0\sigma_{\{2,3\}}(b_2, a_3) + 0\sigma_{\{2,3\}}(a_2, b_3) + 1\sigma_{\{2,3\}}(b_2, b_3)$$

（第一个不等式中的系数是 1 选择 b_1 时 2 的支付，而第二个不等式中的系数是 1 选择 a_1 时 3 的支付。）因此，联盟 $\{2, 3\}$ 的可保证集是

$$V^\alpha(\{2, 3\}) = \{(x_2, x_3) \mid x_2 \leqslant 2, x_3 \leqslant 2, x_2 + x_3 \leqslant 3\}$$

这个集在（2，1）与（1，2）处有极点。

既然我们已在对 TU 联盟型博弈的研究中投入过多，那么，对一个给定

的 *NTU* 联盟博弈，找到生成与之相对应（在某种意义上）的 *TU* 联盟博弈的方法，将对分析 NTU 博弈多有裨益。生成这样一个博弈的一种明显方法就是，令每个联盟的价值为其成员所能达到的最大支付和，即

$$v(S) = \max_{x \in V(S)} \sum_{i \in S} x_i$$

然而，当效用实际上不能转让时，这个 *TU* 联盟博弈不是 *NTU* 博弈 V 的一个适当表示，因为它没有包含有关支付在局中人之间分布的信息。例如，考虑两人 *NTU* 博弈，其中

$$V(\{i\}) = \{x_i \mid x_i \leqslant 0\}, \quad i = 1, 2$$
$$V(\{1, 2\}) = \{x_1, x_2 \mid 2x_1 + x_2 \leqslant 0, \quad x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 2\}$$

460 因为 $(-1, 2) \in V(\{1, 2\})$，所以我们会得到 $v(\{1, 2\}) = 1$，但 $\{1, 2\}$ 联盟实际上对这个价值无能为力，因为这个价值只有在强迫局中人 1 去接受小于他自己就能得到的支付时才能实现。如果效用是不可转让的，那局中人 2 就没有办法让局中人 1 觉得做出如此牺牲是值得的。

不过，有一种方法可行，其中一个 *NTU* 联盟博弈可由一族 *TU* 联盟博弈适当地表示，现在我们来考虑这个方法。这里，符号 $\mathbf{R}^N_+$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 中分量皆非负的所有向量组成的集，并用 $\mathbf{R}^N_{++}$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 中所有分量严格为正的向量组成的集。

回想第 1 章和第 2 章曾讲过，通过对一个局中人的效用尺度乘上一个正常数或权因子而得到某个新的效用尺度，如果我们改用这个新的效用尺度来衡量局中人的支付，那么，一个博弈的决策论性质不会因此而改变。于是，可转让效用假设的一个自然而然的推广便是**可转让 λ - 加权效用**（transferable λ-weighted utility）的假设，其中 $\lambda = (\lambda_i)_{i \in N}$ 是 $\mathbf{R}^N_{++}$ 中的任一向量。我们说 λ - 加权效用是可转让的，其充要条件是，存在某种自由可转让的（或可支配的）**通货**（currency），使得对于每个局中人 i，其所得到的此通货每增加一个单位，引起其支付效用增大 λ_i 倍。如果我们通过允许可转让 λ - 加权效用来对一个由 *NTU* 博弈 V 所表示的局势进行变更，那么每个联盟 S 的可行集将成为

$$\left\{ y \in \mathbf{R}^S \mid \sum_{i \in S} \lambda_i y_i \leqslant \max_{x \in V(S)} \sum_{i \in S} \lambda_i x_i \right\}$$

从而给定 $\mathbf{R}^N_{++}$ 中任一正向量和任一紧生成的 *NTU* 联盟博弈 V，我们定义一个 *TU* 联盟博弈 v^λ 为

$$v^\lambda(S) = \max_{x \in V(S)} \sum_{i \in S} \lambda_i x_i, \quad \forall S \in L(N) \tag{9.31}$$

即 $v^\lambda(S)$ 是联盟 S 用其可行的任一配置所能达到的最大 λ - 加权支付和。作为一个联盟博弈，v^λ 刻划在 λ 加权支付为可转让的条件下会存在的局势。这个联盟博弈 v^λ 被称为由 V 生成的**λ - 转让博弈**（λ-transfer game）。

下述定理表明，所有由 V 生成的 λ-转让博弈一起组成的族，在本质上包含了 V 自身结构的全部信息。

定理9.4　令 V 为任一紧生成而又综合的 NTU 联盟博弈，则对任一联盟 S 和 $\mathbf{R}^S$ 中任一向量 y，$y\in V(S)$ 充要条件是，对 $\mathbf{R}^N_{++}$ 中每个 λ，均有 461

$$\sum_{i\in S}\lambda_i y_i \leqslant v^{\lambda}(S)$$

其中 v^{λ} 表示由 V 生成的 λ-转让博弈。

证明　如果 y 在 $V(S)$ 中，则 (9.31) 式中的最大值包含了 $x=y$ 的情形，故直接推出定理中的不等式。

对充分性的证明要用反证法，为此需要**分离超平面定理**［separating hyperplane theorem，例如，参见洛卡菲拉尔（Rockafellar），1970］。分离超平面定理断言，对于任何有限维向量空间 $\mathbf{R}^S$ 的任一闭凸子集 Z 和 $\mathbf{R}^S$ 中任一向量 y，$y\in Z$ 的充分必要条件是，$\mathbf{R}^S$ 中存在某个向量 γ，使得

$$\sup_{z\in Z}\sum_{i\in S}\gamma_i z_i < \sum_{i\in S}\gamma_i y_i$$

现假设 y 不在 $V(S)$ 中。分离超平面定理直接意味着，$\mathbf{R}^S$ 中存在某个 γ，使得

$$\sup_{x\in V(S)}\sum_{i\in S}\gamma_i x_i < \sum_{i\in S}\gamma_i y_i$$

由 V 的综合性，若 γ 有某个负分量 γ_i，则由于 x_i 可以取得任意远小于 0，所以上式的上确界将是 $+\infty$，故此不等式不能成立。因此，γ 一定在 $\mathbf{R}^N_+$ 中。由于 V 是紧生成的［故在集 $V(S)$ 上存在最大值］，所以这一结论蕴含着这里的“上确界”可由“最大值”来代替。

对任一正数 ε，对每个 i，令 $\lambda_i(\varepsilon)=\gamma_i+\varepsilon$，并注意到 $\lambda(\varepsilon)=(\lambda_i(\varepsilon))_{i\in S}\in \mathbf{R}^S_{++}$，我们现在证明，对于某个充分小的 ε，有

$$\max_{x\in V(S)}\sum_{i\in S}\lambda_i(\varepsilon)x_i < \sum_{i\in S}\lambda_i(\varepsilon)y_i$$

因而，当 $y\notin V(S)$ 时，定理中的不等式不能对 $\mathbf{R}^N_{++}$ 中所有 λ 都成立。若非如此，则对每个 ε，在闭有界集 Ω（它紧生成 V）中存在某个向量 $z(\varepsilon)$，使得向量 $(z_i(\varepsilon))_{i\in S}$ 在 $V(S)$ 中，且

$$\sum_{i\in S}\lambda_i(\varepsilon)\ z_i(\varepsilon) \geq \sum_{i\in S}\lambda_i(\varepsilon)\ y_i$$

462

由 Ω 的紧性知，存在 ε 值的一个可能序列收敛于 0，并存在一个向量 $\bar{z}$，使得 $\lim_{\varepsilon\to 0} z(\varepsilon)=\bar{z}$。但 $(\bar{z}_i)_{i\in S}$ 是 $V(S)$ 中的向量，且

$$\sum_{i\in S}\gamma_i\bar{z}_i \geqslant \sum_{i\in S}\gamma_i y_i$$

这与构造 γ 的方法相矛盾。■

9.8 不具可转让效用的核心

给定局中人集 N 上的一个 NTU 联盟博弈 V，V 的**核心**可被定义为 $\mathbf{R}^N$ 中所有配置向量 x 组成的集使得 $x \in V(N)$，且对任一联盟 S 和 $\mathbf{R}^S$ 中任一配置 y，均有

$$y_i > x_i,\ \forall i \in S, \quad \text{则} \quad y \notin V(S)$$

即 x 属于核心的充要条件是，它对大联盟 N 是可行的，且没有联盟会具有比 x 对其成员都要严格更好的向量（参见斯卡夫，1967）。

由于考虑到在联盟中随机化的可能性，我们可形成 NTU 博弈核心的第二个概念。这一解概念即所谓的**内核心**（inner core），它具有更大的理论重要性（[参见秦（Qin），1989]）。

在 9.3 节中，我们曾指出，核心的魅力是基于这样一个隐性假定，即当集 S 中的局中人获得一个机会来形成反对配置 x 的阻挠联盟时，若 S 中的任一局中人都拒绝加入这个阻挠联盟，则他们将实际上得到配置 x。即所建议的阻挠联盟 S 假设是终结性的，且若 S 不去阻挠的话，则以后不会再有联盟阻挠 x，在维持这一假定之下，现在我们扩大范围来考虑，阻挠联盟是由一个使用随机策略的调解人来组织。

为了描述这样一个调解人的计划，令一个**随机阻挠计划**（randomized blocking plan）是任一二元组 (η, Y)，使得 η 是联盟集上的一个概率分布，故 $\eta \in \Delta(L(N))$，而 Y 为定义在 $L(N)$ 上且满足可行性条件

463
$$Y(S) \in V(S),\ \forall S \in L(N) \tag{9.32}$$

的函数。这里，$\eta(S)$ 表示调解人将使 S 成为一个阻挠联盟 S 的概率，而 $Y(S) = (Y_i(S))_{i \in S}$ 表示 S 的成员在一起构成一个阻挠联盟的条件下为他们自己所取得的配置。给定这样一个随机阻挠计划 (η, Y)，假定调解人首先按照 η 随机地选择他企图要形成的阻挠联盟，然后他邀请联盟 S 的每个成员分别加入这个阻挠联盟。并假设在调解人邀请其参加时，每个局中人 i 只知道计划 (η, Y)，但并不知道实际的阻挠联盟。那么，在被邀请参加阻挠联盟的条件下，若每个人都接受调解人的邀请，则局中人 i 的期望支付为

$$\frac{\sum_{S \supseteq \{i\}} \eta(S) Y_i(S)}{\sum_{S \supseteq \{i\}} \eta(S)}$$

再假设，如果调解人计划的阻挠联盟中任一成员拒绝参加，那此联盟便不起作用并不再有进一步阻挠 x 的企图。因此，存在一个每个局中人都乐意接受调解人邀请的均衡的充要条件是，对任一有着正概率被调解人邀请的局中人 i，当 i 接受邀请参加时，其条件期望支付至少是 x_i。这个条件成立等价于

$$\sum_{S\supseteq\{i\}}\eta(S)Y_i(S)\geq\sum_{S\supseteq\{i\}}\eta(S)x_i,\quad\forall i\in N \tag{9.33}$$

一个随机阻挠计划 (η, Y)，当且仅当它满足 (9.33) 式时，我们才说它反对 x 是**切实可行的** (viable)。对博弈 V 而言，$\mathbf{R}^N$ 中的一个配置 x 是**强阻化性的** (strongly inhibitive)，其充要条件为，不存在任何切实可行的反对 x 的随机阻挠计划。也就是说，一个配置是强阻化性的，其充要条件是，没有任何随机的单阶段联盟形成计划能阻挠该配置。

下述定理表明，NTU 联盟博弈 V 的任一强阻化性配置都对应于一个 λ－加权支付配置，它对某个 λ 是在 V 生成的 λ－转让博弈中不能被阻挠的。

定理9.5　设 V 是一个紧生成的 NTU 联盟博弈，一个配置 x 对 V 来讲是强 464
阻化性的，其充要条件为，$\mathbf{R}^N_{++}$ 中存在某个向量 λ 使得

$$\sum_{i\in S}\lambda_i x_i>v^\lambda(S),\forall S\in L(N)$$

其中 v^λ 表示由 V 生成的 λ－转让博弈。

证明　令 $Z(x)$ 为 $\mathbf{R}^N$ 的子集，使得 $z\in Z(x)$ 的充要条件是存在某个随机阻挠计划 (η, Y) 满足

$$z_i\leq\sum_{S\supseteq\{i\}}\eta(S)\{Y_i(S)-x_i\},\quad\forall i\in N \tag{9.34}$$

不难证明，当 V 是紧生成的时，$Z(x)$ 是闭的。再则，$Z(x)$ 是凸的。为证明凸性，令 z 和 $\hat{z}$ 是 $Z(x)$ 中任意两个向量，又令 p 是 0 与 1 之间的任一数。设 (η, Y) 对 z 证实条件 (9.34) 的成立性，$(\hat{\eta}, \hat{Y})$ 对 $\hat{z}$ 亦然。为验证 $pz+(1-p)\hat{z}$ 在 $Z(x)$ 内，只需考虑随机阻挠计划 $(\bar{\eta}, \bar{Y})$，使得对任一联盟 S 都有

$$\bar{\eta}(S)=p\eta(S)+(1-p)\hat{\eta}(S)$$
$$\bar{\eta}(S)\bar{Y}(S)=p\eta(S)Y(S)+(1-p)\hat{\eta}(S)\hat{Y}(S)$$

即可。但由于每个 $V(S)$ 都是凸的，故计划 $(\bar{\eta}, \bar{Y})$ 存在。

配置 x 是强阻化性的，当且仅当 $\mathbf{R}^N$ 中的零向量不在 $Z(x)$ 中。因此，由分离超平面定理知，当且仅当 $\mathbf{R}^N$ 中存在某个向量 λ，使得

$$\sup_{z\in Z(x)}\sum_{i\in N}\lambda_i z_i<0$$

时，x 才是强阻化性的。我们知道，对任何 i，λ_i 都不能是负的，这是因为分量 z_i 向 $-\infty$ 减小决不会使向量 z 在集 $Z(x)$ 之外；但若 λ 有任何负分量，则 $\sum_{i\in N}\lambda_i z_i$ 会随之增大到 $+\infty$。于是，向量 λ 满足该条件的充要条件是，对每个随机阻挠计划 (η, Y)、均有

$$\sum_{i\in N}\lambda_i\sum_{S\supseteq\{i\}}\eta(S)\{Y_i(S)-x_i\}<0$$

465 这个不等式可改写为

$$\sum_{S\in(N)}\eta(S)\sum_{i\in N}\lambda_i\{Y_i(S)-x_i\}<0$$

但是，当且仅当

$$\max_{y\in V(S)}\sum_{i\in N}\lambda_i\ (y_i\quad x_i)\ <0,\qquad \forall S\in L(N)$$

时，上述不等式才会对每个随机阻挠计划 (η, Y) 都成立。因而 x 是强阻化性的，其充要条件为，$\mathbf{R}^N_+$ 中存在某个 λ，使得

$$v^\lambda(S)\ -\ \sum_{i\in S}\lambda_i x_i<0,\qquad \forall S\in L(N)$$

当 $S=\{i\}$ 时，若 λ_i 为 0，则这个条件无法满足，从而 λ 必须在 $\mathbf{R}^N_{+-}$ 中。■

当且仅当存在某个收敛于 x 的强阻化性的配置序列，我们才说 x 是**阻化性的**（inhibitive）。也就是说，一个配置是阻化性的充要条件是，通过以一个任意小量扰动这个配置，我们就能得到一个配置，且没有一个切实可行的随机阻挠计划去反对它。因此，如果一个阻化性的配置可被阻挠，那它只能是刀刃现象，即至少有一个局中人愿意否决这个阻挠联盟而坚持 x。

V 的内核心是 $V(N)$ 中所有阻化性的配置所组成的集。易于验证，内核心是核心的一个子集。由定理 9.5，内核心有一种借助由 V 生成的 λ - 转让联盟型博弈所做出的自然解释。具体而言，x 在 V 的内核心中的充要条件是 $x\in V(N)$，而且对每个正数 ε，$\mathbf{R}^N_{++}$ 中存在某个向量 λ 使得配置向量 $\{\lambda_i\ (x_i+\varepsilon)\}_{i\in N}$ 在 TU 联盟博弈 $v^{\lambda,\varepsilon}$ 的核心中，而 $v^{\lambda,\varepsilon}$ 是由下述方程所定义的：

$$v^{\lambda,\varepsilon}(N)\ -\ U^\lambda(N)+\varepsilon\Big(\sum_{i\in N}\lambda_i\Big),\quad \text{且}\quad v^{\lambda,\varepsilon}(S)=v^\lambda(S),\forall S\neq N$$

其中 v^λ 是由 V 生成的 λ 转让博弈。

466 考虑三人博弈 V 满足

$$V(\{1,2,3\})=\Big\{x\mid\sum_{i\in S}x_i\leqslant 9,\quad \forall S\in L(N)\Big\}$$

$$V(\{1,2\})\ -\ \{(x_1,x_2)\mid x_1+9x_2\leqslant 9,\ x_1\leqslant 9,\ x_2\leqslant 1\}$$

$$V(\{2,3\})\ =\ \{(x_2,x_3)\mid x_2+9x_3\leqslant 9,\ x_2\leqslant 9,\ x_3\leqslant 1\}$$

$$V(\{1,3\}) = \{(x_1, x_3) \mid x_3+9x_1\leqslant 9,\ x_3\leqslant 9,\ x_1\leqslant 1\}$$
$$V(\{i\}) = \{(x_i) \mid x_i\leqslant 0\},\ i=1,2,3$$

此博弈是紧生成且超可加的，而且，其核心是非空的，例如，它包含配置（3，3，3）。不过，它的内核心是空集，为看出（3，3，3）为何不在内核心中，考虑随机阻挠计划（η，Y），使得

$$\eta(\{1,2\}) = \eta(\{2,3\}) = \eta(\{1,3\}) = 1/3$$
$$Y(\{1,2\}) = (9,0),\quad Y(\{2,3\}) = (9,0),\quad Y(\{1,3\}) = (0,9)$$

一个局中人，在被邀参加这个随机阻挠联盟的条件下，将有期望支付4.5，这严格地好于他在（3，3，3）中所得到的支付。

如在9.3节中所见，如果只是小联盟会出现问题，那在某种意义上讲，大型博弈倾向于具有非空核心。为了对内核心表达这个命题，让我们暂把 N 另解释为局中人的类集，而不再是局中人集。如同9.3节之末，我们考虑一个**动态匹配过程**，其中对 N 中的每个 i，第 i 类新个人以某个正的出生率 ρ_i 进入这个匹配过程。进入此匹配过程的每个个人，都被指派与每类局中人最多一个人一起组成某个联盟，且他进入这个联盟便离开了匹配过程。假设，如果 S 是一个联盟中局中人的类集，则 $V(S)$ 描述了此联盟中局中人所能得到的支付配置集。

为刻划这样一个动态匹配过程的产出，一个**匹配计划**（matching plan）是任一二元组（μ，Y），使得 $Y(\cdot)$ 满足可行性条件（9.32），μ 在 $\mathbf{R}_+^{L(N)}$ 中，且 μ 满足如下**平衡**（balance）条件：

$$\sum_{S\supseteq\{i\}} \mu(S) = \rho_i, \forall i \in N \tag{9.35}$$

对 $L(N)$ 中任一 S 和 S 中任一 i，如果一个第 i 类局中人被指派到一个类集为 S 的联盟中，则 $Y_i(S)$ 表示他在这个匹配过程中所能得到的期望支 467
付，而 $\mu(S)$ 表示这种 S 联盟在匹配过程形成的速率。平衡条件（9.35）说明，第 i 类局中人被指派到联盟而离开匹配过程的速率必须等于第 i 类局中人在此匹配过程的速率。一个第 i 类局中人进入匹配过程计划中的期望支付于是便为

$$\sum_{S\supseteq\{i\}} \frac{\mu(S)\ Y_i(S)}{\rho_i}$$

下述定理表明，当博弈 V 是无限复制的，并转化成这样一个动态匹配过程时，阻化性的配置总是能达到的。

定理9.6　假设 V 是紧生成的，且 $\rho\in\mathbf{R}_{++}^N$，则存在某个满足可行性条件（9.32）和平衡条件（9.35）的匹配计划（u，Y），使得向量

$$\left(\sum_{S\supseteq\{i\}}\frac{u(S)\ Y_i(S)}{\rho_i}\right)_{i\in N}$$

是 V 的一个阻化性配置。

证明 令 Ω 为一个有界闭集，V 可在 Ω 内紧生成。取一个足够大的数 b 使得

$$|x_i|+\rho_i+1<b,\quad \forall x\in\Omega,\ \forall i\in N$$

若 x 不是一个强阻化性的配置向量，则定义 $f(x)$ 使得 $y\in f(x)$ 的充要条件为，存在某个随机阻挠计划 $(\eta,\ Y)$ 满足条件：$(\eta,\ Y)$ 能切实可行地反对 x，且

$$y_i=x_i+\sum_{S\supseteq\{i\}}\eta(S),\quad \forall i\in N$$

现定义一个对应 $g:[-b,\ b]^N\to\to[-b,\ b]^N$ 如下。若 x 是强阻化性的，则令 $g(x)=\{x-\rho\}$。若 x 不是阻化性的，则令 $g(x)=f(x)$。最后，若 x 是阻化性的，但又不是强阻化性的，则令 $g(x)$① 为同时包含 $\{x-\rho\}$ 和 $f(x)$ 作为子集的最小凸集。可以验证，g 在 $[-b,\ b]^N$ 上的值域被包含在 $[-b,\ b]^N$ 中，若对任一 i 都有 $x_i<-b+\rho_i$，则 x 是非阻化性的，因为 $v_i\geqslant -b+\rho_i$，故 $\eta(\{i\})=1$ 且 $Y_i(\{i\})=v_i$ 表征了一个切实可行的阻挠计划（回顾方程 (9.28)）；而因此 $g(x)$ 中的任一 y 一定在 $f(x)$ 中，且必须满足 $x_i\leqslant y_i\leqslant x_i+1$。另一方面，若对某个 i

468 有 $x_i>b-\rho_i$②，则不可能有任何反对 x 的切实可行的阻挠计划 $(\eta,\ Y)$，使得 $\sum_{S\supseteq\{i\}}\eta(S)$ 为正，故 $g(x)$ 中任一 y 一定有 $y_i\leqslant x_i$。而且，可以验证，$g(x)$ 总是一个上半连续的非空凸集。

因而，根据角谷静夫不动点定理，存在某个 x 使 $x\in g(x)$。这样的一个 x 一定是阻化性的，但又不是强阻化性的，并且一定存在某个反对 x 切实可行的阻挠计划 $(\eta,\ Y)$，使得向量

$$\left(\sum_{S\supseteq\{i\}}\eta(S)\right)_{i\in N}$$

与 ρ 成比例。即一定存在某个正数 q，使得对每个局中人 i 都有 $\sum_{S\supseteq\{i\}}\eta(S)=q\rho_i$。故对 $L(N)$ 中每个 S 令 $\mu(S)=\eta(S)/q$，则 $(\mu,\ Y)$ 是满足平衡条件 (9.35) 的一个匹配计划，并由切实可行性条件 (9.33) 知

$$\sum_{S\supseteq\{i\}}\frac{\mu(S)\ Y_i(S)}{\rho_i}\geqslant x_i,\quad \forall i\in N$$

但若 x 是阻化性，则各分量都比 x 的相应分量更大的任一配置也是阻化性配

① 原文误为 $f(x)$ ——译者注。

② 原文误为 $b-1$——译者注。

置，所以，期望支付向量 $\left(\sum_{S\supseteq\{i\}}\mu(S)Y_i(S)/\rho_i\right)_{i\in N}$ 是阻化性配置。■

9.9　不具可转让效用的值

恰好如一个 *NTU* 联盟博弈 V 的内核心能用由 V 生成的 λ－转让博弈（轻微扰动）的核心来定义一样，沙普利值和其他解概念的 *NTU* 型也都可用 λ－转让博弈的相应概念来定义（参见沙普利，1969）。

NTU 联盟博弈的沙普利 *NTU* 值可定义如下。令 V 是一个 *NTU* 联盟博弈，并假设 V 是紧生成的。对 $\mathbf{R}^N_+$ 中任一 λ，令 v^λ 为由 V 生成的 λ－转让博弈。由于 v^λ 中联盟价值是局中人 λ－加权效用之和，故沙普利 $\phi(v^\lambda)$ 必须被解释为一个 λ－加权效用配置。因此，我们必须对 $\phi(v^\lambda)$ 的每个分量除以 λ 的相应分量，以便可计算对应于这个 λ－加权效用配置的原效用尺度下的支付配置，令 $\Phi(V,\lambda)=(\Phi_i(V,\lambda))_{i\in N}$ 也是依此方式计算得出的配置向量，则

$$\Phi_i(V,\lambda)=\frac{\phi_i(v^\lambda)}{\lambda_i},\quad \forall i\in N,\quad \forall\lambda\in\mathbf{R}^N_{++} \tag{469}$$

可以证明，若 V 是紧生成的，则 v^λ 和 $\Phi(V,\lambda)$ 连续地依赖于 $\mathbf{R}^N_{++}$ 中的 λ，而且，对任一 λ，有

$$\sum_{i\in N}\lambda_i\Phi_i(V,\lambda)=\sup_{x\in V(N)}\sum_{i\in N}\lambda_i x_i \tag{9.36}$$

且若 V 是超可加的，则

$$\Phi_i(V,\lambda)\geqslant v_i,\quad \forall i\in N \tag{9.37}$$

令 $\Phi^*(V)$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 的子集，且为 $\{\Phi(V,\lambda)\mid\lambda\in\mathbf{R}^N_{++}\}$ 的闭包，即 $x\in\Phi^*(V)$ 的充要条件是存在某个序列 $\{\lambda(k)\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $x=\lim_{k\to\infty}\Phi(PV,\lambda(k))$。（取这个闭包对以下证明存在性定理将起至关重要的作用。）

如果一个 *TU* 联盟博弈的沙普利值被认为是一个公正合理的解，那么，根据一种“独立于无关备选”的论点，$V(N)$ 中任一可行配置 x 若对 $\mathbf{R}^N_{++}$ 中某个 λ 等于 $\Phi(V,\lambda)$，则 x 也可类似地被认为是 V 的一个公正解。也就是说，一个毫无偏袒的仲裁人可能会做如下分析：“如果局中人相信 λ－加权效用的转让是可能的，那他们会对 x 讨价还价；所以，即使在这种转让不可能时，局中人也应该愿意维持 x（可行但不可转让）。”推而广之，我们可以把这一论证应用于 $\Phi^*(V)$ 中的任一可行配置，从而任意接近于根据这种 λ－转让标准是公正的分配。最后，我们可以论证，如果一个配置 x 在可行的前提下又是一个合理的解，则任意一个可行配置对所有局中人都好于 x 理应被认为是一

个合理的解。因此，我们定义 V 的一个**沙普利 NTU 值**为任一配置 $y\in V(N)$，且存在某个向量 $x\in\Phi^*(V)$，使 $x_i\leqslant y_i$ 对 N 中的每个 i 都成立。即沙普利 NTU 值集为

$$V(N)\cap\{x+z\mid x\in\Phi^*(V),\ z\in\mathbf{R}_+^N\}$$

在此定义之下，x 成为 V 的一个沙普利 NTU 值的充分条件之一便是，在 $\mathbf{R}_{++}^N$ 中存在某个 λ，使得

$$x=\left(\frac{\phi_i(v^\lambda)}{\lambda_i}\right)_{i\in N},\quad 及\quad x\in V(N)$$

470 当这个条件满足时，我们称 λ 为支撑沙普利 NTU 值 x 的**自然尺度因子**（natural scale factors）［或**自然效用权重**（natural utility weights）］。

引人注目的是，沙普利 NTU 值同时推广了沙普利值的纳什讨价还价解。如果在方程（9.29）的意义上说，V 等价于一个 TU 联盟 v，则（9.36）式中的上确界仅在 λ 为分量全为 1 的向量（1，1，…，1）乘上一个正系数时才是有限的；故原沙普利值 $\phi(v)$ 是 $\Phi^*(V)$ 中唯一的向量，也是 V 的唯一沙普利 NTU 值。另一方面，如果 V 在 $N=\{1,2\}$、v_1 和 v_2 如（9.28）式所定义及 $F=V(\{1,2\})$ 的意义上等价于一个实质性的两人讨价还价问题 $(F,(v_1,v_2))$，则由定理 8.2 知，$(F,(V_1,V_2))$ 的纳什讨价还价解是 V 唯一的沙普利 NTU 值。

虽然一个 NTU 联盟博弈可有一个以上的沙普利 NTU 值，但可证明沙普利 NTU 值的一般存在性定理。

定理9.7 设 V 是紧生成且超可加的，则至少存在 V 的一个沙普利 NTU 值。

证明 实际上，我们只须考虑分量之和为 1 的效用权重向量 λ。令 ε 是任一小于 $1/|N|$ 的很小的正数，且令

$$\Delta^\varepsilon(N)=\left\{\lambda\in\mathbf{R}^N\mid\sum_{i\in N}\lambda_i=1,\ \lambda_j\geqslant\varepsilon,\ \forall j\in N\right\}$$

令 Ω 为 $\mathbf{R}^N$ 的一个有界闭凸子集，使得对 $V(N)$ 中任一 x，$\Omega\cap V(N)$ 中总存在某个 y 对所有的 i 均有 $y_i\geqslant x_i$。

对于任何一对 (λ,y)，定义集 $f_\varepsilon(\lambda,y)$，使得 $(\mu,x)\in f_\varepsilon(\lambda,y)$ 的充要条件是

$$x\in\underset{z\in\Omega\cap V(N)}{\operatorname{argmax}}\sum_{i\in N}\lambda_i z_i$$

$$\mu\in\Delta^\varepsilon(N)$$

且对每个局中人 i，均有

若　$\Phi_i(V,\lambda)-y_i<\max_{j\in N}\{\Phi_j(V,\lambda)-y_j\}$，　则　$\mu_i=\epsilon$

可以验证，对应 $f_\epsilon:\Delta^\epsilon(N)\times\{\Omega\cap V(N)\}\to\to\Delta^\epsilon(N)\times\{\Omega\times V(N)\}$ 是上半连续和非空凸值的，从而它也满足了角谷静夫不动点定理的一切条件。 471
因此，存在某个 $\{\lambda(\epsilon),y(\epsilon)\}$，使得

$$\{\lambda(\epsilon),y(\epsilon)\}\in f_\epsilon\{\lambda(\epsilon),y(\epsilon)\}$$

令 $S=\operatorname{argmax}_{j\in N}\left(\Phi_j(V,\lambda(\epsilon))-y_j(\epsilon)\right)$，利用 (9.36) 式得到

$$\begin{aligned}0&=\sum_{i\in N}\lambda_i(\epsilon)\{\Phi_i(V,\lambda)-y_i(\epsilon)\}\\&=(1-|N\setminus S|\epsilon)\max_{j\in N}\left(\Phi_j(V,\lambda(\epsilon))-y_j(\epsilon)\right)\\&\quad+\sum_{i\in N\setminus S}\epsilon\left(\Phi_i(V,\lambda(\epsilon))-y_i(\epsilon)\right)\end{aligned}$$

所以，利用 (9.37) 式得到

$$\max_{j\in N}\left(\Phi_j(V,\lambda(\epsilon))-y_j(\epsilon)\right)\leq\sum_{i\in N}\frac{\epsilon\max\{0,\{y_j(\epsilon)-v_i\}\}}{1-|N|\epsilon}$$

可以找到一个序列 $\{\epsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\lim_{k\to\infty}\epsilon_k=0$，且 $\{y(\epsilon_k)\}_{k=}^{\infty}$ 是有界闭集 $\Omega\cap V(N)$ 中收敛于某个极限 $\bar{y}$ 的一个收敛序列。顺着这个序列，上面不等式的右边收敛于0。因此，可从中找出一个子序列，沿着这个子序列，对每个局中人 j，数 $\Phi_j(V,\lambda(\epsilon_k))$ 也收敛于某个满足 $v_j\leqslant\bar{x}_j\leqslant\bar{y}_j$ 的极限 $\bar{x}_j$. 从而配置 $\bar{x}$ 在 $\Phi^*(V)$ 中，且可行配置 $\bar{y}$ 是 V 的一个沙普利 NTU 值。■

奥曼 (1985) 从一组类似于沙普利值（在 TU 情况下）和纳什讨价还价解的公理，推导出了沙普利 NTU 值。这里我们提供其推导的一种修改型。

$\partial_+V(N)$ 为闭凸集 $V(N)$ 的上边界，即 $V(N)$ 中所有弱帕累托有效配置所组成的集。由于 $V(N)$ 的凸性，可以证明，对 $\partial_+V(N)$ 中的任一配置 x，$\Delta(N)$ 中至少存在一个向量 λ 使得

$$x\in\operatorname*{argmax}_{y\in V(N)}\sum_{i\in N}\lambda_iy_i \tag{9.38}$$

这样的一个向量 λ 被称为 $V(N)$ 在 x 处的**支撑向量** (supporting vector)。[一个凸集在其边界上的任一点处非零支撑向量的一般存在性被称为**支撑超平面定理** (supporting hyperplane theorem)，这一结论是分离超平面定理的一个直接推论。] 从几何上讲，满足 (9.38)式的支撑向量与 $V(N)$ 在 x 处的切平面是 472
正交的。若 x 是 $V(N)$ 的一个角点，则 $\Delta(N)$ 中存在许多这种 $V(N)$ 在 x 处的支撑向量，奥曼的光滑性条件排除了这种角点的可能性。此外，他还利用了所有弱帕累托有效配置也是强帕累托有效配置这一条件。我们可把这两个假

定归并称 $V(N)$ 是**正定光滑的** (positively smooth)，其充要条件是，对$\partial_+ V(N)$ 中的每个 x，$\Delta^0(N)$ 中存在唯一的一个支撑向量 λ 满足 (9.38) 式（回顾 1.6 节，$\Delta^0(N) = \Delta(N) \cap \mathbf{R}^N_+$）。

对任意两个 NTU 联盟博弈 V 和 W，和介于 0 与 1 之间的任一数 p，令 $pV + (1-p)W$ 被定义为，对任一联盟 S，$[pV + (1-p)W](S)$ 是集

$$\{py + (1-p)z \mid y \in V(S),\ z \in W(S)\}$$

在 $\mathbf{R}^S$ 中的闭包，对 $\mathbf{R}^N_+$ 中任一向量 λ，用 λV 表示 NTU 联盟博弈，使得

$$(\lambda V)(S) = \{(\lambda_i y_i)_{i \in S} \mid y \in V(S)\},\ \forall S \in L(N)$$

令 $\Psi(\cdot)$ 是一个映射，它对任一 NTU 联盟博弈 V 确定一个“解”集 $\Psi(V)$。于是，我们可以考虑以下公理系。

公理 9.4（有效性） 对任一 NTU 联盟博弈 V，$\Psi(V) \subseteq \partial_+ V(N)$。

公理9.5（尺度协变性） 对 $\mathbf{R}^N_+$ 中任一 λ 和任一 NTU 联盟博弈 V，有 $\Psi(\lambda V) = \{(\lambda_i x_i)_{i \in N} \mid x \in \Psi(V)\}$。

公理9.6（沙普利值的拓延） 若在 (9.29) 式的意义上 V 与一个 TU 联盟博弈 v 是等价的，则 $\Psi(V) = \{\phi(v)\}$。

公理9.7（条件线性性） 设 V 和 W 都是正定光滑的 NTU 联盟博弈，p 是介于 0 与 1 之间的一个数，$pV+(1-P)W$ 满足 NTU 联盟博弈的条件 (9.26) ~ (9.28)，$y \in \Psi(V)$，$z \in \Psi(W)$ 及 $py + (1-p)z \in \partial + (pV + (1-p)W)(N)$，则 $py + (1-p)z \in \Psi(pV + (1-p)W)$。

473 条件线性性是 TU 情况中沙普利值线性性公理自然推广的一种弱表达。（实际上，奥曼利用了一个略简单些的条件可加性公理。这里我们用线性性代替可加性是为了与 9.4 节更为一致。）公理 9.7 表明，如果在 V 与 W 的解之间随机化在 $pV + (1-p)W$ 中是有效的，那它就是 $pV + (1-p)W$ 的一个解。可以证明，当 $\Psi(V)$ 表示 V 的沙普利 NTU 值集时，这 4 条公理都是满足的。（不过，若没有正定光滑性条件，则沙普利 NTU 值将不满足条件线性性。）

定理9.8 假设 $\Psi(\cdot)$ 满足上述 4 条公理。令 V 为任一正定光滑的 NTU 联盟博弈，并令 x 为 $\Psi(V)$ 中任一配置。则 x 为 V 的一个沙普利 NTU 值。

证明 令 λ 为 $\Delta^0(N)$ 中 $V(N)$ 在 x 处唯一的支撑向量，根据尺度协变性有 $(\lambda_i x_i)_{i \in N} \in \Psi(\lambda V)$。对每个联盟 S，令

$$W(S) = \{z \in \mathbf{R}^S \mid \sum_{i \in S} z_i \leqslant v^\lambda(S)\}$$

其中 v^λ 为由 V 生成的 λ－转让博弈。由沙普利值的拓延公理有 $\Psi(W) = \{\phi(v^\lambda)\}$。可以证明

$$.5(\lambda V) + .5W = W$$

而且，$.5(\lambda_i x_i)_{i\in N} + .5\phi(v^\lambda) \in \partial_+ W(N)$，这是因为 $\sum_{i\in N}\lambda_i x_i = v^\lambda(N)$。从而条件可加性意味着

$$.5(\lambda_i x_i)_{i\in N} + .5\phi(v^\lambda) = \phi(v^\lambda)$$

而因此对每个局中人 i 都有 $x_i = \phi_i(v^\lambda)/\lambda_i$。于是，$x$ 是一个沙普利 *NTU* 值。■

NTU 值的其他定义已由哈森伊（1963）和欧文（1972）提出过。哈森伊 *NTU* 值或许可描述如下。假设 V 是一个综合的 *NTU* 联盟博弈，对任一 S，令

$$\partial_1 V(S) = \{x \in V(S) \mid \forall y \in \mathbf{R}^S, \text{若 } y_i > x_i \quad \forall i \in S, \text{则 } y \notin V(S)\}。$$

一个配置 x 是一个哈森伊 *NTU* 值的前提是，$\mathbf{R}^N_{++}$ 中存在某个 λ，并存在某个函数 $X(\cdot)$使得

$$X(S) = (X_i(S))_{i\in S} \in \partial_+ V(S), \quad \forall S \in L(N) \qquad 474$$

$$\lambda_i X_i(S) - \lambda_i X_i(S-j) = \lambda_j X_j(S) - \lambda_j X_j(S-i), \quad \forall S \in L(N)$$

$$\forall i \in S, \ \forall j \in S$$

$$x = X(N) \in \operatorname*{argmax}_{y\in V(N)} \sum_{i\in N} \lambda_i y_i$$

[哈森伊（1963）所给出有原始定义多少更复杂些，但这个叙述与之等价；参见迈尔森，1980。] 哈森伊 *NTU* 值也同时推广了 *TU* 沙普利值和两人纳什讨价还价解，且已由哈特（1985*b*）公理化地推导了出来。

例如，考虑取自欧文（1972）的**银行家博弈**（Banker game），其中

$$V(\{i\}) = \{(x_i) \mid x_i \leqslant 0\}, \qquad i = 1, 2, 3$$

$$V(\{1, 2\}) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + 4x_2 \leqslant 100, \quad x_1 \leqslant 100\}$$

$$V(\{1, 3\}) = \{(x_1, x_3) \mid x_1 \leqslant 0, \qquad x_3 \leqslant 0\}$$

$$V(\{2, 3\}) = \{(x_2, x_3) \mid x_2 \leqslant 0, \qquad x_3 \leqslant 0\}$$

$$V(\{1, 2, 3\}) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 100\}$$

其思想是，局中人 1 借助于局中人 2 能得到 100 美元。为报答局中人 2，局中人 1 可送他货币；但没有局中人 3，便存在 75% 的机会损失所送的货币。局中人 3 是一个银行家，他可以在交易中防止这种损失。局中人 1 应该对局中人 2 的帮助回报多少，又应该为局中人 3 的银行服务付酬多少呢？

对此博弈，由自然尺度因子 $\lambda = (1, 1, 1)$ 支撑的唯一沙普利 *NTU* 值是 $(50, 50, 0)$。根据这些权重，由于 $(100, 0)$ 对联盟 $\{1, 2\}$ 可行，故

$$v^{\lambda}(\{1,2\})=100=v^{\lambda}(\{1,2,3\})$$

而对其他每个联盟 S 都是 $v^{\lambda}(S)=0$；故 $\phi(v^{\lambda})=(50,50,0)\in V(N)$。

在 $\lambda=(1,1,1)$ 及

$$X_i(\{i\})=0,\ i=1,2,3$$
$$X_1(\{1,2\})=X_2(\{1,2\})=20$$
$$X_1(\{1,3\})=X_2(\{1,3\})=0$$
$$X_2(\{2,3\})=X_3(\{2,3\})=0$$
$$X_1(\{1,2,3\})=40=X_2(\{1,2,3\}),\ X_3(\{1,2,3\})=20$$

475 的支撑下，唯一的哈森伊 NTU 值是 $(40,40,20)$。哈森伊 NTU 值给局中人 1 和 2 较低的支付，因为它考虑到了如下事实：只有在选择一个对局中人 2 相当不公平的情况下，$\{1,2\}$ 联盟才能实现其最大支付和。如果 $\{1,2\}$ 联盟受到制约，必须选择一个每人可单独得到的 λ-加权效用中给他们相等收益的可行配置，那他们将无可奈何地满足于最多为 40 的支付和。欧文 NTU 值也给银行家一个正的支付，并给局中人 1 多于局中人 2 的支付。

对沙普利 NTU 值给银行家的支付为 0，有一个可能的逻辑依据。对于得到 0，局中人 3 在接受沙普利 NTU 值所确定的结果与否这个问题上，应该是无所谓的，所以，假定他将可能接受它是合情合理的（设想在沙普利 NTU 值中的支付为正但无穷小，而其提供银行服务的成本为 0）。所以假设局中人 3 将拒绝接受他的 NTU-值联盟并中断大联盟只有某个很小的概率 q，只要 $q\leqslant 1/2$，局中人 1 和 2 在不损失他们任何一个人的期望效用且局中人 3 合作时也并不减少局中人 3 的支付前提下，能够提供这种可能性。他们可简单地计划在局中人 3 拒绝大联盟时选择 $(100,0)$，并在局中人 3 同意合作时选择 $[100-50/(1-q),\ 50/(1-q),\ 0]$。

现令 $i=1$ 或 2，并转而假设局中人 i 将有某个小概率 q 拒绝沙普利 NTU 值（尽管它比他自己所能得到的要好）并打破大联盟。在这种情况下，另两个局中人的期望支付之和，在没有减少局中人 i 同意情形中支付的情况下，不可能大于 $50(1-q)$。也就是说，局中人 1 或 2 的一个低概率威胁将导致其余局中人期望支付的真实减少，并且他们的作用是对称的；但局中人 3 的这种威胁，在被正确预料时，将对期望支付毫无影响。在这种意义上讲，局中人 1 和 2 具有平等的讨价还价能力，而局中人 3 没有，故 $(50,50,0)$ 或许是一个合乎情理的讨价还价解。

一般地，令 x 为大联盟的一个有效支付配置，设 $\mathbf{R}^N_+$ 中的 λ 是 $V(N)$ 在 x 处的一个支撑向量，并设 V 是正定光滑的。那么，就一阶近似而言，λ-加权效用的小转让对大联盟中局中人来讲在 x 附近是可行的。即，对任一充分小的数 ε，若局中人 i 允许其支付从 x_i 减小到 $x_i-\varepsilon/\lambda_i$，那其他任一局中人 j

的支付能从 x_j 增至 $x_j+\varepsilon/\lambda_j$，但在不影响任一其他局中人的支付或不离开可 476
行集 $V(N)$ 下，要减去某个很小且比例于 ε 的“交易成本”。

现假设局中人都几乎肯定会接受配置 x，除非某个小联盟 S，以某个小概率，可能必须选择某个对他们可行的配置。还假设 S 在此情形下做什么的计划在 S 的成员在知道大联盟合作与否之前可取得一致意见。在这样一个局势中，N 合作这个可能事件中承诺很小的一个 λ-加权效用转让，与 S 必须单独行动这个不太可能事件中大得多的 λ-加权效用转让将大致相当。因此，当联盟 S 的成员在必须单独行动的条件下决定做什么时，λ-加权效用在他们中间是可有效转让的，其中的交换媒介是，在接受 x 这一非常大可能性的事件中，对离开 x 的一个小可行再配置（不影响 $N\setminus S$ 中局中人的支付）而做出的一个许诺。根据这一论证，把这个讨价还价博弈作为 λ-加权效用对任一联盟都是可转让的博弈进行分析或许是适当的。如果这种分析肯定了 x 在大联盟合作时为此讨价还价过程的一个合理结果这一初始假设［即，如果 $\lambda_i x_i=\phi_i(v^\lambda)$ 对每个 i 都成立］，那么，认为 x 应该是 *NTU* 博弈 V 的一个合作解便顺乎情理。在这个意义上，沙普利值是 V 的合理的合作解。

罗思（1980）和谢弗（shafer）曾研究了一些其中沙普利值看起来违反直觉的博弈。例如，考虑罗思（1980）提出的如下 *NTU* 联盟博弈。

$$V(\{i\})=\{(x_i)\mid x_i\leqslant 0\},\ i=1,2,3$$
$$V(\{1,2\})=\{(x_1,x_2)\mid x_1\leqslant 1/2,\ x_2\leqslant 1/2\}$$
$$V(\{1,3\})=\{(x_1,x_3)\mid x_1\leqslant 1/4,\ x_3\leqslant 3/4\}$$
$$V(\{2,3\})=\{(x_2,x_3)\mid x_2\leqslant 1/4,\ x_3\leqslant 3/4\}$$
$$V(\{1,2,3\})=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3\leqslant 1,x_1\leqslant 1/2,x_2\leqslant 1/2\}$$

对于这个博弈，唯一的沙普利 *NTU* 值是 $(1/3,1/3,1/3)$，由自然尺度因子 $\lambda=(1,1,1)$ 支撑。

罗思认为此博弈唯一合理的合作结果应是 $(1/2,1/2,0)$，因为 $1/2$ 是局中人 1 或局中人 2 在任何联盟中所能得到的最好支付，并且他们都能在无须借助于局中人 3 时得到 $1/2$。于是，局中人 1 与 2 之间看起来没有存有异议的 477
理由，并且他们中没有任何人有理由去与局中人 3 讨价还价。注意，这个论证依赖于 $V(\{1,2,3\})$ 中存在一个角点 $(1/2,1/2,0)$ 这一事实，故由于此博弈违背了定理 9.8 中的光滑性假设，所以这个论证成立。

对此例中用沙普利 *NTU* 值的困难，一个可能的反应是研究具有合作结构的 *NTU* 值和有关这种合作结构如何可被内生决定的理论。就这个博弈而言，内生合作结构的合理理论应该明确，局中人 1 和 2 将一起合作，而没有局中人 3。

另有一些直接定义策略型博弈沙普利值的方法，而无须借助于 *NTU* 联盟型，令 $\Gamma=(N,(C_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N})$ 是任一有限策略型博弈。对于 $\mathbf{R}^N_{++}$ 中任一向量 λ，令 Γ 的 λ-**尺度重调型**（λ-rescaled version）为

$$\lambda^*\Gamma=\ (N,\ (C_i)_{i\in N},\ (\lambda_i u_i)_{i\in N})$$

即 $\lambda^*\Gamma$ 与 Γ 的差别仅在于每个局中人 i 的效用函数都乘了 λ_i。按照 9.2 节所给的任一定义，我们计算具有可转让效用的策略型博弈 $\lambda^*\Gamma$，并令 w^λ 表示其联盟型表示。举例而言，我们应用最小化最大表示所给出的联盟型博弈为

$$w^\lambda(S)=\min_{\sigma_{N\setminus S}\in\Delta(C_{N\setminus S})}\max_{\sigma_S\in\Delta(C_S)}\sum_{i\in S}\lambda_i u_i(\sigma_S,\ \sigma_{N\setminus S})$$

再令

$$\Phi_i\ (\Gamma,\ \lambda)=\frac{\phi_i(w^\lambda)}{\lambda_i},\quad \forall i\in N$$

然后，一如从前，令 $\Phi^*(\Gamma)$ 表示集

$$\{\Phi\ (\Gamma,\ \lambda)\ |\lambda\in\mathbf{R}^N_{++}\}$$

在 $\mathbf{R}^N$ 中的闭包。于是，我们能说 x 是 Γ 的一个沙普利值的充要条件是，$\Delta(C_N)$中存在某个联盟策略 σ_N，且 $\Phi^*(\Gamma)$ 中存在某个配置 y，使得

$$x_i=u_i\ (\sigma_N)\geqslant y_i,\quad \forall i\in N$$

如在对定理 9.7 的证明过程中一样，利用类似于 (9.36) 和 (9.37) 式的条件，有限策略型博弈沙普利 NTU 值的一般存在性可以得到证明。

习 题

478 **9.1** 考虑下述具有可转让效用的联盟型 **4** 人博弈：

$$v(\{i\})=0,\ \forall i\in\{1,2,3,4\}$$
$$v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,4\})=v(\{3,4\})=1$$
$$v(\{1,4\})=v(\{2,3\})=0$$
$$v(\{2,3,4\})=v(\{1,3,4\})=v(\{1,2,4\})=1$$
$$v(\{1,2,3\})=2=v(\{1,2,3,4\})$$

(注意，除 $\{1,2,3\}$ 外，每个联盟的价值都等于此联盟中成员所能形成的由 $\{1,4\}$ 中的一个局中人与 $\{2,3\}$ 中的一个局中人配成的不相交的对数。)

a. 证明此博弈的核心由单个配置向量组成。

b. 计算此博弈的沙普利值（注意局中人 2 与 3 之间的对称性）。

c. 假设 $\{1,2,3\}$ 的价值变为 $v(\{1,2,3\})=1$，试刻划新博弈的核心，并证明：核心中的所有新配置对局中人 1 来讲都严格好于原博弈的核心中那单个配置向量。

d. 由（c）计算新博弈的沙普利值。

9.2　证明：若 v 是一个策略型博弈的最小化最大表示，则 v 一定是超可加的。

9.3　假设有3个厂商生产同一产品，厂商1是家小厂商，每天能生产或0或1单位的产品，厂商2和3是大厂商，每天每个厂商能生产或2或3个单位的产品。市场价格按照公式

$$P=8-(c_1+c_2+c_3)$$

取决于日产量，其中 c_i 是厂商 i 的日产量。厂商 i 的可转让支付是其日收益 Pc_i。

a. 将此博弈模型化为策略型博弈。

b. 计算这个具有可转让效用博弈的联盟型最小化最大表示。计算此联盟博弈的沙普利值并检验它是否属于核心。

c. 计算这个具有可转让效用博弈的联盟型理性威胁表示。此联盟博弈是超可加的吗？计算此联盟博弈的沙普利值。在每个局中人 i 至少能得到其个人联盟的价值 $v(\{i\})$ 的意义上，这个沙普利值是个人理性的吗？ 479

d. 这个具有可转让效用博弈的联盟型防御均衡表示是什么？

9.4　简单博弈（simple game）是一个具有可转让效用的联盟型博弈，满足 $v(N)=1$，其中 N 是所有局中人的大联盟，$v(\{i\})=0$ 对 N 中每个局中人 i 都成立，且对每个其他的联盟 S，$v(S)=0$ 或1。局中人 i 是简单博弈 V 的一个**否决局中人**（veto player）的充要条件是

$$v(S)=0,\ \forall S\subseteq N-i.$$

证明：任一简单博弈的核心可由其否决局中人集来刻划。（提示：你的刻划应该蕴含着，如果没有否决局中人，则核心为空集。）

9.5　一个重要国际组织的理事会有5个成员。国家1和2是大国；国家3、4和5是小国。只要两个大国和至少一个小国投票赞成所提议的行动，理事会就能批准任何有关国际安全问题的行动。这个理事会的权力结构在数学上或许可由一个联盟博弈来描述，其中任何可批准行动（通过其成员单独投票）的联盟都具有价值1，而不能批准行动的任一联盟都具有价值0。

a. 此博弈的核心是什么？

b. 此博弈的沙普利值是什么？

c. 假设3个小国在理事会中形成更紧密的关系，以至存在一个有效的嵌套联盟结构 $\{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\}$。此博弈在这种嵌套联盟结构下的欧文值是什么？按照这个欧文值，这种结合有助于这些小国吗？

d. 计算此博弈在嵌套结构 $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$ 下的欧文值。如果小国家形成了团体，按照这个欧文值，大国也能通过形成团体而受益吗？

480 **9.6** 考虑一个具有可转让效用的三人联盟博弈，其中 $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$，$v(\{1, 2\}) = 8$，$v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 5$，$v(\{1, 2, 3\}) = 9$。

a. 找出此博弈的沙普利值及核心。

b. 计算此博弈的公正配置规则 ϕ，并验证它满足条件 (9.21)。

9.7 3个城市要利用现有水库建设一个地区性供水系统，所有城市都必须用管道网络与水库相连，在每两个城市之间及每个城市与水库之间铺设管道的成本（以百万美元计）如下：

	到地点2的管道成本		
地点1	城市1	城市2	城市3
水库	18	21	27
城市1		15	12
城市2			24

基于这些成本，建设供水系统最便宜的方法是，从水库到城市1修一条管道，再从城市1向城市2和城市3各修一条管道，总成本为 $18+15+12=45$。博弈论的问题是决定总成本在这些城市之间应如何分摊，把城市视作博弈的局中人。

a. 将这个问题模型化为具有可转让效用的联盟型三人博弈，其中局中人为城市，而每个联盟 S 的价值是把 S 中城市连接到水库的最便宜管道成本反号的数。例如 $v(\{1, 2, 3\}) = -45$。

b. 若已经提议每个城市应该对流向该市的管道承担费用，而不管其他城市是否也用这个管道，则将导致配置 $(-18, -15, -12)$。(所有的支付都为负，是因为它们表示了必须支付的成本。) 证明这个配置在核心中。

c. 计算此博弈的沙普利值，它在核心中吗？

d. 将此博弈表达成由方程 (9.10) 所定义的简单载体博弈的一个线性组合。

9.8 给定一个有限策略型博弈 $\Gamma = (N, (C_i)_{i\in N}, (ui)_{i\in N})$，令 NTU 联盟博弈 Γ^{α} 和 Γ^{β} 分别表示 Γ 的可保证表示和 Γ 的不可阻止表示。

481 a. 证明：对任一联盟 S，$V^{\alpha}(S)$ 及 $V^{\beta}(S)$ 都是凸集。

b. 证明 V^{α} 是超可加的。

c. 证明 V^{β} 是超可加的。(提示：你可用角谷静夫不动点定理。)

9.9 假设在9.9节所讨论的条件线性性公理中，我们去掉了对 V 和 W 都是正定

光滑的要求，构造一个例子来说明沙普利 *NTU* 值将不会满足这个较强的公理。

9.10 考虑表 9-3 中不具有可转让效用的策略型博弈。

a. 对此博弈，完成对 *NTU* 联盟型可保证表示 V^α 和不可阻止表示 Γ^β 的构造。

b. 证明配置 (1, 2, 2) 在 V^α 和 Γ^β 的核心中。但不在 V^α 和 V^β 的内核心中。为证明不在内核心中，找出一个随机阻挠计划，使得每个局中人在被邀请参加阻挠联盟时，其期望支付严格大于其在 (1, 2, 2) 中所得到的支付。(提示：可通过对联盟 $\{1, 2, 3\}$，$\{1, 2\}$ 及 $\{1, 3\}$ 赋予正概率来做。)

c. 对 V^α 和 V^β 计算沙普利 *NTU* 值。

d. 如在9.9节末所建议的那样，令 w^λ 表示表9-3中策略型博弈 λ-尺度重调型的最小化最大表示。设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$，计算 *TU* 联盟博弈 w^λ，并证明其沙普利值 $\phi(w^\lambda)$ 对具有不可转让效用的原博弈中的局中人是可行的。

9.11 试刻划源于9.9节的银行家博弈的核心和内核心。找出一个反对配置 (41, 41, 21) 的切实可行的随机阻挠计划，从而证明哈森伊 *NTU* 值 (40, 40, 20) 不是该博弈的一个阻化性配置。

文献注释

欧文 (1982) 和卢卡斯 (1972) 用特征函数或联盟型对博弈各式各样的解概念进行了综述。在过去十年左右，合作博弈领域的主要兴趣集中于沙普利值及与之密切相关的解概念方面；参见卡莱和萨梅特 (1985, 1987)，哈特和马斯科莱尔 (1989)，杨 (Young, 1985) 以及罗思的综述性书籍 (1988)。贝内特 (1983) 曾研究过与核心更密切相关的解概念。 482

卢卡斯和思罗尔 (Thrall, 1963) 定义了一个广义联盟型，被称为**划分函数型** (partition function form)，其中一个联盟的价值可能要取决于其他局中人是被如何指派到联盟中去的 (也可参见迈尔森，1978*b*)。

至于合作博弈理论在对投票研究中的运用，参见沙普利和舒比克 (Shubik, 1954)，布莱克 (1984) 及莫林 (1988)。比勒拉、希思、及拉南恩 (Billera, Heath and Ranaan, 1978) 及其他学者，已将非原子博弈* 的值应用于成本分摊问题；参见陶曼 (Tauman, 1988)。

---

* 对任一局中人集为 $[0, 1]$ 的博弈，其任一载体的补集被称为零集。一个原子 (atom) 是任一非零可测集 S，使得若

$$S = T \cup T' \text{及} T \cap T' = \varnothing$$

对可测集 T 与 T′ 成立，则要么 T 要么 T′ 是一个零集。一个没有原子的博弈被称为非原子博弈 (nonatomic game) ——译者注。

10

不确定性下的合作

10.1 引言

在本章中，我们考虑具有不完全信息的合作博弈理论基础，对合作博弈理 483
论附加不完全信息引出了该理论许多新的概念问题。特别地，为了理解具有不完全信息的合作博弈，我们不仅需要考虑不同的局中人应如何相互妥协的问题，而且还要考虑单个局中人在其真实类型的目标与其他可能类型的目标之间应该如何妥协的问题，以保持其在谈判中神秘莫测的外表。

为简化分析，我们在本章中只讨论贝叶斯集体选择问题和贝叶斯讨价还价问题，而不试图对具有一般激励约束的贝叶斯博弈（如 6.3 节中所阐述）做一般性的探讨。回顾 6.4 节所述，一个贝叶斯集体选择问题可记作如下形式

$$(N,\ C,\ (T_i)_{i\in N},\ (p_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}) \tag{10.1}$$

其中 N 是局中人集，C 是局中人能从中联合选择的可能结果或可能方案集，p_i 是概率函数，它把局中人 i 关于其余局中人类型的信念表示为他自己类型的函数，而 u_i 是局中人 i 的效用支付函数。

为了简化公式，我们在本章的大部分内容（除 10.6 节之外）假设局中人的信念是与 $\Delta(T)$ 的某个先验分布相一致的，而在这个先验分布下，局中人的类型是独立的随机变量（回忆 $T=\times_{i\in N}T_i$）。即我们假定，对于每个局中人 i，$\Delta(T_i)$ 中都存在一个概率分布 p_i 使 $\bar{p}_i(t_i)$ 为局中人 i 的类型为 t_i 的先 484
验边缘概率，并有

$$p_i(t_{-i}\mid t_i)=\prod_{j\in N-i}p_j(t_j),\ \forall i\in N,\ \forall t_{-i}\in T_{-i},\ \forall t_i\in T_i \tag{10.2}$$

（和往常一样，我们令 $T_{-i}=\times_{j\in N\ -i}T_j$，$t_{\ -i}=(t_j)_{j\in N\ -i}$，而 $p_i(t_{-i}\mid t_i)$ 为局中人 i 只知道自己的类型为 t_i 时对 t 是所有局中人的类型组合这一事件所赋予的概率。）就这个先验概率分布自身而言，T 中某个 t 将成为局中人的实际类型组合这一事件的概率是

$$p(t)=\prod_{i\in T}p_i(t_i)$$

这里，我们假定所有类型都有正的概率，故

$$p_i(t_i)>0,\ \forall i\in N,\ \forall t_i\in T_i$$

在2.8节中曾经指出，任一有限贝叶斯博弈都等价于一个满足与某个独立先验分布相一致这个条件的贝叶斯博弈。

贝叶斯集体选择问题（10.1）的一个**调解计划或调解机制**就是任一函数 $\mu: T\to\Delta(C)$。我们假定局中人的类型是调解人无法证实的，因而一个**激励相容**的机制必须满足如下信息激励约束：

$$U_i(\mu|t_i)\geq U_i^*(\mu,\ s_i|t_i),\quad \forall i\in N,\ \forall t_i\in T_i,\ \forall s_i\in T_i \tag{10.3}$$

其中

$$U_i(\mu\mid t_i)=\sum_{t_{-i}\in T_{-i}}\sum_{c\in C}\Big(\prod_{j\in N\ -\ i}\bar{p}_j(t_j)\Big)\mu(c\mid t)u_i(c,t) \tag{10.4}$$

$$U_i^*(\mu,s_i\mid t_i)=\sum_{t_{-i}\in T_{-i}}\sum_{c\in C}\Big(\prod_{j\in N-i}\bar{p}_j(t_j)\Big)\mu(c\mid t_{-i},s_i)u_i(c,t) \tag{10.5}$$

正如6.4节所定义的那样，一个**贝叶斯讨价问题** Γ^β 是一个贝叶斯集体选择问题与对不一致同意结果 d^* 的一个设定的合成，若局中人不能对一个机制达成一致，则这个结果 d^* 就将发生。借助于独立先验假设，我们可记作

$$\Gamma^\beta=\{N,\ C,\ d^*,\ (T_i)_{i\in N},\ (\bar{p}_i)_{i\in N},\ (u_i)_{i\in N}\} \tag{10.6}$$

485 在大多数应用中，定义效用尺度使不一致同意的结果总是给予每个局中人每个类型的支付为零，将较为方便，即

$$u_i(d^*,\ t)=0,\quad \forall i\in N,\ \forall t\in T \tag{10.7}$$

而且我们将在本章始终应用这个约定。于是，一个机制 μ 被称为**个人理性的**，其充要条件是，它满足参与（或个人理性）约束：

$$U_i(\mu|t_i)\geq 0,\ \forall i\in N,\ \forall t_i\in T_i \tag{10.8}$$

因此，没有任何局中人的某个类型预期在 μ 下会做得比不一致同意结果还差。

对于一个贝叶斯讨价还价问题，我们说一个机制是**激励可行的**（incentive feasible），其充要条件是它在条件（10.3）和（10.6）的意义上既是激励相容的，又是个人理性的。对于一个贝叶斯集体选择问题，其中不存在参与约束，那我们就同义地使用“激励可行性”和“激励相容性”，故一个机制对贝叶斯集体选择问题是**激励可行的**，当且仅当它满足条件（10.3）。

10.2　有效性的概念

帕累托有效性的概念是合作博弈理论的中心。为了在不确定性下探讨合作理论，第一步必须把帕累托有效性的定义拓广到具有不完全信息的博弈。

一个博弈理论家或一位调解人在分析不完全信息博弈中行为的帕累托有效性时，必须用局外人的观点，故他不能把其分析建立在局中人私有信息的基础之上。一个局外人或许能说出结果将如何取决于局中人的类型，但在不知局中人的实际类型时，他一般不可能预测实际的结果。即局外人可知道机制，但不知道结果。因此，霍姆斯特龙和迈尔森（1983）主张，不完全信息博弈的有效性概念应该适用于机制而非结果，而且决定一个特定的机制 μ 是否有效，应该只取决于博弈的共同知识结构，而不取决于私人拥有的个人类型信息。

因此，在贝叶斯集体选择问题或贝叶斯讨价还价问题中，对帕累托有效性 486
的定义必须看起来如下：

> 一个机制是有效的，其充要条件是找不到其他可行的机制能使某些人的情况更好，且当然不会使另外某些局中人的情况变坏。

不过，这个定义在几个方面都有些含糊不清。特别是，在决定一个人的情况是“更好”还是“变坏”时，我们必须明确所考虑的是什么样的信息。

一种可能性是说，一个人的情况变坏，是指这个变化减少了他在其类型或任何其他人类型被确定之前所计算的期望效用支付。这一标准被称为**事前福利准则**（ex ante welfare criterion）。因此，我们说一个机制 ν **事前帕累托优胜**（ex ante Pareto superior）于另一个机制 μ 的充要条件是

$$\sum_{t\in T}\sum_{c\in C} p(t)\nu(c\mid t)u_i(c,t) \geqslant \sum_{t\in T}\sum_{c\in C} p(t)\mu(c\mid t)u_i(c,t), \forall i \in N$$

且此不等式至少对 N 中的一个局中人是严格不等的。值得指出的是

$$\sum_{t\in T}\sum_{c\in C} p(t)\mu(c\mid t)u_i(c,t) = \sum_{t_i\in T_i} \bar{p}_i(t_i)U_i(\mu\mid t_i)$$

另一种可能性是说，一个人的情况变坏是指，给定其类型（但不能给出任何其他人的类型）下，这个变化减少了其条件期望效用。如果这个条件期望效用对局中人 i 的任一可能类型都不会（被这个变化）减少，则一个不知道任何局中人类型的局外观察员在这个意义上会说局中人 i 的情况“当然没有（由于机制的改变）变得更坏”。这个标准被称为**事中福利准则**（interim welfare

criterion)，因为它是一个局中人在得知他自己的类型之后，但又在知道任何其他局中人的类型之前评价此局中人的福利。因此，我们说一个机制 ν **事中帕累托优胜**（interim Pareto superior）于另一个机制 μ 的充要条件是

$$U_i(\nu \mid t_i) \geqslant U_i(\mu \mid t_i), \quad \forall i \in N, \ \forall t_i \in T_i$$

且此不等式至少对 N 中一个局中人的某个类型取严格不等号。

还有一种可能性是说，一个人的情况变坏是指，给定所有人的类型，这个变化减少了其条件期望效用。若一个局中人的条件期望效用对所有局中人类型的任何可能组合都不会被减少，在这个意义上，一个局外观察员则会说这个局
487 中人“情况当然没有变坏”。由于这个标准利用了所有个人都已显露其类型之后所可用的信息，故称之为**事后福利准则**（ex post welfare criterion）。因此，我们说一个机制 ν 是**事后帕累托优胜**（ex post Pareto superior）于另一个机制 μ 的充要条件是

$$\sum_{c \in C} \nu(c \mid t) u_i(c,t) \geqslant \sum_{c \in C} \mu(c \mid t) u_i(c,t), \quad \forall i \in N, \forall t \in T$$

且此不等式对 N 中至少一个局中人和 T 中至少一个满足 $p(t) > 0$ 的可能类型组合 t 严格成。

上述对有效性文字定义的另一个含糊不清的方面在于术语“可行性”。这个术语的一种可被称为**经典可行性**（classical feasibicity）的意义是，考虑任一从 T 到 $\Delta(C)$ 的函数——对局中人类型的每个可能组合选择一个随机联合策略是可行的。然而，显示原理意味着，除非一个机制是激励相容的（及与此有关的个人理性的），否则这个机制不能通过任何通信系统所诱导的一个通信博弈的某个均衡来实现。因此，通过定义“可行的”机制为激励可行的机制（即贝叶斯集体选择问题的激励相容机制，或贝叶斯讨价还价问题的激励相容而又个人理性的机制）来认识激励约束的不可避免性较为妥当。

给定任何一个可行性概念，3 种福利准则（事前、事中及事后）导致了有效性的 3 种不同概念。对于任一机制集 F（被理解为在某种意义上“可行的”机制所组成的集），我们说一个机制 μ 在集 F 中是**事前有效的**（ex ante efficient），当且仅当 μ 在 F 中，且 F 中不存在其他的机制 ν 能事前帕累托优胜于 μ。类似地，μ 在 F 中是**事中有效的**（interim efficient），当且仅当 μ 在 F 中，且 F 中不存在其他的机制 ν 能事中帕累托优胜于 μ；μ 在 F 中是**事后有效的**（ex post efficient），当且仅当 μ 在 F 中，且 F 中不存在其他的机制 ν 能事后帕累托优胜于 μ。

如果 ν 事中帕累托优胜于 μ，那 ν 也事前帕累托优胜于 μ。类似地，如果 ν 事后帕累托优胜于 μ，那 ν 也事中帕累托优胜于 μ。因此，对于任一给定的集
488 F，F 中事前有效机制集是 F 中事中有效机制集的一个子集，而 F 中事中有效机制集同样也是 F 中事后有效机制集的一个子集。

有效性这3种不同概念之间的差别可以通过对人们可能会考虑的一类社会福利函数所施加的限制来表示。假设 C 和 T 都是有限集，又假设 F 是由有限个线性约束所定义的一个机制集（故 F 在几何上是有限维向量空间中的一个凸多面体）。那么（根据支撑超平面定理），一个机制在 F 中是事后有效的，当且仅当它是形如

$$\underset{\mu\in F}{\text{maximize}}\sum_{t\in T}p(t)\sum_{c\in C}\mu(c\mid t)\sum_{i\in N}\lambda_i(t)u_i(c,t) \tag{10.9}$$

的最优化问题的一个最优解，其中**效用权重**（utility weight）$\lambda_i(t)$ 对每个局中人 i 和每个类型组合 t 都是正数。如果我们要求每个局中人的效用权重都只依赖于该局中人自己的类型，那我们就得到事中有效的机制。即 F 中的一个事中有效的机制是形如

$$\underset{\mu\in F}{\text{maximize}}\sum_{t\in T}p(t)\sum_{c\in C}\mu(c\mid t)\sum_{i\in N}\lambda_i(t_i)u_i(c,t) \tag{10.10}$$

的最优化问题的最优解，其中 $\lambda_i(t_i)$ 对每个局中人 i 和每个类型 t_i 都是正数。最后，如果我们要求每个局中人的效用权重与其类型无关，那我们就得到一个事前有效的机制。即 F 中一个事前有效的机制是形如

$$\underset{\mu\in F}{\text{maximize}}\sum_{t\in T}p(t)\sum_{c\in C}\mu(c\mid t)\sum_{i\in N}\lambda_i u_i(c,t) \tag{10.11}$$

的最大优化问题的最优解，其中 λ_i 对每个局中人 i 都是正数。

当我们说一个博弈中存在不完全信息时，我们的意思是指，每个局中人在计划和策略被首次选择的博弈之始时，都知道他自己的类型，但不知道其他任何人的类型。因此，给定每个局中人自己的真实类型，每个局中人在这个初始做决策的阶段实际上只关心他自己的条件期望支付。霍姆斯特龙和迈尔森(1983) 曾经主张，为对局中人的这种关注给予适当考虑，同样也考虑到显示原理所暗含的约束，不完全信息贝叶斯博弈最合适的有效性概念是激励可行机制中的事中有效性。由于这个概念的重要性，已给它另起一个较简短的名称为 489
激励有效性。即一个激励有效的机制是一个激励可行的机制 μ，使得没有另外一个激励可行的机制会事中帕累托优胜于 μ。如果一个机制在这种意义上是激励有效的，那么，一个不知道任何局中人实际类型的调解人不可能提出任何一个其他的激励相容机制以使每个局中人都肯定更喜欢。

事后福利准则评价了通过某个知道所有局中人类型的人分配给局中人的期望支付。如果一个调解人知道了每个人的类型，那他就不必去关心信息激励的约束，故事后福利准则在逻辑上看起来与经典可行性概念似有联系。因此，当我们说一个机制是**事后有效的**，而没有提及某一特定的可行集时，那我们指的是，这个机制在从 T 到 $\Delta(C)$ 的所有函数组成的集中是事后有效的。

10.3 一个例子

为了说明这些思想，考虑在6.4节曾讨论过的那个交易问题。在这个我们称为**例10.1**的例子中，局中人1是某个可分商品唯一的卖主，而局中人2是唯一的买主。局中人1拥有一个单位的该商品，而且他知道其质量之优（此时他的类型是“1.a”）劣（此时他的类型是“1.b”）。若是优质商品，则每单位该商品对卖主值40美元，而对买主值50美元。若是劣质品，则每单位该商品对卖主值20美元，而对买主值30美元。买主没有私人信息，故她唯一的类型可被称为“2.0”；但她确知相信此商品质量好的概率为.2。我们假设买主不能证实卖主关于商品质量所做出的任何声明，卖主也不可能提供任何质量意外担保书，并且这两个局中人不会预期将来会有进一步的交易。为了把它表述为一个贝叶斯博弈，我们令 $C=C_1\times C_2=[0.1]\times\mathbf{R}_+$，其中 $C_1=[0,1]$ 表示局中人1能向局中人2交割的可能商品量所组成的集，而 $C_2=\mathbf{R}_+$ 表示局中人2能付给局中人1的可能货币量所组成的集。如同在6.4节一样，对每个局中人的支付被定义为他从交易中所获得的净美元收益。这个贝叶斯讨价还价问题
490 中的不一致同意结果是 $d^*=(0,0)$，其中局中人2没得到任何商品也无须支付。即每个局中人都可通过拒绝交易而保证自己得到支付0。

由于效用函数的线性性和 C 的凸性，我们可以把我们的注意力限于确定性的交易机制，即从 T 到 C 的函数，而不是从 T 到 $\Delta(C)$ 的函数。因而，正如6.4节那样，我们可用二元组 $\{Q(\cdot),Y(\cdot)\}$ 表示一个机制，这里对于 T_1 中的每个 t_1，若局中人1所报告的类型是 t_1，则在这个机制下 $Q(t_1)$ 是局中人1交付给局中人2的商品量，而 $Y(t_1)$ 是局中人2付给局中人1的货币量。用这些记号来表示，则对每个局中人每个类型的期望效用是

$$U_1(Q,Y|1.a)=Y(1.a)-40Q(1.a)$$
$$U_1(Q,Y|1.b)=Y(1.b)-20Q(1.b)$$
$$U_2(Q,Y|2.0)=.2\{50Q(1.a)-Y(1.a)\}+.8\{30Q(1.b)-Y(1.b)\}$$

在这个贝叶斯讨价还价问题中，因为局中人1能对其类型说谎，且任一局中人都能拒绝交易，故当且仅当一个机制是激励相容而又个人理性时，它才是激励可行的。信息激励约束是

$$U_1(Q,Y|1.a)\geq U_1^*(Q,Y,1.b|1.a)=Y(1.b)-40Q(1.b) \qquad (10.12)$$
$$U_1(Q,Y|1.b)\geq U_1^*(Q,Y,1.a|1.b)=Y(1.a)-20Q(1.a) \qquad (10.13)$$

而个人理性(或参与)约束是

$$U_1(Q,Y|1.a)\geqslant 0, U_1(Q,Y|1.b\geqslant 0, U_2(Q,Y|2.0)\geqslant 0 \quad (10.14)$$

我们在6.4节证明过，若（Q，Y）是此博弈的任一激励相容的机制，则有

$$.3U_1(Q,Y|1.a)+.7U_1(Q,Y|1.b)+U_2(Q,Y|2.0)\leqslant 8 \quad (10.15)$$

于是，若任一机制满足了

$$.3U_1(Q,Y|1.a)+.7U_1(Q,Y|1.b)+U_2(Q,Y|2.0)=8 \quad (10.16)$$

则它一定是激励有效的。

例如，考虑如下两个机制，我们称之为(Q^1,Y^1)和(Q^2,Y^2)：

$$Q^1(1.a)=.2,\quad Y^1(1.a)=9,\quad Q^1(1.b)=1,\quad Y^1(1.b)=25 \qquad 491$$
$$Q^2(1.a)=.25,\quad Y^2(1.a)=10.20,\quad Q^2(1.b)=1,\quad Y^2(1.b)=25.20$$

在机制(Q^1,Y^1)中，若商品质量好，则局中人1以每单位$9/.2=45$美元的价格卖.2单位该商品给局中人2；而若商品质量低劣，则他以每单位25美元的价格卖1个单位的该商品给局中人2。但在机制(Q^2,Y^2)中，若商品质量好，则局中人1以每单位$10.20/.25=40.80$美元的价格卖.25单位该商品给局中人2；而若商品质量低劣，则他以每单位25.20美元的价格卖1个单位的该商品给局中人2. 在6.4节已经指出，机制(Q^1,Y^1)是激励相容的。为了看出机制(Q^2,Y^2)也是激励相容的，须注意到，当质量低劣时，若卖主是诚实的，其利润为$25.20-20=5.20$美元；而若他撒谎则得到期望利润$.25(40.80-20)=5.20$美元。因而他没有对其商品质量说谎的动机。

这两个机制的类型意外期望支付是

$$U_1(Q^1,Y^1|1.a)=.2\times(45-40)=1$$
$$U_1(Q^1,Y^1|1.b)=25-20=5$$
$$U_2(Q^1,Y^1|2.0)=.2\times\{.2\times(50-45)\}+.8\times(30-25)=4.2$$
$$U_1(Q^2,Y^2|1.a)=.25\times(40.8-40)=0.2$$
$$U_1(Q^2,Y^2|1.b)=25.2-20=5.2$$
$$U_2(Q^2,Y^2|2.0)=.2\times\{.25\times(50-40.8)\}+.8\times(30-25.2)=4.3$$

局中人1的事前期望支付在（Q^1，Y^1）与（Q^2，Y^2）中相同，这是因为

$$.2\times 1+.8\times 5=4.2=.2\times 0.2+.8\times 5.2$$

因此，由于$U_2(Q^2,Y^2|2.0)>U_2(Q^1,Y^1|2.0)$，所以（$Q^2$，$Y^2$）是事前帕累托优胜于$(Q^1,Y^1)$的。然而，由于$U_1(Q^2,Y^2|1.a)<U_1(Q^1,Y^1|1.a)$，所以这两个机制中没有一个能事中帕累托优胜于另一个。事实上，(Q^1,Y^1)和(Q^2,Y^2)同时满足（10.16），故二者同为激励有效的。

为了理解事中福利准则为何如此重要，假设这两个局中人都预期执行机制(Q^1,Y^1)，除非他们两人一致同意改变到另外某个机制。现在转而设想某个调 492

解人向他们提供帮助去执行事前帕累托优胜的机制(Q^2, Y^2)。他们两人应该都同意做这个改变吗？显然，若局中人1的类型是1.a，则他是不会同意这一改变的。所以，为了使问题更有趣味，假设局中人2和调解人并不知道局中人1的类型实际上是1.b。于是，实际上两个局中人都应偏好(Q^2, Y^2)胜于(Q^1, Y^1)，因为

$$U_1(Q^2, Y^2|1.b) > U_1(Q^1, Y^1|1.b) \quad 且$$
$$U_2(Q^2, Y^2|2.0) > U_2(Q^1, Y^1|2.0)$$

然而，这个私人知道的偏好协议并不能转化成从(Q^1, Y^1)改变到(Q^2, Y^2)的实际协议。局中人2应该认识到，仅当局中人1的类型是1.b时，他才会同意从(Q^1, Y^1)改变到(Q^2, Y^2)。当局中人1的类型是1.b时，局中人2将在(Q^1, Y^1)中得到支付$30-25=5$，这好于她在(Q^2, Y^2)中所能得到的支付$30-25.20=4.8$。因此，局中人2应该认识到，只有在从(Q^1, Y^1)到(Q^2, Y^2)的改变对局中人2不利时，局中人1才会同意这个改变(这个效应是投标和讨价还价中**赢者诅咒**的一个例子)。于是局中人2应该拒绝从(Q^1, Y^1)到(Q^2, Y^2)的改变，尽管在给定她目前的信息下，(Q^2, Y^2)对她来说是事前帕累托优胜的，而且看上去要严格好于(Q^1, Y^1)。

如果局中人2相信局中人1在得知其类型之前同意从(Q^1, Y^1)到(Q^2, Y^2)的改变（在事前阶段）的话，则这个改变的协议有可能实现。但是，如果这个博弈只进行一次，且局中人2知道局中人1在他对机制讨价还价之前知道他的类型，那么对任何需要局中人1赞成才能生效的从(Q^1, Y^1)改变到(Q^2, Y^2)的提议，局中人2都应该拒绝，因为她应该认识到局中人1在其个人决策中不会应用事前福利准则。

如果局中人预期执行激励有效的机制(Q^2, Y^2)，则可给出一个类似的反对改变的论证，除非他们一致同意其他某个激励相容机制。这时，因为局中人2应该认识到局中人1只有在其类型为1.a时才会接受改变到(Q^1, Y^1)的提议，但此时(Q^2, Y^2)对局中人2来讲好于(Q^1, Y^1)，故她应该反对任何改变到(Q^1, Y^1)的提议。

可以证明，如果一个机制(Q, Y)在这个贝叶斯讨价还价问题的所有激励可行机制组成的集中是事前有效的，那么，当商品质量好时，局中人1的期望
493 支付［即$U_1(Q, Y|1.a)$］一定等于0。为看出其原因，回顾条件（10.15），它蕴含着(Q, Y)必须满足

$$.3U_1(Q, Y|1.a) + .7U_1(Q, Y|1.b) \leqslant 8 - U_2(Q, Y|2.0)$$

局中人1的事前期望支付是

$$.2U_1(Q, Y|1.a) + .8U_1(Q, Y|1.b)$$

且在不改变$U_2(Q, Y|2.0)$或不违反上述不等式下，通过把$U_1(Q, Y|1.a)$降

至0并把$U_1(Q,Y|1.b)$提高$U_1(Q,Y|1.a)$所降之大小的3/7倍，就能增大这个支付值。

事实上，在出所有激励可行机制所组成的集中，一个机制是事前有效的，其充要条件是它具有如下形式：

$$Q(1.a)=z/20-1,\qquad Y(1.a)=40(z/20-1)$$
$$Q(1.b)=1,\qquad Y(1.b)=z$$

其中$20\leqslant z\leqslant 31\frac{3}{7}$。不过，在所有这些机制中，拥有优质商品的卖主（类型1.a）只能以每单位商品40美元的价格卖出商品，故他得不到正的利润。如果事实上他知道其商品质量好的话，那很难看出他为什么要参加这样一个机制。如果他转而以严格高于40美元的价格卖出一些商品，那他不会有什么损失，而这至少给他某种获取正利润的机会。

对于本例，不存在事后有效的激励可行机制（在所有机制组成的集中）。为满足事后有效性，局中人1必须把其整个货源全卖给局中人2而不管自己的类型是什么，因为此商品对2的价值总是比对1高。但是，对于激励相容性来说，期望价格就不能依赖于局中人1的类型。类型1.b的个人理性于是将要求价格至少是40美元；但这样一个价格会要求局中人2违反其个人理性公理，因为她预期付出多于$34=0.2\times 50+0.8\times 30$（美元）而将带来损失。

10.4　事后无效性和后续报价

上述例子中事后有效性的不可能性意味着，不论实施怎样的机制，总存在一个正的概率使局中人1将持有一定量的商品而结束博弈，尽管它对局中人2更有价值。如果我们假设局中人总能给出买或卖更多商品的另一个报价，那这一结论可能会多少受到一点干扰。例如，假设局中人执行机制(Q^1,Y^1)，而局中人1卖出了.2个单位商品得到$45\times .2=9$美元。在这个结果之后，由贝叶斯法则，局中人2应该以概率1相信局中人1的类型是1.a。因而，如果局中人1继(Q^1,Y^1)这个结果之后用一个后续报价卖出剩下.8个单位的商品得到$45\times .8=36$（美元），则看上去局中人2似乎应该乐于接受，因为她确信商品的质量是好的。 494

当然，如果局中人1在机制开始时相信这样一个后续报价会被接受，那即使他的类型是1.b，他也要假装自己在机制中的类型是1.a，这是因为以45美元卖出一单位商品（卖出后面.8个单位时略有耽搁）肯定比以25美元卖出一个单位商品好！为防止这种行为，当局中人1向调解人报告自己的类型以实施机制(Q^1,Y^1)时，局中人1必须相信没有这种附加的报价会被接受，这很

有必要。不过，局中人2在这个机制之后的实际行为无法改变局中人1在机制开始时的信念，因此，在局中人2考虑接受后续报价时，她不应该去担心破坏了先前机制的激励相容性。

为了理解后续报价的机会能如何影响对本例的分析，我们需要考虑一个随时间变化的显示交易模型，包括对等待成本的一个规定。具体而言，假设存在无限多个时点或回合，记为1，2，…，局中人可以在每个时点进行交易。还假设回合 k 的利润 x 在回合1的价值为 $x\delta^{k-1}$，其中 δ 是一个满足 $0<\delta<1$ 的**贴现因子**。给定一个**序贯报价**（sequential-offer）讨价还价博弈的任一均衡，令 $\bar{q}_k(t_1)$ 为在局中人1的类型为 t_1 时在回合 k 将交易的期望商品量，且令 $\bar{y}_k(t_1)$ 为局中人2在回合 k 且局中人1的类型为 t_1 时给予局中人1的期望支付。然后令

$$Q(t_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{q}_k(t_1)\delta^{k-1},\quad Y(t_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{y}_k(t_1)\delta^{k-1}$$

可以证明，根据这个解释，局中人在这个多回合博弈中的期望支付，恰如10.3节中讨论的原单回合博弈那样依赖于 Q 和 Y。例如，如果局中人1的类
495 型是1.b，且使用其在这个类型下正确的均衡策略，那他在均衡中的期望贴现支付是

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\bar{y}_k(1.b)-20\bar{q}_k(1.b)]\delta^{k-1}=Y(1.b)-20Q(1.b)$$

但当他的类型实际上是1.b时，若他遵循类型1.a的均衡策略，则他的期望贴现支付将是

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\bar{y}_k(1.a)-20\bar{q}_k(1.a)]\delta^{k-1}=Y(1.a)-20Q(1.a)$$

因而序贯报价讨价还价博弈的一个均衡必须满足

$$Y(1.b)-20Q(1.b)\geqslant Y(1.a)\quad 20Q(1.a)$$

同样地，其他的信息激励约束和个人理性约束也与我们在此博弈原单回合型中所得到的相同。于是，如果我们把等待成本连同没有成交的成本一并考虑在内，那么对于贴现序贯报价博弈的任一均衡，一定存在原单回合博弈的一个激励可行机制 (Q,Y)，它对每个局中人的每个类型给出相同的期望支付。

这一结论留给我们一个问题，假定局中人1和2有不可剥夺的权利一直报价以交易局中人1仍拥有的任何商品量，那这个假定实际上会不会减小了激励可行机制集呢？事实上，局中人保持讨价还价的权利可能会带来限制激励相容机制集的道德风险问题，因为需要对每个局中人决不交易多于机制中所确定的数量给予一定的激励。不过，有一些序贯报价讨价还价博弈的合理模型，其中这些道德风险约束不会显著地减小可行机制集；故任一满足（10.12）～

(10.14) 式的机制(Q,Y)，事实上可能被一个具有调解通信、无限时间水平和贴现的序贯报价讨价还价博弈的一个均衡来实行（参见奥苏贝尔和德内克雷，1989）。

正如我们在8.9节中所做的那样，导出这样一个一般可行性结果的一个方法是，假定报价必须在某个（很大的）有限集上做出，并且贴现因子接近于1。例如，假设报出的价格必须是0.01美元的整数倍，且贴现因子$\delta>.999$。（这个贴现因子可能看上去相当大，但要记住，一个“回合”被假设为表示一 496
个局中人在最近一个报价被拒绝后构想和提出一个新的报价所需时间长度。对应于等待如此短的时间区间代价并不会太高这一事实，才使用很大的贴现因子。）那么，在调解人已经执行机制(Q,Y)并且由这个机制所规定的所有交易都已在回合1完成之后，如果局中人在以后各回合的讨价还价中都遵循**冷淡均衡**的话，则未来回合的交易便可被防止。在这个冷淡均衡中，局中人1总是以每单位50美元的价格出售其余下的供应商品，而局中人2总是以每单位20美元的价格报价买下余下的供应商品。如果局中人2因在某个回合的报价高于20美元而偏离了这个僵持行为，那局中人1会预期局中人2将在下一回合顺从地接受50美元的报价，因而1将拒绝2的报价［因为即使$49.99-40$也小于$(50-40)\delta$］。如果局中人1因其报价小于50美元而偏离了这个僵持行为，那局中人2将从这个意外事件推断出局中人1的类型是1.b（即使在偏离之前她对类型1.b赋予零概率，这样一个推断也是贝叶斯一致的，因为这个偏离是零概率事件），并且她会预期局中人1将在下一回合顺从地接受20美元的报价；故2也将拒绝1的报价。

借助于双方的不完全信息，这种冷淡均衡甚至在美分可任意分割且局中人具有不可剥夺的轮流报价机会时，仍可被维持。例如，假设我们用下述假定稍微扰动一下例10.1：局中人2可能是类型“2.1”有着非常小的正概率，此时，商品对她的价值将是每单位100美元。设想调解人在回合1执行一个激励可行机制，其中若局中人1的类型为1.a且局中人2的类型为2.0，则局中人1只余下供应商品的一部分。在机制实施后而局中人1在回合2仍拥有部分供应商品的事件中，存在一个冷淡均衡，其中局中人1总是以每单位70美元的价格报价出售余下供给，而局中人2总是以25美元的价格报价购买余下供给，且无人接受（因为$70>50$和$25<40$）。如果局中人1曾报价低于70美元，则局中人2将从这个零概率事件推断出，局中人1实际上是类型1.b，并且此后就像8.7节对完全信息讨价还价博弈所描述的轮流报价博弈均衡中那样行为，其中商品对1的价值是每单位20美元而对2为每单位30美元。在这个均衡 497
中，局中人2总是以接近于25美元的价格报价并期待1的接受。另一方面，如果局中人2曾出价高于25美元，则局中人1从这个零概率事件会推断出局中人2实际类型是2.1，并且此后就像在完全信息讨价还价博弈的均衡中那样行为，其中商品对1的价值是每单位40美元，而对2的价值是每单位100美

元；在这个均衡中，局中人 1 总是以接近于 70 美元的价格报价并期待局中人 2 的接受。因此，当他们的类型实际上是 1.a 和 2.0 时，任何一个局中人都不能从偏离 70 美元和 25 美元的僵持报价中得到增益，并且在回合 1 的调解之后，就决不会发生交易。

10.5 计算激励有效的机制

现在考虑一个贝叶斯集体选择问题或一个贝叶斯讨价还价问题（如 10.1 节中那样），其中类型集和结果集都有限。在有限性假设之下，激励相容机制集是一个凸多面体。因而，由支撑超平面定理，一个激励可行的机制 $\bar{\mu}$ 激励有效的充要条件是，对于每个局中人 i 的每个类型 t_i，都存在某个正数 $\lambda_i(t_i)$ 使得 $\bar{\mu}$ 是最优化问题

$$\underset{\mu: T \to \Delta(C)}{\text{maximize}} \sum_{i \in N} \sum_{t_i \in T_i} \lambda_i(t_i) U_i(\mu \mid t_i)$$

约束为 $U_i(\mu \mid t_i) \geqslant U_i^*(\mu, s_i \mid t_i)$，$\forall i \in N, \forall t_i \in T_i, \forall s_i \in T_i$

的一个最优解。当 F 是激励相容机制集时，这个最优化问题等价于问题 (10.10)。而且，由于目标函数和约束条件都线性于 μ，且隐含于 μ 是从 T 到 $\Delta(C)$ 的一个函数这一限制中的概率约束

$$\sum_{c \in C} \mu(c \mid t) = 1 \quad \text{和} \quad \mu(d \mid t) \geqslant 0, \ \forall d \in C, \forall t \in T$$

也线性于 μ，故此最优化问题是一个线性规划问题。

对于这样的最优化问题，可通过对每个约束函数乘上一个被称为**拉格朗日乘子**（Lagrange multiplier）的变量并将它们加到目标函数上，从而构成一个**拉格朗日函数**（Lagrangean function）。（实质上相同的构造曾用于 3.8 节对一个对偶问题的一般定义之中。）令 $\alpha_i(s_i \mid t_i)$ 表示当局中人 i 的实际类型是 t_i 时不
498 应该由报告类型 s_i 而预期得到增益这一约束的拉格朗日乘子，则拉格朗日函数可被写成

$$\sum_{i \in N} \sum_{t_i \in T_i} \lambda_i(t_i) U_i(\mu \mid t_i) + \sum_{i \in N} \sum_{t_i \in T_i} \sum_{s_i \in T_i} \alpha_i(s_i \mid t_i)\left(U_i(\mu \mid t_i) - U_i^*(\mu, s_i \mid t_i)\right)$$ *

为简化这一表达式，令

---

* 原文第二项 $\sum_{i \in N} \sum_{t_i \in T_i}$ 应为 $\sum_{i \in N} \sum_{t_i \in T_i} \sum_{s_i \in T_i}$ ——译者注。

$$v_i(c,t,\lambda,\alpha)=\Big(\big(\lambda_i(t_i)+\sum_{s_i\in T_i}\alpha_i(s_i\mid t_i)\big)u_i(c,t)-\sum_{s_i\in T_i}\alpha_i\Big(\big(t_i\mid s_i\big)u_i(c,(t_{-i},s_i))\Big)\Big)/\bar{p}_i(t_i) \tag{10.17}$$

这个量$v_i(c,t,\lambda,\alpha)$被称为类型组合为t时局中人i相对于效用权重λ和拉格朗日乘子α从结果c所得到的**虚效用**（virtual utility）。于是，上述拉格朗日函数就等于

$$\sum_{t\in T}p(t)\sum_{c\in C}\mu(c\mid t)\sum_{i\in N}v_i(c,t,\lambda,\alpha)$$

最优化理论中的标准结论（利用线性规划的对偶定理）则蕴含了下述定理。

定理10.1　设μ是一个激励可行机制，则μ是激励有效的充要条件是，存在向量

$$\lambda=(\lambda_i(t_i))_{i\in N,t_i\in T_i}\quad 和\quad \alpha=(\alpha_i(s_i\mid t_i))_{i\in N,s_i\in T_i,t_i\in T_i}$$

使得

$$\lambda_i(t_i)>0,\quad \forall i\in N,\ \forall t_i\in T_i$$
$$\alpha_i(s_i\mid t_i)\geq 0,\quad \forall i\in N,\ \forall s_i\in T_i,\ \forall t_i\in T_i$$
$$\alpha_i(s_i\mid t_i)\{U_i(\mu\mid t_i)-U_i^*(\mu,s_i\mid t_i)\}=0,\quad \forall i\in N,\ \forall s_i\in T_i,\ \forall t_i\in T_i$$

及

$$\sum_{c\in C}\mu(c\mid t)\sum_{i\in N}v_i(c,t,\lambda,\alpha)=\max_{c\in C}\sum_{i\in N}v_i(c,t,\lambda,\alpha),\forall t\in T$$

为了解释这些条件，我们需要给出一些术语。如果λ和α对μ满足定理10.1中的条件，且$\alpha_i(s_i\mid t_i)>0$，我们就说类型t_i**危及**（jeopardizes）类型s_i。定理10.1中的条件

$$\alpha_i(s_i\mid t_i)\{U_i(\mu\mid t_i)-U_i^*(\mu,s_i\mid t_i)\}=0 \tag{499}$$

表明，仅当局中人i在其实际类型为t_i时不应该试图假装成类型s_i的约束是机制μ中一个起作用的约束时，t_i才能在机制μ中危及s_i。

方程（10.17）把局中人i的任一类型t_i的虚效用定义为其实际效用的某个正倍数减去危及类型t_i的那些类型的效用函数的一个加权和。因此，t_i的虚效用在性质上不同于t_i实际效用之处在于它扩大了与危及t_i的类型的差异。

定理10.1中的条件

$$\sum_{c\in C}\mu(c\mid t)\sum_{i\in N}v_i(c,t,\lambda,\alpha)=\max_{c\in C}\sum_{i\in N}v_i(c,t,\lambda,\alpha)$$

表明，激励有效的机制μ一定只对这样的结果赋予正概率，即这个结果对于局中人信息状态的每个组合都使局中人的虚效用之和达到最大。也就是说，如果

局中人在相对于 λ 和 α 的虚效用尺度下得到可转让支付，那机制 μ 将是事后有效的。

考虑取自 10.3 节的例子。根据条件（10.15），我们可以尝试参数

$$\lambda_1(1.a)=0.3,\quad \lambda_1(1.b)=0.7,\quad \lambda_2(2.0)=1$$
$$\alpha_1(1.a|1.b)=0.1,\quad \alpha_1(1.b|1.a)=0$$

如在 6.4 节中那样，令 q 表示卖主交割给买主的商品量，而令 y 表示买主付给卖主的货币量。实际的效用函数是

$$u_1((q,y),1.a)=y-40q \tag{10.18}$$
$$u_2((q,y),1.a)=50q-y \tag{10.19}$$
$$u_1((q,y),1.b)=y-20q \tag{10.20}$$
$$u_2((q,y),1.b)=30q-y \tag{10.21}$$

（我们去除了对局中人 2 固定类型 2.0 的依赖性。）于是，局中人 1 的虚效用支付是

$$v_1((q,y),1.a,\lambda,\alpha)=\frac{0.3(y-40q)-0.1(y-20q)}{.2}=y-50q$$
500
$$v_1((q,y),1.b,\lambda,\alpha)=\frac{(0.7+0.1)(y-20q)}{.8}=y-20q$$
$$v_2((q,y),t_1,\lambda,\alpha)=u_2((q,y),t_1,\lambda,\alpha),\ \forall t_i\in T_i$$

因而，虚效用与实际效用之间相对于这些参数唯一的不同之处在于，对每单位商品，卖主的虚评价为 50 美元而不是实际评价 40 美元。即由于质量坏的类型 1.b 危及了质量好的类型 1.a，所以好质量类型以一种扩大其与坏质量类型对该商品的实际评价之间（20 美元）的差距这种方式，使其虚评价（50 美元）不同于其实际评价（40 美元）。

由定理 10.1，如果 μ 总是最大化局中人的虚效用之和，并且每当一个类型在 α 中危及另一类型时就有一个起作用的激励约束，那 μ 就是激励有效的。当 1 的类型是 1.a 时，虚效用之和为

$$v_1((q,y),1.a,\lambda,\alpha)+v_2((q,y),1.a,\lambda,\alpha)=(y-50q)+(50q-y)=0$$

故任何一个结果都会最大化这个和，当 1 的类型是 1.b 时，虚效用之和为

$$v_1((q,y),1.b,\lambda,\alpha)+v_2((q,y),1.b,\lambda,\alpha)=(y-20q)+(30q-y)=10q$$

故虚拟事后有效性要求所卖出的数量应该是最大可能量，即 $q=1$。由于 $\alpha_1(1.a|1.b)>0$ 但 $\alpha_1(1.b\ 1.a)=0$，所以我们所要求唯一起作用的激励约束是

$$U_1(Q,Y|1.b)=U_1^*(Q,Y,1.a|1.b)$$

因此，本例的一个激励可行机制欲成为激励有效的，它就必须满足如下两个性质：当卖主的类型是 1.b（坏质量供应者）时，卖方将把其所有供给都交割给

买方；并且类型为 1.b 的卖者将在如实报告其类型与谎报类型为 1.a 之间无差异。

注意，10.3 节中的机制(Q^1, Y^1)和(Q^2, Y^2)都满足这两个性质。事实上，由于同样的 λ 和 α 对于这个简单例子的所有激励有效的机制都满足定理 10.1，所以可以证明，所有激励有效的机制都满足这两个性质。

一般地，在人们难以相互信任对方关于不可证实的私人信息所做声明的任 501
一局势中，虚效用公式（10.17）可以对寻找可靠的信号提供深刻见解。例如，考虑一个劳动力市场［如斯彭斯（Spence，1973）所提出的一样］，其中有高能力工人和低能力工人，且每个工人都知道其自己的能力类型，但未来的雇主并不能直接观察到任一给定的工人的能力。我们可以预见到一个工人在与一个雇主的谈判中，其低能力类型会危及其高能力类型；即雇主可能难以防止一个低能力的工人声称自己具有高能力。因此，一个高能力工人的虚效用应该扩大其与一个低能力工人之间的差距。设想存在某种无用的教育过程，它对一个工人的生产技能毫无促进，而且对高能力工人它是轻度不愉快的事，但对低能力的工人则是一个极其痛苦的过程。于是，一个高能力工人可以从这个教育过程得到正的虚效用，因为这个教育过程对一个低能力工人所生成的很大负支付在高能力类型工人的虚效用的线性公式中具有一个负系数。因此，像在斯彭斯的劳动力市场均衡中一样，一个激励有效的机制可能会迫使一个高能力工人去经历这个代价高昂而又不具生产力的教育过程（他只从中获得虚效用），以作为他能以高工资被雇用之前的一个信号。

另一方面，在这样一个劳动力市场中，一个高能力工人企图声称他具有低能力，这看起来不太可能，所以我们能预见到低能力类型不会被危及。因此，一个低能力工人的虚效用将刚好是其真实效用的某个正倍数。于是，一个激励有效的机制在其安置低能力工人时应该是事后有效的（从实际效用还是虚效用的角度来看均是如此）而且不应该让低能力工人去苦度一点这种无生产力的教育经历。

一般地，局中人 i 的类型 t_i 的一个可靠信号是任一可观察到的活动，它对危及 t_i 的其他类型 s_i 比对类型 t_i 自身代价大得多，故而能增加类型 t_i 的虚效用［这里，系数$\lambda_i(t_i)$和$\alpha_i(t_i|s_i)$确定了这种类型间比较的加权效用尺度］。当然，类型 t_i 的一个理想信号应该是对类型 t_i 无成本而对局中人 i 的任一其他类型 s_i 都不可能（即成本为无穷大）的某个活动。不过，如果存在这样一个理想信号，那系数$\alpha_i(t_i|s_i)$将等于 0，而且，“类型 s_i 不应该企图声称为 t_i”这 502
一约束实质上可从信息激励约束表中去掉，因为局中人 i 有一种无成本的方法去证明其类型是 t_i 而非 s_i.

10.6 不可思议性和持久性

在显示原理确定了一个调解人或社会计划者可将其注意力限于激励相容的机制——构成了一个数学上简单的集之后，我们自然可以假设，不完全信息下合作博弈中的智能局中人会在激励相容机制集上进行讨价还价。由不完全信息博弈的定义知，在基本的经济计划和决策做出时，每个局中人已私下知道其类型。因此，具有不完全信息合作博弈的理论应该是一个由拥有私人信息的个人选择机制的理论。

在任何对机制进行讨价还价的过程中，如果局中人全体一致同意从某个机制 μ 改变到另一个机制 ν，那么，在达成这个协议时，他们全都更喜欢从 μ 改变到 ν 一定是局中人的共同知识。在局中人只知道他们自己的类型时，这种对改变的一致性可以成为共同知识的充要条件是，μ 不是激励有效的。下面我们用定理 10.2 规范地表述这一结论（源于霍姆斯特龙和迈尔森，1983）。

为了非平凡地叙述定理 10.2，现在我们必须去掉局中人的类型是独立的随机变量这一假设。让我们转而只假设他们类型的条件信念 $(p_i)_{i\in N}$ 是与 T 上某一共同的先验概率分布相一致，故

$$p_i(t_{-i}|t_i)=\frac{p(t)}{\bar{p}_i(t_i)}, \quad \forall t\in T, \forall i\in N$$

其中我们假设

$$\bar{p}_i(t_i)=\sum_{s_{-i}\in T_{-i}} p(s_{-i},t_i)>0, \quad \forall i\in N, \quad \forall t_i\in T_i$$

对于 T 的任一子集 R，我们可以用 R_i 表示 T_i 中所有能在局中人的类型组合属于 R 时出现的所有类型所组成的集，即

503

$$R_i=\{r_i|r\in R\}$$

我们称 R 为**一个共同知识事件**（common-knowledge event）的充要条件为，R 是 T 的一个非空子集，且对于每个局中人 i，R_i 中的每个 r_i 及 T_{-i} 中的每个 t_{-i}，均有

$$若(t_{-i},r_i)\notin R, \quad 则 \quad p_i(t_{-i}|r_i)=0$$

即只要局中人的类型组合在共同知识事件 R 中，则每个局中人都对 R 之外的所有类型组合赋予零概率［这个条件意味着，对 T 中的任一 t，若至少存在一个局中人 i 有 $t_i\in R_i$ 及一个局中人 j 有 $t_j\notin R_j$，则 $p(t)=p_i(t_{-i}|t_i)\bar{p}_i(t_i)=0$，因此，$p_j(t_{-j}|t_j)=p(t)/p_j(t_j)=0$。］

我们说 ν **在 R 中事中优胜于** μ（interim superior to μ within R），其充要条

件是

$$U_i(\nu|r_i)\geqslant U_i(\mu|r_i),\quad \forall i\in N,\ \forall r_i\in R_i$$

且至少对一个局中人 i 和 R_i 中的一个类型 r_i 使上式严格不等。

定理10.2　一个激励可行机制 μ 激励有效的充要条件是，不存在其他任何一个激励相容机制 ν 能在某个共同知识事件 R 中事中优胜于 μ。

证明　若 μ 不是激励有效的，则另有某个激励相容的机制 ν 在 T 中是事中优胜于 μ 的，而 T 本身便是一个共同知识事件。

相反，假设存在某个激励相容的机制 ν 在一个共同知识事件中事中优胜于 μ。定义机制 η 满足

$$\eta(c|t)=\nu(c|t)\quad 若\quad t\in\bigtimes_{i\in N}R_i$$
$$\eta(c|t)=\mu(c|t)\quad 若\quad t\notin\bigtimes_{i\in N}R_i$$

则由于

$$U_i(\eta|t_i)=U_i(\mu|t_i)\quad 若\quad t_i\notin R_i$$
$$U_i(\eta|r_i)=U_i(\nu|r_i)\geqslant U_i(\mu|r_i)\quad 若\ r_i\in R_i$$

故 η 是（在整个 T 中）事中帕累托优胜于 μ 的。而且易于验证，η 是激励可行的。若 $r_i\in R_i$ 且 $t_i\in R_i$，则有

$$U_i^*(\eta,t_i|r_i)=U_i^*(\nu,t_i|r_i)\leqslant U_i(\nu|r_i)=U_i(\eta|r_i)$$

若 $r_i\in R_i$ 且 $t_i\notin R_i$，则有

504

$$U_i^*(\eta,t_i|r_i)=U_i^*(\mu,t_i|r_i)\leqslant U_i(\mu|r_i)\leqslant U_i(\eta|r_i)$$

若 $s_i\notin R_i$，则有

$$U_i^*(\eta,t_i|s_i)=U_i^*(\mu,t_i|s_i)\leqslant U_i(\mu|s_i)=U_i(\eta|s_i)$$

因为类型 s_i 将会预期其余每个局中人 j 要报告一个不在 R_j 中的类型 R_j。因此，μ 不是激励有效的。 ■

定理 10.2 表明，如果 μ 是激励有效的，那么，在不改变某个局中人关于其他局中人类型的信念的情况下，局中人不可能达成一个全体一致的共同知识协议，以至从 μ 改变到另外某个激励相容的机制。即，虽说改变一个激励有效的机制形成一个全体一致的协议是可能的，但只有在某个局中人向另外某个局中人显示有关其类型的实质信息的通信过程之后才有可能。

当我们考虑一个机制选择博弈时，其中局中人可以对机制进行讨价还价，把我们的注意力仅限于独立于任何人的类型而以概率 1 选择一个激励可行机制的均衡，应该是不失一般性的。这一被称为**不可思议性原理**（inscrutability

principle）的命题，可通过把机制选择过程本身视为原贝叶斯博弈或贝叶斯集体选择问题所诱导的通信博弈并应用显示原理，来辨明其正确性。例如，假设存在一个机制选择博弈的均衡，其中某个机制 ν 可能在局中人类型组合属于某个集 A（这里 $A \subseteq T$）时被选择，否则选择另外某个机制 μ。那么，应该存在这个机制选择博弈的一个等价的均衡，其中局中人总是选择这样一个机制 η，当局中人（向执行 η 的调解人）报告了 A 中的一个类型组合时，它与机制 ν 相一致，而当他们报告了 A 外的一个类型组合时，η 与 μ 相一致；即

$$\eta(\cdot|t) = \nu(\cdot|t) \quad 若 \quad t \in A$$
$$\eta(\cdot|t) = \mu(\cdot|t) \quad 若 \quad t \notin A$$

实质上，局中人在机制选择过程中所能透露的任何信息也都可以在机制已被选
505 择之后向调解人透露，并且调解人能以在机制选择过程 中所使用这种信息的同样方式去利用这些信息。因此，在局中人对机制进行讨价还价时，他们可以同意共享机制执行期间的信息，而不用共享机制选择过程中的任何信息。

然而，定理 10.2 和不可思议性原理并不是说，在机制选择过程中透露信息的可能性是毫不相干的。可能存在某些激励可行的机制，我们能预期它在这样一个过程中是不会被选中的，这只是因为某些局中人有选择性地透露有关他们类型的信息而不让这些机制被选择。例如，考虑下述由霍姆斯特龙和迈尔森（1983）提出的贝叶斯集体选择问题。$N = \{1,2\}$ 中有两个局中人，$T_1 = \{1.a, 1.b\}$，$T_2 = \{2.a, 2.b\}$ 及

$$1/4 = p(1.a, \ 2.a) = p(1.a, \ 2.b) = p(1.b, \ 2.a) = p(1.b, \ 2.b)$$

可能结果或社会选择方案集是 $C = \{x,y,z\}$，且每个局中人对这些方案的效用如表 10－1 依赖于其类型。最大化两个局中人的事前期望支付和激励有效机制是满足下式的机制 μ：

$$\mu(x|1.a, \ 2.a) = 1, \quad \mu(y|1.a, \ 2.b) = 1$$
$$\mu(z|1.b, \ 2.a) = 1, \quad \mu(y|1.b, \ 2.b) = 1$$

即一个实施这个机制的调解人，在所得报告的类型是 $1.a$ 和 $2.a$ 时选择 x；在所得报告的类型是 $1.b$ 和 $2.a$ 时选择 z；在局中人 2 的报告类型是 $2.b$ 时选择 y。（当所得报告的类型是 $1.a$ 和 $2.b$ 时选择 y 在这里起到了防止局中人 2 在其类型为 $2.a$ 时报告 $2.b$ 的作用）。不过，霍姆斯特龙和迈尔森认为，这样的一个机制在局中人 1 已经知道其类型的一个机制选择博弈中是不会被选择的。当局中人 1
506 的类型是 $1.a$ 时，他通过提议总是选择 x 可以做得更好，而局中人 2 也总是接受这个提议。即，由于在局中人 1 的类型为 $1.a$ 时，则 1 在机制选择博弈中便没有向局中人 2 隐瞒自己类型的动机（此时他的利益与局中人 2 的利益并不冲突），所以，我们不应该预期机制选择博弈中，局中人会莫名其妙地同意像上述那样隐

性地对类型 1.*b* 的支付赋予如此之大权重的一个激励有效的机制。

表 10－1　　对所有的社会选择方案，每个局中人每个类型的支付

方案	1.a	1.b	2.a	2.b
x	2	0	2	2
y	1	4	1	1
z	0	9	0	−8

继科斯（Coase，1960）之后，一些经济学家曾提出，我们应该能预期观察到，在任何一个完全信息且讨价还价成本很小的经济局势中都会出现有效配置。按照这个通常被称为**科斯定理**（Coase theorem）的论点，一个无效的资源配置不可能持久存在，因为某个人可以建议另外一个让每个人的状况都更好的配置，而每个人又都会同意这个另外选择的配置。（注意：信息激励约束可以是这篇文献中所讨论的一些“讨价还价成本”的一个来源。）正如我们曾在 8.9 节和 10.4 节所见，由于关于选择哪一个可供选择的配置可能会在一个冷淡均衡中僵持不下，其中每个人都坚持对自己最为有利的一个选择配置，所以在帕累托优胜于个人可讨价还价配置的选择配置存在一个范围时，这个论点未必成立。不过，如果局中人只考虑一个另立配置且这个另立配置相对于现状而言是帕累托优胜的，那么，一致同意从现状改变到这个另立配置应该是必然的，至少在完全信息情况下如此。

在试图把科斯定理推广到具有不完全信息的博弈之前，让我们对完全信息情形，来阐释一下这个结论。假设有 $\mathbf{R}^N$ 的一个给定子集，用以表示 N 中局中人所能得到的可行支付配置组成的集。考虑如下就给定的现状和一个给定的另立配置而进行的投票博弈，其中所给两者都是可行支付配置。在这个投票博弈中，每个局中人都同时投票，或赞成现状，或赞成另立配置。在投票之后，若所有局中人都赞成这个另立配置则执行它；但若有一个或一个以上的局中人赞成现状，则维持现状。即，当且仅当存在一个从现状改变到另立配置的一致同意协议时，这个改变才会被实施。

在这样一个投票博弈中，无论每个局中人的偏好如何，总是存在一个每人都投票赞成现状的均衡，因为每个局中人都预计他的投票不会改变结果。这样 507
一个平凡的均衡可通过对均衡集的几个自然限制或精炼而得以消除。最弱的这种限制是，每个严格偏好这个另立配置胜于现状的局中人（若其余每个人都在投票赞成这个另立配置）都应该投票赞成它；当且仅当这个投票博弈的一个均衡满足这个性质时，我们才说它是**主动的**（active）。于是，一个可行配置 w 是帕累托有效的（在弱意义上），其充要条件是，当 w 作为现状时，对可行集

中的每个另立配置，这个投票博弈都有一个主动均衡，其中至少有一个局中人肯定会对现状 w 投赞成票。

当我们尝试把这个有效性的实证性质推广到不完全信息情形中去时，事情就变得复杂一些。对于不完全信息，现状和另立选择配置一般都是机制，而不再是简单的配置。定义投票博弈，不仅要包括每个局中人的投票决策，还要包括每个局中人在以后实施投票获胜机制时必须向调解人报告其类型的决策，由于投票结果可能会向局中人传送关于彼此类型的信息，所以我们一般不能假定，在实施投票获胜的机制时，如实报告类型必将是均衡行为，尽管在投票前局中人可利用的信息条件下，这个机制是激励相容的（对表 10－1 中的例子，如果前述的 μ 作为现状实施，且在对另立机制肯定选择 x 投票反对之后，则局中人 2 将相信局中人 1 的类型一定是 1.b，因为只有 1.b 才会投票赞成现状。于是，即使局中人 2 类型为 2.a 时，她也想报告 2.b）。所以投票博弈的一个序贯均衡，如果一个局中人投票赞成另立机制且这个机制又在投票中获得一致赞成，则必须包括他对其他局中人类型的信念的一个规定。这些信念必须与投票策略均衡相一致。此外，给定这些信念，局中人的报告策略必须是序贯理性的。（我们在此假定，投票之后，局中人知道这两个机制中哪一个是要执行的，但他们对彼此的投票一无所知。）

霍姆斯特龙和迈尔森（1983）称一个激励相容的机制是**持久的**（durable），其充要条件是，它作为现状时，对每个另立机制，都存在一个此投票博弈的主
508 动的序贯均衡，其中对每个可能的类型组合，至少有一个局中人会投票赞成现状，从而在所有局中人都诚实报告其类型的情况下执行这一现状。霍姆斯特龙和迈尔森已经证明，对任何一个有限的贝叶斯集体选择问题，总存在持久的激励有效机制。而且，当只有一个局中人具有私人信息时，所有激励有效的机制都是持久的。

例如，回顾例 10.1 中的两个激励有效机制 (Q^1, Y^1) 和 (Q^2, Y^2)，其中只有局中人 1 具有私人信息。在 10.3 节曾证明，如果以这两个机制之一作为现状，而另一个作为另立机制，那么局中人 1 会对从现状到另立机制的改变投赞成票的信息应该使局中人 2 预料到其在这个改变中的损失。因此，局中人 2 将总是投票赞成这两个机制中作为现状的那一个。

然而，当两个或两个以上的局中人具有私人信息时，则可能存在非持久的激励有效机制。对于表 10－1 中的例子来说，前面所讨论的机制 μ 是激励有效但非持久的。此外，某些持久的机制可能不是激励有效的。例如，假设有 $N=\{1,2\}$ 中的两个局中人，$T_1=\{1.a,1.b\}$，$T_2=\{2.a,2.b\}$，$C=\{x,y\}$，$1/4=p(1.a,2.a)=p(1.a,2.b)=p(1.b,2.a)=p(1.b,2.b)$，且对每个局中人 i，

$$u_i(x,t)=2\ ,\quad \forall t\in T$$

$$u_i(y,t)=3\quad 若\quad t=(1.a,2.a)\quad 或\quad t=(1.b,2.b)$$

$$u_i(y,t)=0 \quad 若 \quad t=(1.a,2.b) \quad 或 \quad t=(1.b,2.a)$$

令 η 为对所有的 t 都满足 $\eta(x\mid t)=1$ 的机制，那么，η 不是激励有效的但却是持久的。局中人在他们两人的类型相同时选择 y 将使两人都得到增益；但在具有任一另立机制的投票博弈中，总是存在一个主动的序贯均衡，其中局中人全都赞成 η 而与他们的类型无关，并且如果另立机制被批准，那他们将独立地报告（泄露）其真实类型（不存在一个让局中人喜欢程度胜于 η 的固定机制，其中结果不依赖于局中人的类型）。

这种对持久性的讨论表明，由科斯定理所表述的对有效性的实证解释，对不完全信息博弈可能不太适用。不过，持久性的概念因对现状只考虑一个另立机制这一假定而有其局限性，尽管关于这唯一的另立机制是如何设定的并无介绍（参见克劳福德，1985）。而且，上述具有一个持久但非有效的机制的例子 509
还具有唯一的一个激励有效机制，在能有效地谈判的局势中，这个机制既可能是焦点均衡结果，又可能是持久的。一般地，对有效性的实证解释可简单地从激励有效性是机制选择过程中焦点均衡的一个决定因素这一假设导出。即，在对机制进行讨价还价的过程中，每个局中人基于某个特定机制的激励有效性及其对所有局中人的所有类型都是公平（在某种意义上）的，从而不可思议地赞同这个机制可以作为一个焦点均衡。这种公平考虑应该使诸如表 10－1 中例子的非持久机制 μ 失去其资格，因为它给类型 1.a 的支付太少而给类型 1.b 的太多。在下面两节中，我们为提出这样一种公平理论的尝试做一些努力。

10.7　知情委托人的机制选择

为了在不完全信息博弈中研究一种对机制的讨价还价理论，最好是从最简单的情况着手，其中一个被我们称为委托人（principal）的局中人具有全部谈判能力。毕竟，如果我们不能理解一个局中人在他控制全局时应选择哪个机制的话，那我们就不可能有希望去理解这个局中人在他必须与其他人讨价还价并相互妥协的一个机制选择过程中，他应该为怎样的一个机制而谈判（回顾 6.7 节中的讨论）。

让我们考虑例 10.2，它与 10.3 节中的例 10.1 的不同之处仅在于质量好的类型 1.a 的概率改为 .9（而不是 .2）。因而，在这个贝叶斯讨价还价过程中，局中人 2 从机制 (Q,Y) 所得到的期望支付是

$$U_2(Q,Y\mid 2.0)=.9\{50Q(1.a)-Y(1.a)\}+.1\{30Q(1.b)-Y(1.b)\}$$

除此之外，刻划激励可行机制的基本公式和约束都与例 10.1 中一样。

假设局中人 1 是委托人，且在其选择机制时知道自己的类型。在所有可行

机制中，下述机制同时最大化了 $U_1(Q, Y|1.a)$ 和 $U_P1(Q, Y|1.b)$：

$$Q^3(1.a)=1,\ Y^3(1.a)=48,\ Q^3(1.b)=1,\ Y^3(1.b)=48$$

510 即不论局中人 1 的类型是什么，他的最好激励可行机制就是简单地把他所拥有的一个单位商品以 48 美元卖给局中人 2，这个单价也是 2 对商品的期望价值（$.9\times50+.1\times30=48$）。这个机制给出的期望支付是

$$U_1(Q^3,Y^3|1.a)=8,\quad U_1(Q^3,Y^3|1.b)=28,\ U_2(Q^3,Y^3|2.0)=0$$

因此，若局中人 1 是委托人，则他在这个修改后的例子中应该选择机制（Q^3, Y^3），这看来是很清楚的。

不过，在我们沿着这个结论继续进行下去之前，我们应该通过把机制选择过程作为合作博弈来仔细地加以分析，以更严密地审查其逻辑基础。在这个博弈中，局中人 1 知道其类型而选择一个由调解人执行的机制。局中人 1 和 2 则通过签订一份合同来接受调解人所规定的、作为局中人 1 的报告类型之函数的调解结果，或者做出不交易的选择而得到支付 0 来决定是否参与这个机制。如果两人都一致同意参加，则局中人 1 向调解人报告其类型（有可能说谎），而调解人按照所报告类型实施机制所设定的交易。这个机制选择博弈有一个序贯均衡，其中局中人 1 总是选择(Q^3,Y^3)，且随后局中人都诚实地参与这个机制。

然而，这个博弈还有其他的序贯均衡。例如，考虑下述机制

$$Q^4(1.a)=1/3,\quad Y^4(1.a)=50/3,\quad Q^4(1.b)=1,\quad Y^4(1.b)=30$$

它给出

$$U_1(Q^4,Y^4|1.a)=3\tfrac{1}{3},\quad U_1(Q^4,Y^4|1.b)=10,\quad U_2(Q^4,Y^4|2.0)=0$$

在这个机制中，局中人 1 有自由去选择或把它的全部 1 单位商品以价格 30 美元售出、或以每单位 50 美元的价格售出 1/3 个单位；并且当其类型是 1.b 时选择前者［因为 $(30-20)\geqslant1/3\ (50-20)$］；而当其类型是 1.a 时选择后者。局中人 2 所付价格决不会高于该商品对其实际价值，在所有满足这个性质的激励可行机制所组成的集里，这个机制对局中人 1 的两个类型都是最好的机制。这个机制选择博弈存在着另一个序贯均衡，其中局中人 1 总是选择（Q^4, Y^4），且局中人此后诚实地参与这个机制。如果局中人 1 提出任何另一个机制，其中局中人 2 将预期会在对付至少局中人 1 的一个类型时付出的价格高于
511 该商品对她的实际价值，那么（在这个序贯均衡中），局中人 2 将从这个惊人的提议中推断出，局中人 1 的类型正是使她付出高于其实际价值的价格的那个类型；因此她将拒绝参与。例如，如果局中人 1 在这个均衡中提议(Q^3,Y^3)，则局中人 2 将相信 1 的类型是 1.b；故她将拒绝参与（因为 $30-48<0$）。不过，值得注意的是，(Q^4,Y^4)不是激励有效的，因为(Q^3,Y^3)是事中帕累托优胜于它的。

所以，为了使激励有效性作为机制选择过程的结果，像合作博弈理论一样，我们需要一些进一步的假设。具体地说，我们需要假定，一个选择激励可行机制的局中人，还具有一些对机制选择博弈的不可思议均衡和实施机制自身中的诚实参与均衡进行谈判的能力。即我们需要假定委托人可用如下形式的谈判声明去补充他的机制选择：

> 从我选择这个机制的事实中，你不应该去推断我的类型，因为无论我的类型是什么，我都提议这个机制。注意，给定无人在做这种推断的情况下，每个人都诚实地参与这个机制是一个均衡。所以，让我们大家都计划诚实地参与这个机制吧！

然后，我们需要假定，如果这个声明通过了某种**可靠性检验**（credibility test），那么所有的局中人都将相信它并诚实地参与这个机制（有关这种可靠性检验的一般讨论，参见法雷尔，1988；格罗斯曼和佩里，1986；及迈尔森，1989）。

现在，让我们再次考虑原来的例 10.1，其中质量好类型 1.a 的概率是.2。在此例所有的激励可行机制中，最大化了局中人 2 的期望支付的激励可行机制是

$$Q^5(1.a)=0,\quad Y^5(1.a)=0,\quad Q^5(1.b)=1,\quad Y^5(1.b)=20$$

它给出

$$U_1(Q^5,Y^5|1.a)=0,\quad U_1(Q^5,Y^5|1.b)=0,\quad U_2(Q^5,Y^5|2.0)=8$$

即在局中人 2 的最好机制中，局中人 1 在质量低劣（类型 1.b）时以 20 美元卖出其全部供给，而在质量优良（类型 1.a）时无交易。注意，这个机制给局中人 1 的支付总是 0，且它是激励有效的。尽管存在概率 .2 使局中人 2 不去买对 512
其价值总是高于对卖主的价值的商品，但这对局中人 2 来说是最好的激励可行机制。因此，如果局中人 2 具有全部谈判能力，则我们应该预期她会为这个机制而谈判，其中，实质上她对这个商品做出不容讨价还价的报价 20 美元。

当我们假定局中人 1 是例 10.1 中的委托人时，情况变得复杂一些，因为对局中人 1 最好的可行机制（在给定他的类型下最大化其期望支付的意义上）依赖于其类型是什么。对于质量好的类型（1.a），最好的可行机制是

$$Q^6(1.a)=0,\quad Y^6(1.a)=8,\quad Q^6(1.b)=1,\quad Y^6(1.b)=28$$

它给出

$$U_1(Q^6,Y^6|1.a)=8,\quad U_1(Q^6,Y^6|1.b)=8,\quad U_2(Q^6,Y^6|2.0)=0$$

在这个机制中，局中人 2 向局中人 1 支付 8 美元的不可偿还费用以得到做出不容讨价还价的权利，从而她再付 20 美元便可买一单位的商品（如果 1 接受这

个报价)。另一方面，对于局中人 1 的类型 1.b 来说，最好的激励可行机制是

$$Q^7(1.a)=4/7, \quad Y^7(1.a)=40\times 4/7=22.86$$
$$Q^7(1.b)=1, \quad Y^7(1.b)=31.43$$

它给出

$$U_1(Q^7, Y^7|1.a)=0, \quad U_1(Q^7, Y^7|1.b)=11.43,$$
$$U_2(Q^7, Y^7|2.0)=0$$

在这个机制中，若局中人 1 的类型是 1.a，则局中人 2 以每单位商品 40 美元的价格买 4/7 个单位的商品；而若 1 的类型是 1.b，则局中人 2 用 31.43 美元买 1 个单位的商品。在这个机制中，局中人 2 在局中人 1 的类型为 1.b 时所受损失恰好与其在 1 的类型为 1.a 时所得收益相抵消。

局中人 1 对机制的朴实分析显示，局中人 1 在其类型为 1.a 时应该选择机制 (Q^6, Y^6)；而在其类型为 1.b 时应该选择机制 (Q^7, Y^7)。但是，他一选择了机制，智能的局中人 2 就立即知道了局中人 1 的类型。所以，若局中人 1 选择(Q^6, Y^6)，则局中人 2 可推断出 1 的类型是 1.a，故她会拒绝参与这个
513 机制（预料 1 会侵吞 8 美元的费用而拒绝以 20 美元出售的报价)。机制(Q^6, Y^6)只有在被假定局中人 1 的两个类型都将选择它时才满足参与约束。

类似地，如果局中人 2 了解仅当局中人 1 的类型是 1.b 时才会选择机制(Q^7, Y^7)这一事实，那么，局中人 2 参与这个机制便不是理性的。看出这一困难的另一种方法是应用不可思议原理，并观察到这个朴素理论等价于局中人 1 会选择这样一个机制的理论：若他的类型是 1.a，则此机制与(Q^6, Y^6)相一致；若他的类型是 1.b，则此机制与(Q^7, Y^7)相一致。这个不可思议的等价均衡是

$$Q^8(1.a)=0, \quad Y^8(1.a)=8, \quad Q^8(1.b)=1, \quad Y^8(1.b)=31.43$$

它给出

$$U_1(Q^8, Y^8|1.a)=8, \quad U_1(Q^8, Y^8|1.b)=11.43$$
$$U_2(Q^8, Y^8|2.0)=-2.74$$

故对局中人 2 而言，它不是个人理性的。

所以，无论局中人 1 的类型可能是什么，他都不可能实施对他最好的可行机制，除非局中人 2 相信两个类型将选择相同的机制。因为这些是不同类型的不同机制，且局中人 2 又被假设为智能的，所以局中人 1 有时必须选择一个并非他实际最偏爱的可行机制。即为了神秘莫测地选择机制，局中人 1 在其类型不同时必须在其实际想要的与曾经想要的之间做出某种妥协。

---

* 原文误为 $U_1(Q^7, Y^7|2.0)=0$ ——译者注。

一般地，为了理解一个具有私人信息的委托人的机制选择问题，我们需要有关他应如何做这样一种**不可理解的类型间妥协**（inscrutable intertype compromise）的理论。这是一个困难的问题，但有一类局势，可对其中知情委托人的机制选择问题定义一个强解。

给定任一贝叶斯集体选择问题或贝叶斯讨价还价问题，其中一个局中人 i 被设定为委托人，我们说一个机制是委托人的一个**安全**（safe）提议，当且仅当它是激励可行的，而且不管委托人的真实类型是什么，即使所有局中人都知道其真实类型，这个机制仍为激励可行的。我们说一个机制 μ 是**委托人事中劣**（interim inferior for the principal）于另外某个机制 ν 的，其充要条件是至少存在委托人的一个类型能预期在 ν 中比在 μ 中得到更高的支付［在 $U_i(\nu|t_i)>U_i(\mu|t_i)$ 的意义上］，而且不存在该委托人的任何一个类型会预期在 ν 中比在 μ 中得到的支付低。一个机制是委托人的一个**强解**（strong solution）的充要条件是，它是委托人的安全提议，且对委托人来说它不会事中劣于任何其他的激励可行机制。 514

许多贝叶斯博弈没有强解。对于本节开始所讨论的修改后的例 10.2 来说，局中人 1 的最好安全机制是 (Q^4, Y^4)，对他来说，它又事中劣于 (Q^3, Y^3)，故在例 10.2 中不存在局中人 1 的强解（尽管存在一个机制对局中人 1 的两个类型来说都是最好的）。

在例 10.1 中［其中 (Q^3, Y^3) 不是激励可行的］，局中人 1 的最好安全机制 (Q^4, Y^4) 对他来说不会事中劣于任一其他的可行机制。［注意到 $.3\times 3\frac{1}{3}+.7\times 10=8$，故 (Q^4, Y^4) 满足 $U_2(Q^4, Y^4\,|\,2.0)=0$ 的激励有效性条件 (10.16)。］因此，(Q^4, Y^4) 是在例 10.1 中局中人 1 的一个强解，其中局中人 1 有自由去选择，或以 30 美元的价格出售其所拥有的一个单位供给，或以每单位商品 50 美元的价格出售 1/3 个单位商品。

迈尔森（1983）认为，当这样一个强解存在时，它便是委托人机制选择问题的最合理的解。在委托人选择强解时，不论其余局中人可能会推断出委托人的什么类型，他们都仍将乐于诚实地参与这个机制，因为它是安全的。另一方面，假设 μ 是委托人的一个强解，但假设他实际上选择了另外某个机制 ν，且 ν（如果由所有局中人诚实参与而实施）比 μ 至少对他的一个类型来说将更好。令 $S_i(\nu,\mu)$ 表示局中人 i 偏好 ν 胜于 μ 的类型集，即

$$S_i(\nu,\mu)=\{t_i\in T_i\,|\,U_i(\nu|t_i)>U_i(\mu|t_i)\}$$

其中 i 为委托人。如果已经预期委托人会选择 μ 则其余局中人会自然而然地从他的选择 ν 推断出他的类型属于 $S_i(\nu,\mu)$。不过，假如他们基于这个推断利用贝叶斯法则去计算他们新的信念，则在具有这些新信念的博弈中，机制 ν 一定至少违反了一个信息激励约束或参与约束。若 ν 对具有这些新信念的博弈来说是激励可行的，则定义机制 η，使得对 C 中的每个 c，

$$\eta(c|t)=\nu(c|t) \quad \text{若} \quad t_i\in S_i(\nu,\mu)$$
$$\eta(c|t)=\mu(c|t) \quad \text{若} \quad t_i\notin S_i(\nu,\mu)$$

515

它对具有原信念的博弈来说是激励可行的，且 μ 对委托人而言将是事中劣于 η 的；但这一结论与 μ 对委托人而言不事中劣于任一其他激励可行机制这一事实相矛盾。因此，其他局中人一推断出委托人偏好另一机制 ν 胜过强解，就能反映出 ν 是不可行的（或非激励相容或非个人理性）。

进一步而言，所有强解对委托人来说在下述意义上实质上是等价的：若 i 是委托人，μ 和 μ' 是他的两个强解，则 $U_i(\mu|t_i)$ 对 T_i 中的每个类型 t_i 都一定等于 $U_i(\mu'|t_i)$。若非如此，则根据上述论点，若其余局中人推断出局中人 i 的类型在非空集 $\{t_i\in T_i|U_i(\mu'|t_i)>U_i(\mu|t_i)\}$ 中，则 μ' 不是激励可行的。这与 μ' 对局中人 i 是安全的假设相矛盾。

迈尔森（1983）公理化地推导出一个知情委托人机制选择的**中性最优**（neutral optimum）解概念。对任一给定作为委托人的局中人，总存在一个激励有〕效的中性最优解。若存在一个强解，则它是一个中性最优解。而且，一个中性最优解是持久的，且对委托人而言，它不会事中劣于任何其他激励相容机制。在例 10.1 中，(Q^4,Y^4) 是局中人 1 唯一的强解和中性最优解。在修改后的例 10.2 中，其中局中人 1 没有强解，但 (Q^3,Y^3) 是局中人 1 唯一的中性最优解。我们在此略去了中性最优解的正式定义（参见迈尔森，1983），而代之以对两个局中人具有同等谈判能力的机制选择问题，提出一个紧密相关的解概念。

10.8 中性讨价还价解

哈森伊和塞尔腾（1972）首先研究了如何把纳什讨价还价解的定义进行推广，以应用于不完全信息博弈的问题。迈尔森（1984 a，b）提出了不完全信息
516 博弈的纳什讨价还价解和沙普利 NTU 值两者的推广。在本节中，我们对 10.1 节中所定义的形如

$$\Gamma^{\beta}=(\{1,2\},C,d^*,T_1,T_2,\bar{p}_1,\bar{p}_2,u_1,u_2)$$

的两人贝叶斯讨价还价问题，考虑纳什讨价还价解的这种推广，并称之为中性讨价还价解。

中性讨价还价解可从两个公理导出。这些公理之一针对一系列相当容易理解的问题，指出其应该具有什么样的解（如纳什的对称性公理），另一个公理则指出不同博弈的解应该如何相关（如纳什的不相干选择的无关性公理）。

公理10.1（随机独裁）　设 C 中存在两个结果 b^1 和 b^2，使得

$$u_2(b^1,t)=0 \quad 和 \quad u_1(b^2,t)=0, \quad \forall t\in T$$

且机制 $[b^1]$，$[b^2]$ 和 $.5[b^1]+.5[b^2]$ 全是激励有效的（这里，无论所报告的类型是什么，$[b^i]$ 是总选择 b^i 的机制，而 $.5[b^1]+.5[b^2]$ 是总是给 b^1 和 b^2 各 .5 的概率的机制），则 $.5[b^1]+.5[b^2]$ 是 Γ 的一个讨价还价解。

公理10.2（扩张性）　设 μ 为贝叶斯讨价还价问题 Γ^β 的一个激励有效的机制，其中

$$\Gamma^\beta=(\{1,2\},C,d^*,T_1,T_2,\bar{p}_1,\bar{p}_2,u_1,u_2)$$

又设对每个正数 ε，都存在一个贝叶斯讨价还价问题 $\hat{\Gamma}^\beta(\varepsilon)$ 和 $\hat{\Gamma}^\beta(\varepsilon)$ 的一个讨价还价解 η，使得

$$\hat{\Gamma}^\beta(\varepsilon)=(\{1,2\},\hat{C},d^*,T_1,T_2,\bar{p}_1,\bar{p}_2,\hat{u}_1,\hat{u}_2)$$
$$\hat{C}\supseteq C,$$
$$\hat{u}_i(c,t)=u_i(c,t), \quad \forall i\in\{1,2\}, \quad \forall c\in C, \quad \forall t\in T, \quad 及$$
$$U_i(\mu|t_i)\geq\hat{U}_i(\eta|t_i)-\varepsilon, \quad \forall i\in\{1,2\}, \quad \forall t_i\in T_i$$

则 μ 一定是 Γ 的一个讨价还价解。[这里，$\hat{U}_i(\eta|t_i)$ 是局中人 i 的类型 t_i 从博弈 $\hat{\Gamma}^\beta(\varepsilon)$ 中的机制 η 所得到的期望支付。]

假设，正如在公理 10.1 的前提假设中所陈述的那样，$[b^1]$ 是一个总给予局 517
中人 2 自己就能保证的最坏支付之激励有效机制。因而对局中人 1 来说，$[b^1]$ 不可能事中劣于其他任何一个激励可行机制。而且，对于总是选择相同结果的一个机制来说，满足信息激励约束显然是决不会有任何困难的，因此 $[b^1]$ 一定是局中人 1 的一个安全机制。于是，公理 10.1 的前提蕴含着 $[b^1]$ 是局中人 1 的一个强解。类似地，$[b^2]$ 是局中人 2 的一个强解，从而 Γ^β 就是这样一个例子，其中我们可以确信地预测每个局中人在其为委托人时将选择怎样的机制。

假定在公理 10.1 的前提假设之下，设想我们给每个局中人作为委托人行动并独裁地选择机制的概率为 .5。那么，这个随机独裁过程的综合结果将是执行 $.5[b^1]+.5[b^2]$，这个机制也是给定为激励有效的。由于随机独裁对两个局中人显然是公平的，且它又是有效的，所以它具有作为一个讨价还价解的公正资格。

当然，公理 10.1 的前提假设是相当有限制性的，并且也只有相对少的博弈可能满足它，但这恰恰意味着此公理非常弱。仅当一个随机独裁方案所导致的结果很清楚，且仅当它还是有效时，我们才确实认为这个随机独裁机制应该是一个讨价还价解。

为了理解这些前提是如何受限制的，考虑在第 8 章中所定义的一个两人讨

价还价问题$\{F,(0,0)\}$（具有完全信息）。在这样一个完全信息的背景下，公理10.1的前提意味着配置$.5\{h_1(0,F),0\}+.5\{0,h_2(0,F)\}$在$F$中是帕累托有效的；但这仅当$F$的个人理性帕累托前沿是直线段时才能发生，并且其中点$.5\{h_1(0,F),0\}+.5\{0,h_2(0,F)\}$是纳什讨价还价解（这里$h_i$如8.6节中所定义）。

公理10.2关系到了纳什的不相干选择的无关性公理和一种上半连续性条件。如果$\hat{\Gamma}^{\beta}(\varepsilon)$满足公理10.2的前提，则$\hat{\Gamma}^{\beta}(\varepsilon)$与$\Gamma^{\beta}$的差别仅在于$\hat{\Gamma}^{\beta}(\varepsilon)$包含了某些不属于$\Gamma^{\beta}$的可能结果；为此，我们称$\hat{\Gamma}^{\beta}(\varepsilon)$为$\Gamma^{\beta}$的一个**扩张**
518 (extension)。然而，尽管有机制μ不用这些附加结果中的任何一个（它对于更受限制的博弈Γ^{β}是可行的）这一事实，但μ几乎事中帕累托优胜于扩张$\hat{\Gamma}^{\beta}(\varepsilon)$的一个讨价还价解。公理10.2表明，如果有扩张贝叶斯讨价还价问题Γ^{β}的方法，使得激励有效的机制μ是事中帕累托优胜于此扩张的一个讨价还价解，或者任意接近于事中帕累托优胜于此扩张的一个讨价还价解，则μ本身一定是一个讨价还价解。

有许多满足这两个公理的讨价还价概念。例如，令“讨价还价解”集是所有激励有效机制集，则这两个公理都被满足。一个**中性讨价还价解**（neutral bargaining solution）被定义为，对每一个满足这两个公理的讨价还价解概念而言都是一个解的任一机制。迈尔森（1984a）证明了，中性讨价还价解本身满足这两个公理，并且中性讨价还价解集对任一有限两人贝叶斯讨价还价问题都为非空集。迈尔森（1984a）还证明了下述特征定理。

定理10.3 一个机制μ是有限两人贝叶斯讨价还价问题Γ^{β}的一个中性讨价还价解的充要条件是，对于每个正数ε，总存在向量λ、α及w（它们可依赖于ε）使得

$$\left(\left(\lambda_i(t_i)+\sum_{s_i\in T_i}\alpha_i(s_i\mid t_i)\right)w_i(t_i)-\sum_{s_i\in T_i}\alpha_i(t_i\mid s_i)w_i(s_i)\right)/\bar{p}_i(t_i)$$

$$=\sum_{t_{-i}\in T_{-i}}\bar{p}_{-i}(t_{-i})\max_{c\in C}\sum_{j\in\{1,2\}}v_j(c,t,\lambda,\alpha)/2,\ \forall i\in N,\ \forall t_i\in T_i \tag{10.22}$$

$$\lambda_i(t_i)>0 \text{ 且 } \alpha_i(s_i\mid t_i)\geq 0,\ \forall i\in N,\ \forall s_i\in T_i,\ \forall t_i\in T_i$$

及

$$U_i(\mu\mid t_i)\geq w_i(t_i)-\varepsilon,\ \forall i\in N,\ \forall t_i\in T_i$$

[在这个两人博弈的背景下，我们令$-i$表示不同于i的另一局中人；且$v_j(\cdot)$为10.5节中所定义的虚效用函数。]

证明 给定任一正效用权重的向量λ和任一非负拉格朗日乘子向量α，考虑一个扩张$\hat{\Gamma}^{\beta}$，其中

$$\hat{C}=C\cup\{b^1,\ b^2\}$$

519 $$\hat{u}_1(b^2,\ t)=0=\hat{u}_2(b^1,\ t),\quad \forall i\in T$$

$$\left(\left[\lambda_1(t_1)+\sum_{s_1\in T_1}\alpha_1(s_1\mid t_1)\right]\hat{u}_1(b^1,t)-\sum_{s_1\in T_1}\alpha_1(t_1\mid s_1)\hat{u}_1(b^1,(s_1,t_2))\right)$$

$$\bar{p}_1(t_1)=\max_{c\in C}\sum_{j\in\{1,2\}}v_j(c,t,\lambda,\alpha),\quad \forall t\in T$$

$$\left(\left[\lambda_2(t_2)+\sum_{s_2\in T_2}\alpha_2(s_2\mid t_2)\right]\hat{u}_2(b^2,t)-\sum_{s_2\in T_2}\alpha_2(t_2\mid s_2)\hat{u}_2(b^2,(t_1,s_2))\right)$$

$$\bar{p}_2(t_2)=\max_{c\in C}\sum_{j\in\{1,2\}}v_j(c,t,\lambda,\alpha),\quad \forall t\in T$$

于是，机制 $[b^1]$、$[b^2]$ 和 $.5[b^1]+.5[b^2]$ 都是 $\hat{\Gamma}^\beta$ 的激励有效机制，因为它们与 λ 和 α 一起满足定理 10.1 的条件。因此，为了满足随机独裁公理，$.5[b^1]+.5[b^2]$必须是 $\hat{\Gamma}^\beta$ 的一个讨价还价解。而且，通过令

$$w_i(t_i)=\hat{U}_i(.5[b^1]+.5[b^2]\mid t_i)=\sum_{t_{-i}\in T_{-i}}\frac{\bar{p}_{-i}(t_{-i})\hat{u}_i(b^i,t)}{2}$$

则定理中的方程组（10.22）可被满足。

可以证明［参见迈尔森（1983）的引理 1］，对于满足定理 10.3 中正定性条件的任一 λ 和非负性条件的任一 α，方程组（10.22）有唯一的一个解 $w=(w_i(t_i))_{t_i\in T_i,i\in N}$。因此，任何这种解都一定对应着在 Γ^β 的一个扩张的一个讨价还价解中对局中人的事中期望支付配置。所以，扩张性公理意味着，任一满足定理 10.3 的条件的激励有效机制 μ 一定是 Γ 的一个讨价还价解。

为了完成证明，余下要证明的是，能满足定理 10.3 中条件的所有激励有效机制 μ 组成的集是一个自身满足这两个公理的解集。这个论证的技术细节可以在迈尔森（1984a）中找到。 ■

值得注意的是，向量 λ、α 及 w 在定理 10.3 中可以依赖于正数 ε。不过，如果我们能找到对 $\varepsilon=0$ 的情况满足这个定理之条件的 λ、α 及 w（像在许多例子中一样是可能的），则同样的 λ、α 和 w 对每个正数 ε 都仍将满足定理 10.3。进一步可以证明，这样的 λ 和 α 也将满足定理 10.1 对机制 μ 的激励有效性条件。

为了解释定理 10.3 中的条件，考虑一个想像博弈的(λ,α)**虚讨价还价问题**（virtual bargaining problem），该博弈与 Γ^β 的区别在于以下 3 个方面。第一，局 520
中人的类型是可证实的（例如，就像每个局中人都有一张表明其类型的身份证，并可以要求他出示身份证以证明他没有谎报其类型），故不存在信息激励约束。第二，每个局中人的支付都是用相对于 λ 和 α 的虚效用尺度 $v_i(\cdot,\cdot,\lambda,\alpha)$，而不是 $u_i(\cdot,\cdot)$。第三，这些虚效用支付在局中人之间都是可转让的。

对于此(λ,α)虚讨价还价问题，容易识别在公平与效率的几乎任一合理的意义上都既公平又有效的一个机制：对于任一类型组合，C 中的结果应该是最

大化了局中人可转让虚效用支付和的一个结果（为了效率），并且转让应该被用于在局中人间均等地配置这一可转让支付（为了公平）。［注意，根据(10.7)和(10.17)式，每个局中人在不一致同意结果中的虚效用支付总是0。］因为类型是可证实的，所以不存在激励约束去阻止仲裁人或调解人对这个(λ，α)虚讨价还价问题实施这样一个既公平又有效的机制。

于是，对此(λ，α)虚讨价还价问题中公平与效率的考虑导致了一个机制，其中当局中人 i 的类型是 t_i 时，其期望支付是

$$\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \bar{p}_i(t_{-i}) \max_{c\in C} \sum_{j\in\{1,2\}} \frac{v_j(c,t,\lambda,\alpha)}{2}$$

根据(10.17)式对虚效用的定义，方程组(10.22)表明，对于每个局中人 i，向量 $(w_i(t_i))_{t_i\in T_i}$ 为局中人 i 的期望效用支付配置，且这些支付对应于(λ,α)虚讨价还价问题中那些既公平又有效的期望虚效用支付。因此，任一对某个正的 λ 和某个非负的 α 满足(10.22)式的配置向量

$$w=(w_i(t_i))_{t_i\in T_i, i\in\{1,2\}}$$

都可被称为 Γ^θ 的**虚公平**（virtually equitable）配置向量。

所以，定理 10.3 表明，一个中性讨价还价解就是一个激励有效机制，其产生的、视类型而定的期望效用等于或事中帕累托优胜于虚公平效用配置的极限。即定理 10.3 提出，在谈判或仲裁中，局中人可能用虚效用进行局中人之
521 间的公平比较，而不是用实际效用。我们在 10.4 节第一次引入虚效用时，它只用作刻划激励有效机制的一种方便的方法。而定理 10.3 指出，虚效用尺度在不完全信息讨价还价问题中既可用于刻划公平又可用于刻划效率。

不太正式地说，定理 10.3 提出了有关不完全信息讨价还价的下述理论，我们称之为**虚效用假设**（virtual utility hypothesis）：一个局中人感觉到其他局中人对他关于其类型的任何陈述都不信任的压力时，作为对此的反应，他可能会像要最大化某个虚效用尺度那样讨价还价，而这个虚效用尺度与他的实际效用尺度之间的差别仅在于，它扩大了与危及他真正类型的假类型之间的差异。当他主张所建议机制的公平与效率时，他的讨价还价行为或许可用这种虚效用夸大来加以刻划。

再次考虑例 10.1，此例的中性讨价还价解是

$$Q^\theta(1.a)=1/6,\ Y^\theta(1.a)=50/6,\quad Q^\theta(1.b)=1,\quad Y^\theta(1.b)=25$$

它给出

$$U_1(Q^\theta,Y^\theta|1.a)=1.67,\quad U_1(Q^\theta,Y^\theta|1.b)=5,\ U_2(Q^\theta,Y^\theta|2.0)=4$$

借助于我们在 10.5 节[①] 对这个例子所用的 λ 和 α：

$$\lambda_1(1.a)=0.3,\quad \lambda_1(1.b)=0.7,\quad \lambda_2(2.0)=1$$
$$\alpha_1(1.a|1.b)=0.1,\quad \alpha_1(1.b|1.a)=0$$

定理 10.3 的条件对所有的 ε 都能满足。相对于这些参数，虚效用与实际效用的唯一差别是，当局中人 1 的类型是 1.a 时，商品对局中人 1 的虚价值是 50 美元（而不是实际的 40 美元）。因此，当局中人 1 是类型 1.a 时，最大虚效用支付和为 0（=50－50）；而当局中人 1 是类型 1.b 时，最大虚效用支付和是 10（=30－20）。虚公平方程组（10.22）就成为

$$\frac{0.3w_1(1.a)-0.1w_1(1.b)}{0.2}=0/2$$

$$\frac{(0.7+0.1)w_1(1.b)}{0.8}=10/2$$

$$w_2(2.0)=.8(10/2)+.2(0/2)$$ 522

此方程组有唯一解

$$w_1(1.a)=1\tfrac{2}{3},\quad w_1(1.b)=5,\quad w_2(2.0)=4$$ [②]

在这个中性讨价还价解中，局中人 1 在类型为 1.a 时以每单位 50 美元的价格售出其供给的 1/6，而在其类型为 1.b 时以每单位 25 美元的价格售出其全部供给。将这个机制与 10.3 节中我们曾讨论的机制(Q^1, Y^1)进行比较是有趣的，在(Q^1, Y^1)中，局中人 1 在其类型为 1.a 时以每单位 45 美元的价格售出其全部供给的 1/5，而在其类型为 1.b 时以 25 美元的单价售出其全部供给。机制(Q^1, Y^1)是唯一激励有效的机制，其中商品总是以它对卖主的价值与它对买主的价值的平均值作为单价出售；因而从自然的直观意义上来看，(Q^1, Y^1)可能是公平而又有效的。然而，(Q^1, Y^1)在这个(λ,α)虚讨价还价问题中不是公平的（甚或不是个人理性的），因为它要求局中人 1 在其类型为 1.a 时以单价 45 美元而不是以商品对其虚价值 50 美元出售其部分商品。为了在这个(λ, α)虚讨价还价问题中满足虚公平的要求，当 1 的类型为 1.a 时，出售单价必须为 50 美元，正如在(Q^9, Y^9)中那样。

这个中性讨价还价解(Q^9, Y^9)可以直接用随机独裁公理的逻辑予以解释。在 10.7 节[③]，我们曾认为，若局中人 1 是可以独裁地选择机制的委托人，则他要求选择(Q^4, Y^4)，其中当局中人 1 的类型为 1.a 时，他以单价 50 美元售出

① 原文误为 10.4 节——译者注。

② 原文误为 $w_1(2.0)=4$——译者注。

③ 原文误为 10.6 节——译者注。

其供给的1/3；而当他的类型为1.b时，他以单价30美元售出其全部供给。如果局中人2是委托人或独裁者，她要选择机制(Q^5, Y^5)，其中当局中人1的类型为1.a时，他不出售商品；而当他的类型为1.b时，他以单价20美元售出其全部供给。这两个独裁机制之间的一个.50－.50随机化，对局中人1两个可能类型中的每一个都有如同(Q^9, Y^9)一样的期望出售量和期望现金支付；即对于T_1中的每个t_1，均有

$$Q^9(t_1) = .5Q^4(t_1) + .5Q^5(t_1) \quad 和 \quad Y^9(t_1) = .5Y^4(t_1) + .5Y^5(t_1)$$

因此，对此例而言，中性讨价还价解实质上等价于一个随机独裁机制。

523 当局中人1的类型为1.a时，他所处的地位可被描述为惊人地强："惊人"是因为这个类型的概率相当小；而"强"是因为在任一给定价格下他要交易的意愿决不会大于其类型不同时所可能有的意愿。当局中人1处于这样一个惊人地强的地位时，中性讨价还价解（基于局中人1和2具有相同的谈判能力之假定）的贸易条件（每单位交易价格）类似于局中人1是委托人（具有全部谈判能力）时所能出现的贸易条件，只是期望交易量少一些，中性讨价还价解的这种性质在其他例子也有所见（参见迈尔森，1985*b*），并被称为**力量自大**(arrogance of strength)。

为了更好地理解为什么这种力量自大可能是预期合理的，进一步思考在不完全信息讨价还价理论中引起的神秘莫测的类型间妥协或许有所帮助。如果只是因为有许多机制给局中人2的期望支付总是相同，但它们给1.a和1.b的期望支付上有所差别，那么，任何为这个例子规定了一个激励有效机制的理论都必须暗含了对局中人1两个类型之间的某种权衡或妥协。例如，把(Q^9, Y^9)与机制

$$Q^{10}(1.a) = 4/19\ , \quad Y^{10}(1.a) = 45 \times 4/19$$
$$Q^{10}(1.b) = 1\ , \quad Y^{10}(1.b) = 25.26$$

进行比较，后者给出

$$U_1(Q^{10}, Y^{10} | 1.a) = 1.05\ , \quad U_1(Q^{10}, Y^{10} | 1.b) = 5.26$$
$$U_2(Q^{10}, Y^{10} | 2.0) = 4$$

故它对1.a来讲差于(Q^9, Y^9)，但对1.b来讲又好于(Q^9, Y^9)。设想局中人正在为选择一个调解人而讨价还价，他们有两个候选调解人，其中一个承诺执行(Q^9, Y^9)，另一个则承诺执行(Q^{10}, Y^{10})。局中人2起初在这两个候选人之间是无差别的，但如果局中人2知道了局中人1实际偏好哪一个调解人的话，她将会偏好另一个。所以，看起来可能局中人1的任何一个类型都不敢表达其对这两个调解人的真实偏好，唯恐局中人2会坚持另一个机制。

524 不过，这个论证忽视了这样的事实，即当考虑到有其他机制的可能性时，强类型1.a能在讨价还价中从向局中人2透露其类型而大大受益。毕竟，在局

中人 2 知道局中人 1 是类型 1.a 的完全信息博弈中，纳什讨价还价解是局中人 1 以 45 美元的单价售出全部供给。因此，如果局中人 1 是类型 1.a 时，那他肯定要力主雇用执行(Q^9, Y^9)的调解人，并大胆地补充说："如果你从我对(Q^9, Y^9)的偏好推断出我的类型是 1.a，那你应该免除这两个调解人，并以 45 美元买走我的全部供给，恰如在我是 1.a 时这对我很好一样，对你也会更好！"为了保持不可思议性，如果局中人 1 是类型 1.b，那他也必须做同样的论证。即，因为局中人 1 在其类型为 1.a 时实际上很急于透露关于其类型的信息，并仅有 1.b 才真正有动机在讨价还价中隐瞒其类型，所以，在强类型 1.a 与弱类型 1.b 之间不可理解的类型间妥协才趋向有利于强类型而得到解决。

在例 10.2 中，类型 1.a 具有概率 .9，故强类型不会是"惊人的"，也不存在力量自大。（更确切地，我们可以说在 1.a 的概率变得足够大以致局中人 2 偏好肯定以 40 美元发生交易的机制胜于仅在局中人 1 的类型为 1.b 时以 20 美元发生交易的机制时，强类型 1.a 就不再"令人吃惊"。）例 10.2 的中性讨价还价解是

$$Q^{11}(1.a)=1,\quad Y^{11}(1.a)=44,\quad Q^{11}(1.b)=1,\quad Y^{11}(1.b)=44$$

（即全部商品总是以 44 美元的价格出售），它给出

$$U_1(Q^{11}, Y^{11}|1.a)=4,\quad U_1(Q^{11}, Y^{11}|1.b)=24$$
$$U_2(Q^{11}, Y^{11}|2.0)=4$$

在例 10.2 中，通过对局中人 1 不太可能的弱类型 1.b 实质上赋予零权重，定理 10.3 的虚公平条件便被满足。具体地说，通过令

$$\lambda_1(1.a)=1-0.1\varepsilon,\quad \lambda_1(1.b)=0.1\varepsilon,\quad \lambda_2(2.0)=1$$
$$\alpha_1(1.a|1.b)=0.1-0.1\varepsilon,\quad \alpha_1(1.b|1.a)=0$$

则定理 10.3 的条件对任意正的 ε 都可满足。根据这些参数，虚效用支付与实 525
际效用支付的差别仅在于，当局中人 1 的类型为 1.a 时商品对其虚价值是

$$\frac{(1-0.1\varepsilon)\ 40-\ (0.1-0.1\varepsilon)\ 20}{.9}=42\tfrac{2}{9}-\varepsilon 2\tfrac{2}{9}$$

故最大可能的虚效用支付和在局中人 1 的类型为 1.a 时是

$$50-\ (42\tfrac{2}{9}-\varepsilon 2\tfrac{2}{9})\ =7\tfrac{7}{9}+\varepsilon 2\tfrac{2}{9}$$

而在局中人 1 的类型为 1.b 时是 30－20＝10。于是，虚公平条件可被写成

$$\frac{(1-0.1\varepsilon)w_1(1.a)-(0.1-0.1\varepsilon)w_1(1.b)}{.9}=(7\tfrac{7}{9}+\varepsilon 2\tfrac{2}{9})/2$$

$$\frac{(0.1\varepsilon+\ (0.1-0.1\varepsilon))\ w_1\ (1.b)}{.1}=10/2$$

$$w_2\ (2.0) = .9\ (7\frac{7}{9} + \varepsilon 2\frac{2}{9})\ /2 + .1\ (10/2)$$

这些方程的唯一解是

$$w_1(1.\mathrm{a}) = \frac{4 + 0.5\varepsilon}{1 - 0.1\varepsilon}, \quad w_1(1.\mathrm{b}) = 5, \quad w_2(2.0) = 4 + \varepsilon$$

随着 ε 趋于 0，这些解收敛于极限配置

$$w_1(1.\mathrm{a}) = 4, \quad w_1(1.\mathrm{b}) = 5, \quad w_2(2.0) = 4$$

中性讨价还价解是事中帕累托优胜于这个极限配置的。

利用虚效用假设，迈尔森（1984*b*）曾提出了不完全信息多人合作博弈的一个解概念，它推广了中性讨价还价解（在两人情况中）和沙普利 *NTU* 值（在不完全信息情况中）。在对这个广义 *NTU* 值的定义中，相对于某个 λ 和 α 的虚效用的想像转让，与完全信息博弈对沙普利 *NTU* 值的定义中 λ-加权效用的想像转让（参见 9.9 节）具有相同的功能。注意，如果每个局中人只有一个类型，那么 α 参数便可以从虚效用定义（10.17）中去掉，这就简化为简单的 λ-加权效用。

10.9 不完全信息动态匹配过程

526 9.8 节中所提出的内核可被推广到不完全信息博弈。这样做的最便捷的方法就是利用一个被复制成动态匹配过程的博弈模型，对此，我们可证明推广了定理 9.6 的存在性定理。

正如在第 9 章中，令 $L(N)$ 表示所有联盟或 N 的所有非空子集所组成的集。对于任一联盟 S，令 $T_S = \times_{i \in S} T_i$ 表示 S 中局中人的所有可能类型组合所组成的集，并令 C_S 表示 S 中局中人在合作行动时所能选择的所有联合可行行动组成的集。假设，如果一个联盟 S 具有 T_S 中的类型组合 t_S，且合作地从 C_S 中选择行动 c_S，那么对每个局中人 $i \in S$ 的支付便是 $u_i(c_S, t_S)$。我们在此假定，对 S 中局中人的支付与此联盟之外的局中人的类型和行动无关。（我们称之为**正交联盟**（orthogonal coalitions）假定，就像在 9.2 节中所讨论过的一样。）

在我们研究一个**动态匹配过程**时，集 N 不是被解释为局中人集，而是外部可区分的局中人的**类**集。对 N 中的每个 i，集 T_i 是第 i 类局中人私自知道的可能类型集。即，我们假定每个局中人可用 N 中的 i 和 T_i 中的类型 t_i 来描述，并且该局中人的类是可公开观察到并可证实的，但其类型则是私人知道且只能由其本人直接可观察到的。让我们假定，每个局中人只能加入一个联盟，

并从中得到其效用支付。当一个局中人被指派到一个联盟中去，我们就说他**退出**（exits）这个匹配系统。匹配过程的功能就是把每个局中人都指派到某个具有某个类型组合并将选择某个行动的联盟中去。一个局中人在进入匹配过程的时点与其加入基本联盟而后退出的时点之间，处于等待并可供匹配的状态。

让我们首先考虑动态匹配过程的一个时点的情况。假设等待的总体相当大，并令$f_i(t_i)$表示在这个时点处第i类类型为t_i的个体在等待总体中的比例。又令$w_i(t_i)$表示第i类类型为t_i的个体在这个匹配过程按照某个已建立的匹配计划运作（我们在后面将更详尽地加以考虑）时，留在匹配过程中所预期的期望支付。我们可记作

$$w=(w_i(t_i))_{i\in N,t_i\in T_i},\quad f=(f_i(t_i))_{i\in N,t_i\in T_i}$$

并称这个向量偶为**等待总体特征**（waiting population characteristics）。 527

现在假设一个调解人欲与已建立的匹配计划竞争，并将一些目前在等待的个人指派到**阻挠联盟**（blocking coalitions）。其阻挠计划可用形如

$$\eta=(\eta_S(c_S,t_S))_{S\in L(N),c_S\in C_S,t_S\in T_S}$$

的一个向量η来描述，其中$\eta_S(c_S,t_S)$表示他能形成的且具有类型组合t_S并将选择联合行动c_S（如果他成功地实施这一阻挠计划）的阻挠联盟个数除以此时点等待个体总数。于是，在这个阻挠计划下，第i类类型为t_i的个体将被指派到一个具有类型组合t_S且将选择联合行动c_S的联盟中去的概率为

$$\frac{\eta_S(c_S,t_S)}{f_i(t_i)}$$

[一如既往地约定，这里的t_i是t_S的第i个分量，t_S的其余分量可用t_{S-i}表示，故$t_S=(t_{S-i},t_i)$。]

我们说η相对于等待总体特征(w,f)是一个**切实可行的阻挠计划**，其充要条件是，对于N中的每个i、T_i中的每个t_i及T_i中的每个r_i，η均满足下列条件：

$$\sum_{S\supseteq\{i\}}\sum_{c_S\in C_S}\sum_{t_{S-i}\in T_{S-i}}\frac{\eta_S(c_S,t_S)}{f_i(t_i)}\le 1 \tag{10.23}$$

$$\sum_{S\supseteq\{i\}}\sum_{c_S\in C_S}\sum_{t_{S-i}\in T_{S-i}}\frac{[u_i(c_S,t_S)-w_i(t_i)]\eta_S(c_S,t_S)}{f_i(t_i)}\ge 0 \tag{10.24}$$

$$\sum_{S\supseteq\{i\}}\sum_{c_S\in C_S}\sum_{t_{S-i}\in T_{S-i}}\frac{[u_i(c_S,t_S)-w_i(t_i)]\eta_S(c_S,t_S)}{f_i(t_i)}\ge \sum_{S\supseteq\{i\}}\sum_{c_S\in C_S}\sum_{t_{S-i}\in T_{S-i}}\frac{[u_i(c_S,t_S)-w_i(t_i)]\eta_S(c_S,t_{S-i},r_i)}{f_i(r_i)} \tag{10.25}$$

$$\eta_S(c_S,t_S)\ge 0,\ \forall S\in L(N),\ \forall c_S\in C_S,\ \forall t_S\in T_S \tag{10.26}$$

$$\sum_{S\in L(N)}\ \sum_{c_S\in C_S}\ \sum_{t_S\in T_S}\eta_S(c_S,t_S)>0 \tag{10.27}$$

条件（10.23）要求，对于任一个人类型，被指派到一个阻挠联盟的总概率不能大于1。因为某些个人或许未被阻挠调解人指派，而只是简单地在已建立的匹配计划中继续等待被指派，所以（10.23）式可以取严格的大于号。条件（10.24）是一个个人理性约束，它要求不应该有人会预期在这个阻挠计划下做得比继续等待更差。条件（10.25）是一个信息激励约束，它要求没有一个人在这个阻挠计划下能通过对其类型说谎而增加其期望收益。条件（10.26）和（10.27）则要求，各种联盟的相对数一定非负，且不全为0。注意，这些约束仅当每个$f_i(t_i)$都不为0时才有意义。

528

对于等待总体特征(w,f)，当且仅当对每个i和t_i均有$f_i(t_i)>0$，且不存在任何相对于(w,f)切实可行的阻挠计划时，我们才称之为**强阻化性的**(strongly inhibitive)。述定理把定理9.5在完全信息的情形上加以推广了。

定理10.4 等待总体特征(w,f)为强阻化性的充要条件是，存在向量λ和α，使得

$$\lambda_i(t_i)\geq 0 \text{ 且 } \alpha_i(r_i\mid t_i)\geq 0,\ \forall i\in N,\ \forall r_i\in T_i,\ \forall t_i\in T_i$$

$$\sum_{i\in S}\Big(\{\lambda_i(t_i)+\sum_{r_i\in T_i}\alpha_i(r_i\mid t_i)\}w_i(t_i)-\sum_{r_i\in T_i}\alpha_i(t_i\mid r_i)w_i(r_i)\Big)/f_i(t_i)$$

$$>\sum_{i\in S}\Big(\{\lambda_i(t_i)+\sum_{r_i\in T_i}\alpha_i(r_i\mid t_i)\}u_i(c_S,t_s)-\sum_{r_i\in T_i}\alpha_i(t_i\mid r_i)u_i(c_S,(t_{S-i},r_i))\Big)/f_i(t_i)$$

$$\forall S\in L(N),\ \forall c_S\in C_S,\ \forall t_S\in T_S$$

证明 首先注意到，当且仅当不存在任何满足（10.24）～（10.27）式的η时，(w,f)才是强阻化性的，因为满足这些条件的任何一个解乘以充分小的数后仍将满足（10.23）。因而考虑在约束条件（10.24）～（10.26）下最大化（10.27）式的左边表达式的线性规划问题。此问题的约束条件总有一个可行解（通过令η为零向量），且一个可行解的任一正数倍仍是一个可行解。于是，这个线性规划问题要么在(w,f)为强阻化性时有最优值0，要么在(w,f)不是强阻化性时有最优值$+\infty$。根据线性规划的对偶定理，这个线性规划问题有一个有限最优解的充要条件是，其对偶问题有一个可行解。于是当且仅当这个对偶问题有一个可行解时，(w,f)才是强阻化性的。令λ为个人理性约束（10.24）的对偶变量所组成的向量。并令α为激励约束（10.25）的对偶变量所组成的向量，那么，证明对于对偶问题的约束存在一个解的充要条件是对于定理10.4中的条件存在一个解(λ,α)，便成了一个直截了当的问题。 ■

529

从虚效用假设方面来说，定理10.4有一个直观明了的解释。这个定理肯

定了，等待总体特征 (w, f) 是强阻化性的，其充要条件是，存在虚效用尺度，其中阻挠代理人所能形成的每个联盟的总虚效用价值，将小于其成员在已建立的匹配计划中所能得到的虚效用支付之和。

当且仅当存在某个强阻化性的向量序列收敛于 (w, f) 时，我们才说等待总体特征 (w, f) 是**阻化性**的 (inhibitive)。即，一个等待总体特征是阻化性的，其充要条件是，通过对某些类型的期望支付和各种类型的个体相对数作任意小的扰动，我们可以得到不允许有切实可行的随机阻化计划存在的等待总体特征。于是，如果一个切实可行的阻挠计划相对于一个阻化性的等待总体是可能的，那它只能是一种不稳定的刀刃现象，至少有一个局中人类型愿意通过拒绝参加或对其类型说谎的方式推翻这个阻挠计划。

现在，我们必须完成对动态匹配过程及能为个体指定联盟所制定的匹配计划的描述。假设所有类型和所有类的局中人都以某个常数比率进入（或“出生”于）匹配过程。为了完整地描述动态匹配过程，我们必须对 N 中的每个类 i 和 T_i 中的每个类型 t_i 规定一个正数 $\rho_i(t_i)$，它表示在第 i 类局中人中类型为 t_i 的局中人的出生率。于是，一个一般动态匹配过程的要素是

$$\{N, (C_S)_{S\in L(N)}, (T_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}, (\rho_i)_{i\in N}\} \tag{10.28}$$

我们在此假定，对于所有的 i 和 S，集 N、C_S 和 T_i 全为非空有限集。

一个**匹配计划**可用一个向量描述为

$$\mu = (\mu_S(c_S, t_S))_{c_S\in C_S, t_S\in T_S, S\in L(N)}$$

其中每个数 $\mu_S(c_S, t_S)$ 都表示了其类型组合为 t_S 而联合行动为 c_S 的联盟 S 形成 530
的速率（每单位时间）。为使市场从长期来看是出清的，每一类和每一类型局中人进入匹配系统的速率必须等于他们因进入各种联盟而退出这个匹配过程的速率。于是，一个匹配计划必须满足如下**平衡条件** (balance condition)：

$$\sum_{S\supseteq\{i\}} \sum_{c_S\in C_S} \sum_{t_{S-i}\in T_{S-i}} \mu(c_S, t_S) = \rho_i(t_i), \quad \forall i \in N, \ \forall t_i \in T_i \tag{10.29}$$

在这样一个匹配计划 μ 中，对第 i 类局中人的类型为 t_i 的一个局中人的期望支付是 $U_i(\mu \mid t_i) = \sum_{S\supseteq\{i\}} \sum_{c_S\in C_S} \sum_{t_{S-i}\in T_{S-i}} \dfrac{\mu(c_S, t_S) u_i(c_S, t_S)}{\rho_i(t_i)}$

但前提是他和其他每个人都诚实地参与这个计划。另一方面，如果这样一个局中人系统地把自己的类型 t_i 假装成 r_i（他不能对其所属的类进行撒谎），那他的期望支付将是

$$U_i^*(\mu, r_i \mid t_i) = \sum_{S\supseteq\{i\}} \sum_{c_S\in C_S} \sum_{t_{S-i}\in T_{S-i}} \frac{\mu(c_S, (t_{S-i}, r_i)) u_i(c_S, t_S)}{\rho_i(r_i)}$$

于是，当且仅当一个匹配计划 μ 满足信息激励约束

$$U_i(\mu|t_i) \geq U_i^*(\mu, r_i|t_i), \quad \forall i \in N, \ \forall t_i \in T_i, \ \forall r_i \in T_i \tag{10.30}$$

时，我们才说它是**激励相容的**。

在一个平稳匹配过程中，在任一时点，类型为 t_i 的人在等待并可供匹配的期望个数等于$\rho_i(t_i)$与类型 t_i 的个体期望等待的时间之积。由于不同的类型可以有不同的期望等待时间，等待总体中的比率$f_i(t_i)$未必一定比例于出生率$\rho_i(t_i)$。因此，我们说一个匹配计划 μ 是**竞争可持续的**（competitively sustainable），其充要条件是，它满足平衡条件（10.29）、激励相容约束（10.30），并存在某个阻化性的等待总体特征(w,f)，使得

$$U_i(\mu|t_i) = w_i(t_i), \quad \forall i \in N, \ \forall t_i \in T_i \tag{10.31}$$

531 下述竞争可持续计划的存在性定理推广了定理 9.6。迈尔森（1988）（对一个多少更一般些的模型）已应用不动点证法给出了其证明。

定理10.5 *对于如（10.28）所给出的任一动态匹配过程，必定至少存在一个竞争可持续的匹配计划。*

竞争可持续计划在许多经济学应用中可被理解为一个一般平稳市场均衡的模型。例如，让我们考虑对应于例 10.1 和 10.2 的动态匹配过程，并让我们把商品等同于卖方的劳动力。假设在任一单位时间区间内都有许多卖方（第 1 类局中人）和许多买方（第 2 类局中人）进入匹配过程或市场。每个卖者都有一个单位的劳动待售，并且他知道要么其类型为 1.a 并具有高能力，要么其类型为 1.b 并具有低能力。与从前一样，具有高能力的卖主的劳动对自己的单位价值是 40 美元，而对一个买主而言其劳动的单位价值是 50 美元；但具有低能力的卖主，其劳动对自己的单位价值为 20 美元，而对一个买主则为 30 美元。假设，一个买者最多只能从一个卖者那里购买，而一个卖者最多只能向一个买者卖出其全部或部分劳动力，且买方直至交易完成之后方可直接观察到卖主的能力水平。

让我们假设买方的出生率高于卖方的出生率，即

$$\rho_2(2.0) > \rho_1(1.a) + \rho_1(1.b)$$

对于这个例子，存在一个竞争可持续匹配计划，其中每个低能力的卖者都以 30 美元的单价卖出其全部劳动，而每一个高能力的卖者都以 50 美元的单价卖出其 1/3 的劳动供给（得到总支付 50/3 美元），而且一些过剩的买者没有交易便退出了。为了阐释这一结论，我们令$C_{|1,2|} = \{(q,y)|0 \leqslant q \leqslant 1, \ y \geqslant 0\}$和$C_{|1|} = C_{|2|} = \{(0,0)\}$。并令效用函数如同（10.18）～（10.21）式中所给出的一样。那么，竞争可持续计划 μ 便可被写成

$$\mu_{|1,2|}\{(1/3,50/3),(1.a,2.0)\} = \rho_1(1.a)$$

$$\mu_{\{1,2\}}\{(1,30),(1.b,2.0)\}=\rho_1(1.b)$$
$$\mu_{\{2\}}\{(0,0),2.0)\}=\rho_2(2.0)-\{P\rho_1(1.a)+\rho_1(1.b)\} \qquad 532$$

它给出

$$U_1(\mu|1.a)=10/3,\quad U_1(\mu|1.b)=10,\quad U_2(\mu|2.0)=0$$

这个计划 μ 实质上是将例 10.1 和 10.2 的卖主的最好安全机制(Q^4, Y^4)转化到动态匹配过程中去。欲验证这个计划 μ 是竞争可持续的，只需回顾在例 10.1 中，机制(Q^4, Y^4)是激励有效的，并给出相同的事中期望支付配置即可。因此，对任一正的 ε，通过令

$$w_1(1.a)=10/3,\qquad w_1(1.b)=10,\qquad w_2(2.0)=\varepsilon$$
$$f_1(1.a)=0.1,\qquad f_1(1.b)=0.4,\qquad f_2(2.0)=0.5$$
$$\lambda_1(1.a)=0.15,\qquad \lambda_1(1.b)=0.35,\qquad \lambda_2(2.0)=0.5$$
$$\alpha_1(1.a|1.b)=0.05,\quad \alpha_1(1.b|1.a)=0$$

就能满足定理 10.4 中强阻化性的条件。即，通过让 80% 的卖主是类型 1.b 而只有 20% 的卖主是类型1.a$[f_1(1.a)/\{f_1(1.a)+f_1(1.b)\}=0.2]$，$\mu$ 可以用复制例 10.1 中局势而由得到的等待总体特征得以持续。买方在竞争可持续计划中得到零支付这一事实，是每一代中出生的买者比卖者过剩的一个结果。

假设$\rho_1(1.a)/\rho_1(1.b)=9$;故在每一代中都有更多的高能力卖者出生，且比出生的低能力卖者多很多。上面关于这个计划 μ 是竞争可持续的论证包括了这种情况。特别地，如果低能力卖主在动态匹配过程中等待和搜索的时间比高能力卖主长 28 倍，那将会产生低能力卖主比高能力卖主多 4 倍的持续等待总体。这个效应令人想起经典货币论中的**格雷欣法则**（Gresham's law），即“劣币驱逐良币”。

然而，对于$\rho_1(1.a)/\rho_1(1.b)=9$，也存在其他的激励相容匹配计划，它们对所有的类型都好于这个竞争可持续的匹配计划。例如，令 ν 为每一个卖主都以 47 美元卖出其全部劳动力的匹配计划，则有

$$\nu_{\{1,2\}}\{(1,47)(1.a,2.0)\}=\rho_1(1.a)$$
$$\nu_{\{1,2\}}\{(1,47)(1.b,2.0)\}=\rho_1(1.b)$$
$$\nu_{\{2\}}\{(0,0),2.0)=\rho_2(2.0)-\{\rho_1(1.a)+\rho_1(1.b)\}$$
$$U_1(\nu|1.a)=7 \qquad 533$$
$$U_1(\nu|1.b)=27$$
$$0<U_2(\nu\ 2.0)=\{3\rho_1(1.a)-17\rho_1(1.b)\}/\rho_2(2.0)\leq 1$$

不幸的是，尽管这个计划 ν 是帕累托优胜于竞争可持续计划 μ，但 ν 自身不是竞争可持续的。实质问题在于，类型为 1.b 的局中人在 ν 中得到高支付，实际上使切实可行的阻挠计划的形成更为容易，因为这使一个阻挠调解人更容易阻止低能力卖主进入阻挠联盟，且要求他们继续等待他们在匹配计划 ν 中所

期望的高支付。对于任一类型分布 $\hat{f}$ 和任一由 ν 生成且充分接近于期望支付向量 $\{U_1(\nu|1.a), U_1(\nu|1.b), U_2(\nu|2.0)\}$ 的向量 $\hat{w}$，存在一个相对于 $(\hat{w}, \hat{f})$ 切实可行的阻挠计划，其中高能力卖主以 48.50 美元的单价卖出 0.9 个单位的劳动力（得到的总支付为 43.65 美元），而所有低能力的卖主呆在阻挠联盟之外并继续等待在 ν 中被匹配。注意到

$$0.9\ (48.50-40)\ =7.65>7$$
$$0.9\ (48.50-20)\ =25.65<27$$
$$0.9\ (50-48.5)\ =1.35>1$$

故高能力卖主在这样一个阻挠联盟中做得好于在 ν 中，低能力卖主则差于在 ν 中所得到的期望支付，且买主也期望在这样一个阻挠联盟中要比在 ν 中做得好些。

于是，在具有不完全信息的动态匹配过程中，一个竞争可持续计划未必是激励有效的。用定理 10.4 的语言来说，之所以发生这种无效性，是因为当一个“坏”类型危及一个“好”类型时，提高对坏类型的支付会降低相应对好类型的虚效用支付，并从而使满足一个阻化性等待总体的条件更难达到。这一无效性结论，与经济学理论中逆向选择导致市场失灵的结论密切相关［参见斯彭斯的奠基性论文，1973；罗思柴尔德和斯蒂格利茨（Rothschild and Stiglitz, 1976）；以及威尔森（Wilson, 1977）］。我们的竞争可持续计划的一般存在性定理基于坏类型有比好类型等待更长时间的可能性；从而一个阻挠调解人在任
534 一时点都不得不从大多为坏类型的总体中招聘，即使坏类型的出生率相当低也是如此。如果我们能对等待总体中的类型分布 f 加上必须正比于出生率 ρ 的限制，那我们就能保证，在所有激励相容的匹配计划中，可持续的计划便是帕累托有效的计划。迈尔森（1988）已经证明，仅当条件（10.31）中的等式弱化为一个不等式

$$U_i(\mu|t_i)\geqslant w_i(t_i)$$

时，具有上述限制的可持续计划的存在性一般是能够被保证的。但这一弱化条件难以从经济学上加以解释。

习 题

10.1 对于表 10－1 中的例子，令 μ 是满足

$$\mu(x|1.a,\ 2.a)\ =1,\quad \mu(y|1.a,\ 2.b)\ =1$$
$$\mu(z|1.b,\ 2.a)\ =1,\quad \mu(y|1.b,\ 2.b)\ =1$$

而所有其他的$\mu(c\mid t)$皆为 0 的机制。利用定理 10.1 证明这个机制 μ 是激励有效的。在你的证明中，令效用权重$\lambda_1(1.a)=\lambda_1(1.b)=\lambda_2(2.a)=\lambda_2(2.b)=1$。（提示：定理中倒数第二个条件意味着，所有拉格朗日乘子除了一个$\alpha_i(s_i\mid t_i)$外皆为 0。）

10.2　回顾习题 6.3（第 6 章）的贝叶斯讨价还价问题。局中人 1 是单一不可分物品的卖主，而局中人 2 是唯一的潜在买主。物品的价值对局中人 1 来说是 0 美元或 80 美元，而对局中人 2 来说是 20 美元或 100 美元。事前，这些价值的所有 4 种可能的组合都被认为是同等可能的。当局中人相遇讨价还价时，每个局中人知道他自己对此物品的私人价值，并相信另一局中人的私人价值是其相应两个可能价值中的一个，概率各为 1/2。我们假设每个局中人的类型是他对此物品的私人价值，故 $T_1=\{0,\ 80\}$，$T_2=\{20,\ 100\}$，及

$$p_1(0)=p_1(80)=1/2\ ,\quad \bar{p}_2(100)=\bar{p}_2(20)=1/2$$

两个局中人的期望支付依赖于他们的类型$t=(t_1,t_2)$，局中人 2 付给局中人 1 的期望付款额 y 及此物品交割给局中人 2 的概率 q，其公式为　535

$$u_1((q,y),t)=y-t_1q,\quad u_2((q,y),t)=t_2q-y$$

无交易（$q=0$，$y=0$）是此讨价还价问题中的不一致同意结果。对于这个贝叶斯讨价还价问题，我们可以通过函数偶 $Q:T_1\times T_2\to[0,\ 1]$ 和 $Y:T_1\times T_2\to\mathbf{R}$ 来表示一个机制，其中$Q(t)$为物品被卖给局中人 2 的概率，而$Y(t)$是在 t 为局中人向调解人所报告的类型组合时，局中人 2 给局中人 1 的期望净付款额。

a. 尽管$Q(t)$必须在区间[0,1]中，但 $Y(t)$可为 $\mathbf{R}$ 中的任意实数，证明

$$\max_{(q,y)\in[0,1]\times\mathbf{R}}\ \sum_{i\in\{1,2\}}v_i((q,y),t,\lambda,\alpha)$$

仅当存在某个正的常数 K 满足

$$\frac{\lambda_i(t_i)+\sum\limits_{s_i\in T_i-t_i}\{\alpha_i(s_i\mid t_i)-\alpha_i(t_i\mid s_i)\}}{\bar{p}_i(t_i)}=K,\ \forall i\in\{1,2\},\ \forall t_i\in T_i$$

时才是有限的。

b. 在买主－卖主讨价还价中，通常，在防止买主夸大物品对其价值和防止卖主低报物品对其价值方面并无困难。因此，我们可以设

$$\alpha_2(100\mid 20)=0\quad 和\quad \alpha_1(0\mid 80)=0$$

再则，不失一般性，我们可以令常数 K 等于 1。（改变 K 只需对所有的参数做一个比例变化。）根据这些假设，（a）部分的方程变成

$$\lambda_1(0)+\alpha_1(80|0)=\lambda_1(80)\quad \alpha_1(80|0)=1/2$$
$$\lambda_2(100)+\alpha_2(20|100)=\lambda_2(20)-\alpha_2(20|100)=1/2$$

依据这些方程，对 $T_1\times T_2$ 中所有 4 个可能类型组合 t 的每一个，把 $\sum_{i\in\{1,2\}} v_i((q,y),t,\lambda,\alpha)$ 表示为 q、$\alpha_1(80|0)$ 及 $\alpha_2(20|100)$ 的一个函数。

c. 考虑依赖于两个参数 r 和 z 的一类机制 (Q,Y) 如下：$Q(80,20)=0=Y(80,20)$，$Q(0,100)=1$，$Y(0,100)=50$，$Q(0,20)=Q(80,100)=r$，$Y(0,20)=rz$，$Y(80,100)=r(100-z)$。假设 $z\leqslant 20$ 和 $r=50/(100-2z)$。通过如同
536 部分 (b) 寻找向量 λ 和 α，使其对所有这些机制都满足定理 10.1 中的激励有效性条件，来证明这一类中的每个机制都是激励有效的。（提示：如果 $\sum_{i\in\{1,2\}} v_i((q,y),t,\lambda,\alpha)=0$ 对所有的 (q,y) 都成立，则对于这个类型组合 t 来说，任一机制都将满足最大化虚效用和的条件。）为什么条件 $z\leqslant 20$ 和 $r=\dfrac{50}{(100-2z)}$ 是必要的？

d. 在 (c) 中所描述的机制类中，对每个局中人 i 的每个类型 t_i，指出事中期望支付 $U_i(Q,Y|t_i)$ 是如何依赖于参数 z 的。对于每一个局中人来说，他的哪个类型喜欢具有较高 z 的机制？哪个类型喜欢具有较低 z 的机制？在这类机制中，哪一个机制使局中人从交易中所得到的事前期望收益之和最大？并证明，这个机制在所有激励相容的个人理性机制中，还最大化了物品被卖出的概率。[回顾习题 6.3 节的部分 (b)。]

e. 利用部分 (c) 中的 λ 和 α，对定理 10.3 中的方程组 (10.22) 寻找解 w。并利用此解证明：部分 (c) 中的机制取 $z=0$ 和 $r=1/2$ 所得的机制便是此贝叶斯讨价还价问题的一个中性讨价还价解。

f. 假设在抛了一枚硬币之后，若正面朝上，则我们让局中人 1 做出一个一锤定音的报价，商品按他可能会规定的任意价格去出售；若反面朝上，则我们让局中人 2 报出一个一口价，她只会以她报出的报价买进商品。抛硬币的输者接受赢者的报价的充要条件是，输者能从赢者的报价中获得非负的收益。每个局中人在其赢了抛硬币后，作为其类型的函数，他或她的最优报价将是什么？将此博弈的这个均衡与你在部分 (e) 中所找到的中性讨价还价解相比较。

参考文献

Abreu, D. 1986, "Extremal Equilibrium of Oligopolistic Supergames." *Journal of Economic Theory* 39: 191—225.

Abreu, D., P. Milgrom, and D. Pearce. 1988. "Information and Timing in Repeated Partnerships." Stanford University discussion paper.

Abreu, D., D. Pearce, and E. Stacchetti. 1986. "Optimal Cartel Equilbria with Imperfect Monitoring." *Journal of Economic Theory* 39: 251—269.

Akerlof, G. 1970. "The Market for Lemons: Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism." *Quarterly Journal of Economics* 84: 488—500.

Albers, W. 1979. "Core-and Kernel-Variants Based on Imputations and Demand Profiles." In O. Moeschin and D. Pallaschke, eds., *Game Theory and Related Topics*. Amsterdam: North-Holland.

Allais, M., and O. Hagen, eds. 1979. *Expected Utility Hypothesis and the Allais Paradox*. Boston: Reidel.

Anderson, R. 1983. "Quick-Response Equilibrium." Discussion Paper No. 323, Center for Research in Management Science, University of California, Berkeley.

Anscombe, F.J., and R.J. Aumann. 1963. "A Definition of Subjective Probability." *Annals of Mathematical Statistics* 34: 199—205.

Arrow, K. 1951. *Social Choice and Individual Values*. New York: Wiley.

Aumann, R.J. 1959. "Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games. In H.W. Kuhn and R.D. Luce, eds. *Contributions to the Theory of Games IV*, pp. 287 - 324. Princeton: Princeton University Press.

Aumann, R.J. 1961. "The Core of a Cooperative Game Without Side Pay-ments." *Transactions of the American Mathematical Society* 98: 539 - 552.

Aumann, R.J. 1964. "Markets with a Continuum of Traders." *Econometrica* 32: 39—50.

Aumann, R.J. 1967. "A Survey of Cooperative Games Without Side Payments." In M. Shubik, ed., *Essays in Mathematical Economics*, pp. 3—27. Princeton: Princeton University Press.

Aumann, R.J. 1974. "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies." *Journal of Mathematical Economics* 1: 67—96.

Aumann, R.J. 1976. "Agreeing to Disagree." *Annals of Statistics* 4: 1236—39.

Aumann, R.J. 1985. "An Axiomatization of the Non-Transferable Utility Value." *Econometrica* 53: 599—612.

Aumann, R.J. 1987a. "Correlated Equilibria as an Expression of Bayesian Rationality." *Econometrica* 55: 1—18.

Aumann, R.J. 1987b. "Game Theory." In J. Eatwell, M. Milgate, and P. New-man, eds., *The*

New Palgrave Dictionary of Economics, pp. 460—482. London: Macmillan.

Aumann, R. J., and J. H. Dreze. 1974. "Cooperative Games with Coalition Structures." *International Journal of Game Theory* 3: 217 · 238.

Aumann, R. J., and M. Maschler. 1964. "The Bargaining Set for Cooperative Games." In M. Dresher, L. S. Shapley, and A. W. Tucker, eds., *Advances in Game Theory*, pp. 443—447. Princeton: Princeton University Press.

Aumann, R. J., and M. Maschler. 1966. "Game Theoretic Aspects of Gradual Disarmament." Chapter 5 in *Report to the U. S. Arms Control and Disarmament Agency ST-80. Princeton: Mathematica, Inc.*

Aumann, R. J., and M. Maschler. 1968. "Repeated Games with Incomplete Information: the Zero Sum Extensive Case." Chapter 2 in *Report to the U. S. Arms Control and Disarmament Agency* ST-143. Princeton: Mathematica, Inc.

Aumann, R. J., and M. Maschler. 1972. "Some Thoughts on the Minimax Principle." *Management Science* 18(pt.2): 54—63.

Aumann, R. J., and R. B. Myerson. 1988. "Endogenous Formation of Links Between Players and of Coalitions: An Application of the Shapley Value." In A. E. Roth, ed., *The Shapley Value*, pp. 175—191. Cambridge: Cambridge University Press.

Aumann, R. J., and B. Peleg. 1960. "Von Neumann-Morgenstern Solutions to Cooperative Games Without Sidepayments." *Bulletin of the American Mathematical Society* 66: 173—179.

Aumann, R. J., and L. S. Shapley. 1974. *Values of Nonatomic Games*. Princeton: Princeton University Press.

Ausubel, L. M., and R. J. Deneckere. 1989. "A Direct Mechanism Characterization of Sequential Bargaining with One-Sided Incomplete Information." *Journal of Economic Theory* 48: 18—46.

Axelrod, R. 1984. *The Evolution of Cooperation*. New York: Basic Books.

Banks, J. S., and J. Sobel. 1987. "Equilibrium Selection in Signaling Games." *Econometrica* 55: 647—662.

Barany, I. 1987. " Fair Distribution Protocols or How the Players Replace Fortune." CORE discussion paper 8718, Université Catholique de Louvain. To appear in *Mathematics of Operations Research*.

Bennett, E. 1983. "The Aspiration Approach to Predicting Coalition Formation and Payoff Distribution in Sidepayment Games." *International Journal of Game Theory* 12: 1—28.

Benoit, J. P., and V. Krishna. 1985. "Finitely Repeated Games." *Econometrica* 53: 905—922.

Benoit, J. P., and V. Krishna. 1989, "Renegotiation in Finitely Repeated Games." Harvard Business School working paper.

Ben-Porath, E., and E. Dekel. 1987. "Signaling Future Actions and the Potential for Sacrifice." Stanford University research Paper.

Bergin, J. 1987. "Continuous Time Repeated Games of Complete Information." Queen's University working paper, Kingston, Ontario.

Bernheim, B. D. 1984. "Rationalizable Strategic Behavior." *Econometrica* 52: 1007—28.

Bernheim, B. D., B. Peleg, and M. D. Whinston. 1987. "Coalition-Proof Nash Equilibria I:

Concepts." *Journal of Economic Theory* 42: 1—12.

Bernheim, B. D., and D. Ray. 1989. "Collective Dynamic Consistency in Repeated Games." *Games and Economic Behavior* 1: 295—326.

Bernoulli, D. 1738. "Exposition of a New Theory of the Measurement of Risk." English translation in *Econometrica* 22(1954): 23—36.

Bicchieri, C. 1989. "Self-Refuting Theories of Strategic Interaction: A paradox of Common Knowledge." *Erkenntnis* 30: 69—85.

Billera, L. J., D. C. Heath, and J. Ranaan. 1978. "Internal Telephone Billing Rates-A Novel Application of Non-Atomic Game Theory." *Operations Research* 26: 956—965.

Billingsley, P. 1968. *Convergence of Probability Measures*. New York: Wiley.

Binmore, K. 1987—88. "Modeling Rational players." *Economics and Philosophy* 3: 179—214; 4: 9—55.

Binmore, K., and P. Dasgupta. 1987. *The Economics of Bargaining*. Oxford: Basil Blackwell.

Binmore, K., A. Rubinstein, and A. Wolinsky. 1986. "The Nash Bargaining Solution in Economic Modeling." *Rand Journal of Economics* 17: 176—188.

Blackwell, D. 1956. "An Analogue of the Minimax Theorem for Vector Payoffs." *Pacific Journal of Mathematics* 6: 1—8.

Blackwell, D. 1965. "Discounted Dynamic Programming." *Annals of Mathematical Statistics* 36: 226—235.

Blackwell, D., and T. S. Ferguson. 1968. "The Big Match." *Annals of Mathematical Statistics* 39: 159—163.

Bondereva, O. N. 1963. "Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games" (in Russian). *Problemy Kibernetiki* 10: 119—139.

Border, K. C. 1985. *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. *Cambridge*: *Cambridge University Press*.

Borel, E. 1921. "La Théorie du Jeu et les Équations Intégrales à Noyau Symétrique." *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 173: 1304—1308.

Burger, E. 1963. *Introduction to the Theory of Games*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Chatterjee, K., and W. Samuelson. 1983. "Bargaining under Incomplete Information." *Operations Research* 31: 835—851.

Cho, I.-K., and D. Kreps. 1987. "Signaling Games and Stable Equilibria." *Quarterly Journal of Economics* 102: 179—221.

Chvatal, V. 1983. *Linear Programming*. New York: W. H. Freeman.

Coase, R. H. 1960. "The Problem of Social Cost." *Journal of Law and Economics* 3: 1—44.

Cooper, R., D. DeJong, R. Forsythe, and T. Ross. 1989. "Communication in the Battle of the Sexes Game." In *Rand Journal of Economics* 20: 568—585.

Cooper, R., D. DeJong, R. Forsythe, and T. Ross. 1990. "Selection Criteria in Coordination Games: Some Experimental Results." *American Economic Review* 80: 218—233.

Cramton, P., R. Gibbons, and P. Klemperer. 1987. "Dissolving a Partnership Efficiently." *Econometrica* 55: 615—632.

Crawford, V. 1979. "On Compulsory-Arbitration Schemes." *Journal of Political Economy* 87:

131—159.

Crawford, V. 1981. "Arbitration and Conflict Resolution in Labor-Management Bargaining." *American Economic Review: Papers and Proceedings* 71: 205—210.

Crawford, V. 1985. "Efficient and Durable Decision Rules: A Reformulation." *Econometrica* 53: 817—835.

Crawford, V., and J. Sobel. 1982. "Strategic Information Transmission." *Econometrica* 50: 579—594.

Cross, J. 1967. "Some Theoretic Characteristics of Economic and Political Coalitions." *Journal of Conflict Resolution* 11: 184—195.

Dasgupta, P., and E. Maskin. 1986. "The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games." *Review of Economic Studies* 53: 1—41.

Dasgupta, P., P. Hammond, and E. Maskin. 1979. "The Implementation of Social Choice Rules: Some Results on Incentive Compatibility." *Review of Economic Studies* 46: 185—216.

D' Aspremont, C., and L.-A. Gerard-Varet. 1979. "Incentives and Incomplete Information." *Journal of Public Economics* 11: 25—45.

Davis, M., and M. Maschler. 1965. "The Kernel of a Cooperative Game." *Naval Research Logistics Quarterly* 12: 223—259.

Debreu, G. 1959. *Theory of Value*. New York: Wiley.

Debreu, G. and H. Scarf. 1963. "A Limit Theorem on the Core of an Economy." *International Economic Review* 4: 235—246.

Edgeworth F. Y. 1881. *Mathematical Psychics*. London: Kegan Paul.

Ellsberg, D. 1961. "Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms." *Quarterly Journal of Economics* 75: 643—669.

Epstein, L. G. 1983. "Stationary Cardinal Utility and Optimal Growth under Uncertainty." *Journal of Economic Theory* 31: 133—152.

Farquharson, R. 1969. *Theory of voting*. New Haven: Yale University Press.

Farrell, J. 1988. "Meaning and Credibility in Cheap-Talk Games." *Games and Economic Behavior* 5: 514—531, 1993.

Farrell, J., and E. Maskin. 1989. "Renegotiation in Repeated Games." *Games and Economic Behavior* 1: 327—360.

Fishburn, P.C. 1968. "Utility Theory." *Management Science* 14: 335—378.

Fishburn, P.C. 1970. *Utility Theory for Decision-Making*. New York: Wiley.

Fisher, R., and W. Ury. 1981. *Getting to Yes: Negotiating Agreement Without Giving In*. Boston: Houghton Mifflin.

Forges, F. 1985. "Correlated Equilibria in a Class of Repeated Games with Incomplete Information." *International Journal of Game Theory* 14: 129—150.

Forges, F. 1986. "An Approach to Communication Epuilibrium." *Econometrica* 54: 1375—85.

Forges, F. 1988. "Non-zero Sum Repeated Games and Information Transmission." CORE Working Paper 8825, Université Catholique de Louvain.

Forges, F. 1990. "Universal Mechanisms." *Econometrica* 58: 1341—1364.

Franklin, J. 1980. *Methods of Mathematical Economics*. New York: Springer-Verlag.

Fudenberg, D., and D. M. Kreps. 1988. "A Theory of Learning, Experimentation, and Equilibrium in Games." M. I. T. and Stanford University working paper.

Fudenberg, D., D. M. Kreps, and D. K. Levine. 1988. "On the Robustness of Equilibrium Refinements." *Journal of Economic Theory* 44: 354—380.

Fudenberg, D., and D. K. Levine. 1986. "Limit Games and Limit Equilibria." *Journal of Economic Theory* 38: 261—279.

Fudenberg, D., D. Levine, and J. Tirole. 1985. "Infinite Horizon Models of Bargaining." In A. E. Roth, ed., *Game-Theoretic Models of Bargaining*, pp. 73—98. *Cambridge: Cambrige University Press*.

Fudenberg, D., and E. Maskin. 1986. "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting and Incomplete Information." *Econometrica* 54: 533—554.

Fudenberg, D., and J. Tirole. 1984. "Preemption and Rent Equalization in the Adoption of a New Technology." *Review of Economic Studies* 52: 383—401.

Fudenberg, D., and J. Tirole. 1988. "Perfect Bayesian and Sequential Equilibria." To appear in *Journal of Economic Theory*.

Geoffrion, A. M. 1971. "Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Applications-Oriented Development." *SIAM Review* 13: 1—37.

Gibbard, A. 1973. "Manipulation of Voting Schemes: A General Result." *Econometrica* 41: 587—601.

Gilboa, I., E. Kalai, and E. Zemel. 1989. "On the Order of Eliminating Dominated Strategies." To appear in *Operations Research Letters*.

Glazer, J., and A. Weiss. 1990. "Pricing and Coordination: Strategically Stable Equilibria." *Games and Economic Behavior* 2: 118—128.

Glicksberg, I. 1952. "A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium points." *Proceedings of the American Mathematical Society* 3: 170—174.

Gresik, T. A., and M. A. Satterthwaite. 1989. "The Rate at Which a Simple Market Converges to Efficiency as the Number of Traders Increases: An Asymptotic Result for Optimal Trading Mechanisms." *Journal of Economic Theory* 48: 304—332.

Grossman, S., and M. Perry. 1986. "Perfect Sequential Equilibrium." *Journal of Economic Theory* 39: 97—119.

Hamilton, W. D. 1964. "The Genetical Evolution of Social Behavior." *Journal of Theoretical Biology* 7: 1—52.

Harris, M., and R. M. Townsend. 1981. "Resource Allocation under Asymmetric Information." *Econometrica* 49: 1477—99.

Harsanyi, J. C. 1956. "Approaches to the Bargaining Problems Before and After the Theory of Games: A Critical Discussion of Zeuthen's, Hick's, and Nash's Theories." *Econometrica* 24: 144—157.

Harsanyi, J. C. 1963. "A Simplified Bargaining Model for the *n*-Person Cooperative Game." *International Economic Review* 4: 194—220.

Harsanyi, J. C. 1967—68. "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players."

Management Science 14: 159—182, 320—334, 486—502.

Harsanyi, J. C. 1973. "Cames with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed-Strategy Equilibrium Points." *International Journal of Game Theory* 2: 1—23.

Harsanyi, J. C., and R. Selten. 1972. "A Generalized Nash Solution for Two-Person Bargaining Games with Incomplete Information." *Management Science* 18: 80—106.

Harsanyi, J. C., and R. Selten. 1988. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. Cambridge, Mass.: MIF Press.

Hart, S. 1985a. "Nonzero-Sum Two-Person Repeated Games with Incomplete Information." *Mathematics of Operations Research* 10: 117—153.

Hart, S. 1985b. "An Axiomatization of Harsanyi's Nontransferable Utility Solution." *Econometrica* 53: 1295—1313.

Hart ,S., and M. Kurz. 1983. "Endogenous Formation of Coalitions." *Econometrica* 51: 1047—64.

Hart , S., and A. Mas-Colell. 1989. "Potential, Value, and Consistency." *Econometrica* 57: 589—614.

Herstein, I., and J. Milnor. 1953. "An Axiomatic Approach to Measurable Utility." *Econometrica* 21: 291—297.

Hillas, J. 1987. "Sequential Equilibria and Stable Sets of Beliefs." I. M. S. S. S. Technical Report No. 518, Stanford University.

Holmstrom, B. 1977. "On Incentives and Control in Organizations." Ph. D. dissertation, Stanford University.

Holmstrom, B., and R. B. Myerson. 1983. "Efficient and Durable Decision Rules with Incomplete Information." *Econometrica* 51: 1799—1819.

Hotelling, H. 1929. "The Stability of Competition." *Economic Journal* 39: 41—57.

Howard, R. 1960. *Dynamic Programming and Markov Processes*. New York: Wiley.

Hurd, A. E., and P. A. Loed. 1985. *An Introduction to Nonstandard Analysis*. *Orlando: Academic Press*.

Hurwicz, L. 1972. "On Informationally Decentralized Systems." In R. Radner and B. McGuire, eds., *Decision and Organization*, pp. 297—336. Amsterdam: North-Holland.

Kadane, J., and P. D. Larkey. 1982. "Subjective Probability and the Theory of Games." *Management Science* 28: 113—120.

Kahneman, D., and A. Tversky. 1979. "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk." *Econometrica* 47: 263—291.

Kahneman. D., and A. Tversky. 1982. "The Psychology of Preferences." *Scientific American* 246(1): 160—170.

Kahneman, D., P. Slovic, and A. Tversky, eds. 1982. *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kakutani, S. 1914. "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem." *Duke Mathematical Journal* 8: 457—458.

Kalai, E. 1977. "Nonsymmetric Nash Solutions and Replications of Two-Person Bargaining." *International Journal of Game Theory* 65: 129—133.

Kalai, E., and D. Samet. 1984. "Persistent Equilibria." *International Journal of Game Theory* 13: 129—144.

Kalai, E., and D. Samet. 1985. "Monotonic Solutions to General Cooperative Games." *Econometrica* 53: 307—327.

Kalai, E., and D. Samet. 1987. "On Weighted Shapley Values." *International Journal of Game Theory* 16: 205—222.

Kalai, E., and M. Smorodinsky. 1975. "Other Solutions to Nash's Bargaining Problem." *Econometrica* 45: 513—518.

kalai, E., and W. Stanford. 1985. "Conjectural Variations Strategies in Accelerated Cournot Games." *International Journal of Industrial Organization* 3: 133—152.

Kandori, M. 1998. "Social Norms and Community Enforcement." University of Pennsylvania working paper.

Kaneko, M., and M. H. Wooders. 1982. "Cores of partitioning Games." *Mathematical Social Sciences* 3: 313—327.

Kohlberg, E. 1989. "Refinement of Nash Equilibrium: The Main Ideas." Harvard Business School working paper.

Kohlberg, E., and J.-F. Mertens. 1986. "On the Strategic Stability of Equilibria." *Econometrica* 54: 1003—37.

Kolmogorov, A. N., and S. V. Fomin. 1970. *Introductory Real Analysis*. New York: Dover.

Knight, F. H. 1921. *Risk, Uncertainty and Profit*. Boston: Houghton Mifflin.

Kreps, D., and R. Wilson. 1982. "Sequential Equilibria." *Econometrica* 50: 863—894.

Kreps. D., P. Milgrom, J. Roberts, and R. Wilson. 1982. "Ratioanl Cooperation in the Finitely-Repeated Prisoner's Dilemma." *Journal of Economic Theory* 27: 245—252.

Kuhn, H. W. 1953. "Extensive Games and the Problem of Information." In H. W. Kuhn and A. W. Tucker. eds., *Contributions to the Theory of Games* I, pp. 193—216. Princeton: Princeton University Press.

Leininger, W., P. B. Linhart, and R. Radner. 1989. "Equilibria of the Sealed-Bid Mechanism for Bargaining with Incomplete Information." *Journal of Economic Theory* 48: 63—106.

Lewis, T. R., and D. E. M. Sappington. 1989. "Countervailing Incentives in Agency Problems." *Journal of Economic Theory* 49: 294—313.

Lucas, W. F. 1969. "The Proof That a Game May Not Have a Solution." *Transactions of the American Mathematical Society* 137: 219—229.

Lucas, W. F. 1972. "An Overview of the Mathematical Theory of Games." *Management Science* 18: 3—19.

Lucas, W. F., and R. M. Thrall. 1963. "n-Person Games in Partition Function Form." *Naval Research Logistics Quarterly* 10: 281—298.

Luce, R. D., and H. Raiffa. 1957. *Games and Decisions*. New York: Wiley.

Luenberger, D. G. 1984. *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd Ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Machina M. 1982. "Expected Utility without the Independence Axiom." *Econometrica* 50: 277—323.

Mas-Colell, A. 1985. *The Theory of General Equilibrium: A Differentiable Approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Maynard Smith, J. 1982. Evolution and the Theory of Games. Cambridge: Cambridge University Press.

McAfee, R.P., and J. McMillan. 1987. "Auctions and Bidding." *Journal of Economic Literature* 25: 699—738.

McLennan, A. 1985. "Justifiable Beliefs in a Sequential Equilibrium." *Econometrica* 53: 889—904.

Mertens, J.-F 1980. "A Note on the Characteristic Function of Supergames." *Internalional Journal of Game Theory* 9: 189—190.

Mertens, J.-F., S. Sorin, and S. Zamir. 1989. *Repeated Games*. Forthcoming.

Mertens, J.-F., and S. Zamir. 1985. "Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information." *International Journal of Game Theory* 14: 1—29.

Milgrom, P. 1981. "Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications." *Bell Journal of Economics* 12: 380—391.

Milgrom, P. 1985. "The Economics of Competitive Bidding: A Selective Survey." In L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein, eds., *Social Goals and Social Organization*, pp.261—289, Cambridge: Cambridge University Press.

Milgrom, P.1987, "Auction Theory." In T. Bewley, ed., *Advances in Economic Theory: Fifth World Congress*, pp.1—32. Cambridge; Cambridge University Press.

Milgrom, P., D.C. North, and B. R. Weingast. 1989. "The Role of Institutions in the Revival of Trade. Part I: The Medieval Law Merchant." Stanford University discussion paper. To appear in *Economics and Politics*.

Milgrom, P., and R. J. Weber. 1982. "A Theory of Auctions and Competitive Bidding." *Econometrica* 50: 1089—1122.

Milgrom, P., and R. J. Weber. 1985. "Distributional Strategies for Games with Incomplete Information." *Mathematics of Operations Research* 10: 619—632.

Miller, N, 1977. "Graph Theoretical Approaches to the Theory of Voting." *American Journal of Political Science* 21: 769—803.

Miller, N. 1980. "A New Solution Set for Tournaments and Majority Voting: Further Graphical Approaches to the Theory of Voting." *American Journal of Political Science* 24: 68—96.

Morgenstern, O. 1976. "The Collaboration between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games." *Journal of Economic Literature* 14: 805—816.

Moulin, H. 1979. "Dominance Solvable Voting Schemes." *Econometrica* 47: 1337—51.

Moulin, H. 1983. *The Strategy of Social Choice*. Amsterdam: North-Holland.

Moulin, H. 1986. "Choosing from a Tournament." *Social Choice and Welfare* 3: 271—291.

Moulin, H. 1988. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge: Cambridge University Press.

Moulin, H., and J.-P. Vial. 1978. "Strategically Zero-Sum Games: The Class Whose Completely Mixed Equilibria Cannot Be Improved Upon." *International Journal of Game Theory* 7: 201—221.

Myerson, R.B. 1977. "Graphs and Cooperation in Games." *Mathematics of Operations Research* 2: 225—229.

Myerson, R.B. 1978a. "Refinements of the Nash Equilibrium Concept." *International Journal of Game Theory* 7: 73—80.

Myerson, R. B. 1978b. "Threat Equilibria and Fair Settlements in Cooperative Games." *Mathematics of Operations Research* 3: 265—274.

Myerson, R.B. 1979. "Incentive-Compatibility and the Bargaining Problem." *Econometrica* 47: 61—73.

Myerson, R.B. 1980. "Conference Structures and Fair Allocation Rules." *International Journal of Game Theory* 9: 169—182.

Myerson, R.B. 1981a. "Optimal Auction Design." *Mathematics of Operations Research* 6: 58—73.

Myerson, R. B. 1981b. "Utilitarianism, Egalitarianism, and the Timing Effect in Social Choice Problems." *Econometrica* 49: 883—897.

Myerson, R. B. 1982. "Optimal Coordination Mechanisms in Generalized Principal-Agent Problems." *Journal of Mathematical Economics* 10: 67—81.

lMyerson, R.B. 1983. "Mechanism Design by an Informed Principal." *Econometrica* 51: 1767—97.

Myerson, R. B. 1984a. "Two-Person Bargaining Problems with Incomplete Information." *Econometrica* 52: 461—487.

Myerson, R. B. 1984b. "Cooperative Games with Incomplete Information." *International Journal of Game Theory* 13: 69—96.

Myerosn, R.B. 1985a. "Bayesian Equilibrium and Incentive Compatibility." In L. Hurwicz, D. Schmfeidler, and H.Sonnenschein, eds., *Social Goals and Social Organization*, pp. 229—259. Cambridge: Cambridge University Press.

Myerson, R.B. 1985b. "Analysis of Two Bargaining Problems with Incomplete Information." In A. E. Roth. ed., *Game-Theoretic Models of Bargaining*. pp. 115—147. Cambridge: Cambridge University Press.

Myerson, R.B. 1986a. "Acceptable and Predominant Correlated Equilibria." *International Jourant of Game Theory* 15: 133—154.

Myerson, R.B. 1986b. "Multistage Games with Communication." *Econometrica* 54: 323—358.

Myerson, R. B. 1986c. "An Introduction to Game Theory." In S. Reiter, ed., *Studies in Mathematical Economics*, pp. 1—61. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Myerson, R. B. 1988. "Sustainable Matching Plans with Adverse Selection." Northwestern University discussion paper. To appear in *Games and Economic Behavior*.

Myerson, R. B. 1989. "Credible Negotiation Statements and Coherent Plans." *Journal of Economic Theory* 48: 264—303.

Myerson, R.B. and M.A. Satterthwaite. 1983. "Efficient Mechanisms for Bilateral Trading." *Journal of Economic Theory* 29: 265—281.

Myerson, R.B., G.B.Pollock, and J.M. Swinkels. 1991. "Viscous Population Equilibria." To

appear in *Games and Economic Behavior*.

Nash, J. F. 1950. "The Bargaining Problem." *Econometrica* 18: 155—162.

Nash, J. F. 1951. "Noncooperative Games." *Annals of Mathematics* 54: 289—295.

Nash, J. F. 1953. "Two-Person Cooperative Games." *Econometrica* 21: 128—140.

Okuno-Fujiwara, M., A. Postlewaite, and G. Mailath. 1991. "On Belief-Based Refinements in Signaling Games." Univ. of Penn. working paper.

Ortega-Reichert, A. 1968. "Models for Competitive Bidding under Uncertainty." Department of Operations Research Technical Report No. 8(Ph. D. dissertation), Stanford University.

Owen, G. 1972. "A Value for Non-Transferable Utility Games." *International Journal of Game Theory* 1: 95—109.

Owen, G. 1977. "Values of Games with A Priori Unions." In R. Hein and O. Moeschlin, eds., *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*, pp. 76—88. Berlin: Springer-Verlag.

Owen, G. 1982. *Game Theory*, 2nd Ed. New York: Academic Press.

Pearce, D. G. 1984. "Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection." *Econometrica* 52: 1029—50.

Pearce, D. G. 1987. "Renegotiation-proof Equilibria: Collective Rationality and Intertemporal Cooperation." Yale University discussion paper.

Peleg, B. 1963. "Existence Theorem for the Bargaining Set $M_1^{(i)}$." *Bulletin of the American Mathematical Society* 69: 109—110.

Peleg, B, 1984, *Game Theoretic Analysis of Voting in Committees*. Cambridge: Cambridge University press.

Perles, M. A., and M. Maschler. 1981. "The Super-Additive Solution for the Nash Bargaining Game. *International Journal of Game Theory* 10: 163—193.

Pollock, G. B. 1989. "Evolutionary Stability of Reciprocity in a Viscous Lattice." *Social Networks* 11: 175—212.

Pratt, J. W. 1964. "Risk Aversion in the Small and in the Large." *Econometrica* 32: 122—136.

Pratt, J. W., H. Raiffa, and R. Schlaiffer. 1964. "The Foundations of Decisions under Uncertainty: An Elementary Exposition." *American Statistical Association Journal* 59: 353—375.

Qin, C. Z. 1989. "Strongly and Weakly Inhibitive Sets and the λε-Inner Core." Economics working paper, University of Iowa.

Radner, R. 1980. "Collusive Behavior in Oligopolies with Long but Finite Lives." *Journal of Economic Theory* 22: 136—156.

Radner, R., R. Myerson, and E. Maskin. 1986. "An Example of a Repeated Partnership Game with Discounting and Uniformly Inefficient Equilibria." *Review of Economic Studies* 53: 59—70.

Raiffa, H. 1968. *Decision Analysis*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Raiffa, H. 1982. *The Art and Science of Negotiation*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Ramsey, F. P. 1926. "Truth and Probability." Reprinted in H. E. Kyburg, Jr. and H. E.

Smokler, eds., 1964, *Studies in Subjective Probability*, pp.62—92. New York: Wiley.

Rasmusen, E. 1989. *Games and Information: An Introduction to Game Theory*. Oxford: Basil Blackwell.

Reny, P.J. 1987. "Explicable Equilibria." University of Western Ontario working paper.

Rockafellar, R.T. 1970. *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press.

Rosenthal, R. 1978. "Arbitration of Two-Party Disputes under Uncertainty." *Review of Economic Studies* 45: 595—604.

Rosenthal, R. 1981. "Games of Perfect Information, Predatory Pricing, and the Chain-Store Paradox." *Journal of Economic Theory* 25: 92—100.

Roth, A.E. 1979. *Axiomatic Models of Bargaining*. Berlin: Springer-Verlag.

Roth, A.E. 1980. "Values for Games Without Side-Payments: Some Difficulties with Current Concepts." *Econometrica* 48: 457—465.

Roth, A.E. 1985. "Toward a Focal-Point Theory of Bargaining." In A.E. Roth, ed., *Game-Theoretic Models of Bargaining*, pp.259—268. Cambridge: Cambridge University Press.

Roth, A.E. 1988. *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge: Cambridge University Press.

Roth, A.E., and F. Schoumaker. 1983. "Expectations and Reputations in Bargaining." *American Economic Review* 73: 362—372.

Rothschild, M., and J.Stiglitz. 1976. "Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information." *Quarterly Journal of Economics* 90: 629—649.

Royden, H. 1968. *Real Analysis*. New York: Macmillan.

Rubinstein, A. 1979. "Equilibrium in Supergames with the Overtaking Criterion." *Journal of Economic Theory* 21: 1—9.

Rubinstein, A. 1982. "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model." *Econometrica* 50: 97—109.

Rubinstein, A. 1987. "A Sequential Strategic Theory of Bargaining." In T. Bewley, ed., *Advances in Economic Theory: Fifth World Congress*, pp. 197—224. Cambridge: Cambridge University Press.

Rubinstein, A. 1989. "The Electronic Mail Game: Strategic Behavior under Almost Common Knowledge." *American Economic Review* 79: 385—391.

Samuelson, L. 1989. "Dominated Strategies and Common Knowledge." Pennsylvania State University working paper.

Savage, L.J. 1954. *The Foundations of Statistics*. New York: Wiley.

Scarf, H.E. 1967. "The Core of a *n*-Person Game." *Econometrica* 35: 50-69.

Scarf, H.E. 1973. *The Computation of Economic Equilibria*. New Haven Conn.: Yale University Press.

Schelling, T.C. 1960. *The Strategy of Conflict*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Schmeidler, D. 1969. "The Nucleolus of a Characteristic Function Game." *SIAM Journal of Applied Mathematics* 17: 1163—70.

Schmeidler, D. 1973. "Equilibrium Points of Nonatomic Games." *Journal of Statistical Physics* 7: 295—300.

Selten, R. 1965. "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit." *Zeitschrift fuer die gesampte Staatswissenschaft* 121: 301—324, 667—689.

Selten, R. 1975. "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games." *International Journal of Game Theory* 4: 25—55.

Selten, R. 1978. "The Chain-Store Paradox." *Theory and Decision* 9: 127—159.

Sen, A.K. 1970. *Collective Choice and Social Welfare*. San Francisco: Holden-Day.

Shafer, W. 1980. "On the Existence and Interpretation of Value Allocations." *Econometrica* 48: 467—477.

Shapley, L.S. 1953. "A Value for n-Person Games." In H. Kuhn and A. W. Tucker, eds., *Contributions to the Theory of Games II*, pp. 307—317. Princeton: Princeton University Press.

Shapley, L.S. 1967. "On Balanced Sets and Cores." *Naval Research Logistics Quarterly* 14: 453—460.

Shapley, L.S. 1969. "Utility Comparison and the Theory of Games." In *La Decision*, Editions du CNRS, Paris, pp. 251—263. Reprinted in A.E. Roth, ed., 1988. *The Shapley Value*, pp. 307—319. Cambridge: Cambridge University Press.

Shapley, L.S., and M. Shubik. 1954. "A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System." *American Political Science Review* 48: 787—792.

Shepsle, K., and B. Weingast. 1984. "Uncovered Sets and Sophisticated Voting Outcomes with Implications for Agenda Institutions." *American Journal of Political Science* 28: 49—74.

Shubik, M. 1982. *Game Theory in the Social Sciences: Concepts and Solutions*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Simon, L.K. 1987. "Basic Timing Games." University of California, Berkeley, working paper.

Simon, L.K., and M. B. Stinchcombe. 1989. "Extensive Form Games in Contiuous Time: Pure Strategies." *Econometrica* 57: 1171—1214.

Simon, L.K., and W.R. Zame. 1990. "Discontinuous Games and Endogenous Sharing Rules." *Econometrica* 58: 861—872.

Sobel, J., and I. Takahashi. 1983. "A Multistage Model of Bargaining." *Review of Economic Studies* 50: 411—426.

Sorin, S. 1980. "An Introduction to Two-Person Zero Sum Repeated Games with Incomplete Information." I.M.S.S.S. Technical Report No. 312, Stanford University.

Spence, M. 1973. "Job Market Signaling." *Quarterly Journal of Economics* 87: 355—374.

Stahl, I. 1972. *Bargaining Theory*. Stockholm: Stockholm School of Economics.

Sutton, J. 1986. "Noncooperative Bargaining Theory: An Introduction." *Review of Economic Studies* 53: 709—724.

Tauman, Y. 1988. "The Aumann-Shapley Prices: A Survey." In A.E. Roth, ed., *The Shapley Value*, pp. 279—304. Cambridge: Cambridge University Press.

Thrall, R.M., and W.F. Lucas. 1963. "n-Person Games in Partition Function Form." *Naval Research Logistics Quarterly* 10: 281—298.

van Damme, E. 1984. "A Relation between Perfect Equilibria in Extensive Form Games and Proper Equilibria in Normal Form Games." *International Journal of Game Theory* 13: 1—

13.

van Damme, E. 1987. *Stability and Perfection of Nash Equilibria*. Berlin: Springer-Verlag.

van Damme, E. 1989. "Stable Equilibria and Forward Induction." *Journal of Economic Theory* 48: 476—496.

van Damme, E., R. Selten, and E. Winter. 1990. "Alternating Bid Bargaining with a Smallest Money Unit." *Games and Economic Behavior* 2: 188—201.

van Huyck, J. B., R. C. Battalio, and R. O. Beil. 1990. "Tacit Coordination Games, Strategic Uncertainty, and Coordination Failure." *American Economic Review* 80: 234—248.

Vickrey, W. 1961. "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders." *Journal of Finance* 16: 8—37.

von Neumann, J. 1928. "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele." *Mathematische Annalen* 100: 295—320. English translation in R. D. Luce and A. W. Tucker, eds., *Contributions to the Theory of Games IV*(1959), pp. 13—42. Princeton: Princeton University Press.

von Neumann, J., and O. Morgenstern. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press. Second Ed., 1947.

Wilson, C. 1977. "A Model of Insurance Markets with Incomplete Information." *Journal of Economic Theory* 16: 167—207.

Wilson, R. 1971. "Computing Equilibria of n-Person Games." *SIAM Journal of Applied Mathematics* 21: 80—87.

Wilson, R. 1987. "Game Theoretic Analyses of Trading Processes." In T. Bewley, ed., *Advances in Economic Theory: Fifth World Congress*, pp. 33-70. Cambridge: Cambridge University Press.

Wooders, M. H. 1983. "The Epsilon Core of a Large Replica Game." *Journal of Mathematical Economics* 11: 277—300.

Wooders, M. H., and W. R. Zame. 1984. "Approximate Cores of Large Games." *Econometrica* 52: 1327—50.

Young, H. P. 1985. "Producer Incentives in Cost Allocation." *Econometrica* 53: 757—765.

Zermelo, E. 1913. "Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels." *Proceedings Fifth International Congress of Mathematicians* 2: 501—504.

译后记

只要认识到人类的行为决策会产生相互影响（实际上也的确如此），就会了解为什么博弈分析方法会成为如今社会科学研究中最重要的分析方法。在现实生活中，小到下棋、打扑克、球类比赛，大到寡头市场竞争、政治联盟斗争，甚至军事上你死我活的战争，都充满了矛盾冲突、竞争或合作，博弈论正是研究行为者在冲突、竞争或合作等条件下做出最优决策的数学模型理论，它既包括社会、经济、政治及自然界各类矛盾冲突与合作的范式，又包括讨价还价、利益分配等行为范式。

R·B·迈尔森教授的《博弈论——矛盾冲突分析》一书，全面透彻地考察了非合作博弈及合作博弈的数学模型，阐明了博弈论的方法原理，讨论了展开型博弈的序贯均衡和策略型博弈均衡的精炼，综述了通信博弈、重复博弈、不完全信息贝叶斯博弈等专题，并吸收了博弈论的最新进展。全书内容丰富，取材精练，叙述深入浅出，思想方法与应用并重，特别是在经济理论方面的富有成效的应用。

阅读本书所需要的数学知识只是微积分、线性代数和概率论等方面的基本知识，因而适合于本科生高年级和研究生低年级学生，以及想了解博弈论基本方法及其在经济理论中运用的经济学家阅读使用。在翻译过程中，我们认识到博弈论是个极具吸引力和挑战性的领域，本书也是这一领域中不可多得的教科书。作者本人还欣然为此中译本写了序言。

本书第一、二、三、五、七、十章由于寅翻译，其余各章由费剑平翻译，在相互校阅的基础上由费剑平统一整理成稿。

华中科技大学数量经济研究所所长林少宫教授在百忙之中审阅了部分书稿，经济发展研究中心主任张培刚教授、副主任徐长生和张卫东教授也给予了充分的关注和支持。本书编辑张抒文女士付出的艰辛劳动使本书润色不少。在此向他们表示我们久藏于心的感激。

由于译者水平有限，译校中的错误与不当之处，恳请广大读者原谅并指正。

译者

2000 年 1 月 10 日

于武汉东湖之畔